Sull'effetto Compton[1]

E. Schrödinger

È noto che secondo la teoria ondulatoria della luce tutte le variazioni della *frequenza* e della *normale d'onda* si possono prevedere in base a considerazioni assai semplici e generali sulla *fase*, senza introdurre un qualsivoglia dettaglio del processo. Penso a considerazioni del tipo seguente: un'onda luminosa con la fase

$$2\pi\nu \left[t - \frac{n}{c}\left(\alpha x + \beta y + \gamma z\right)\right]$$

incida dalla direzione degli z positivi sul piano x, y, che costituisce la superficie di separazione di due mezzi con indici di rifrazione n (per $z > 0$) e n' (per $z < 0$). Si assuma l'onda rifratta con la fase

$$2\pi\nu' \left[t - \frac{n'}{c}\left(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z\right) + \delta\right]$$

e si richieda per $z = 0$ una differenza di fase *costante*, cioè indipendente da x, y, t; si ottiene

$$\nu' = \nu,\ n'\alpha' = n\alpha,\ n'\beta' = n\beta,$$

ossia la legge della rifrazione di Snellius. Il procedimento è così generale, che per esempio esso vale immutato anche per i cristalli. Esso si può estendere senz'altro a superfici di separazione in moto. Un esame dettagliato del processo elettromagnetico sarà pur sempre necessario quando ci si interessi anche delle *intensità* (formule di rifrazione di Fresnel).

Poiché ora ci si aspetta di trovare nelle onde di de Broglie uno strumento pari all'ottica ondulatoria per dominare quei processi, che prima si erano interpretati esclusivamente come moti corpuscolari, bisogna aspettarsi e richiedere che sulla base di considerazioni di fase assai semplici del tipo prima introdotto si possano rendere comprensibili le variazioni di direzione e di frequenza delle onde d'etere che intervengono nell'effetto Compton in connessione con le variazioni di velocità dell'elettrone. Anche queste ultime, secondo l'idea di de Broglie, sono descrivibili come variazioni di direzione e di frequenza di un'onda, ossia dell'onda di de Broglie. Un esame più approfondito della meccanica ondulatoria del processo, come recentemente ha condotto con pieno successo W. Gordon[2], è necessario per la determinazione delle intensità. Poiché quest'ultimo è considerevolmente lungo e intricato, la trattazione semplice ed intuitiva comunicata nel seguito, che dà tutto *fuorché* l'intensità, può essere in ogni caso assai desiderabile.

Partiamo da un risultato dell'ottica classica. "Quando in un mezzo trasparente, omogeneo e isotropo, il cui indice di rifrazione dipenda dalla densità, un raggio luminoso di lunghezza d'onda λ incrocia un'onda di compressione (onda sonora) di lunghezza d'onda Λ, come ha mostrato L. Brillouin[3] con un calcolo puramente classico, il raggio luminoso viene riflesso parzialmente in modo regolare dai piani

[1] Über den Comptoneffekt, Annalen der Physik **82**, 257-264 (1927).

[2] W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **40**, 117 (1926). Gordon è stato così gentile, da consentirmi una visione del suo manoscritto, dal quale sono stato portato alla semplice rappresentazione seguente, che in nuce sta alla base anche della trattazione di Gordon.

[3] L. Brillouin, Annales de Phys. **17**, 88 (1923).

delle onde sonore, purchè tra le due lunghezze d'onda e l'angolo di illuminazione ϑ sussista la relazione di Bragg ben nota nella teoria della riflessione dei raggi Röntgen

$$2\Lambda \sin\vartheta = \lambda \tag{1}$$

per la riflessione al *prim'*ordine ($=\lambda$, non $=k\lambda$). Questo si trova in approssimazione, quando la velocità della luce può essere considerata molto grande rispetto alla velocità del suono. Detto più precisamente, succede come per uno specchio *in moto*: l'angolo di riflessione non è esattamente uguale all'angolo di incidenza, il raggio luminoso subisce spostamento Doppler, e anche la (1) va corretta, come avverrebbe per un cristallo *in moto*".

Queste leggi sono ricavate in un altro lavoro[4] nel quale poi si mostra con soddisfazione che il risultato di Brillouin si può ottenere anche dall'ipotesi di uno scambio quantizzato di energia ed impulso. Si era allora dell'opinione, che l'intera nostra spiegazione della natura si dovesse costruire in fin dei conti con siffatti bilanci quantici e ci si rallegrava ogni volta che un risultato classico degno di fede si poteva trasferire agevolmente dalla vecchia alla nuova base. Prendiamo adesso per così dire la via opposta. Mostriamo che in stretta analogia con il risultato di Brillouin su ricordato si può dare un'interpretazione secondo la meccanica ondulatoria delle relazioni di Compton, che non è per nulla meno semplice della trattazione quantistica dell'impulso e dell'energia. Un'onda piana

$$\psi \approx e^{\frac{2\pi i}{h}\left[h\nu t - \frac{h\sqrt{\nu^2-\nu_0^2}}{c}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\right]}, \tag{2}$$

dove

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\ \nu_0=m_0c^2/h$$

(m_0=massa a riposo dell'elettrone, h=costante di Planck, c=velocità della luce),

soddisfa nello spazio privo di campi l'equazione d'onda-ψ proposta negli ultimi tempi da molte parti[5]

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\ddot{\psi} - \frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}\psi = 0,$$

e si riferisce secondo de Broglie ad un elettrone che si muova con energia $h\nu$ nella direzione α, β, γ. Da questa si calcola in modo noto che

$$\frac{h\nu}{c},\ \frac{h\sqrt{\nu^2-\nu_0^2}}{c}\cdot\alpha,\ \frac{h\sqrt{\nu^2-\nu_0^2}}{c}\cdot\beta,\ \frac{h\sqrt{\nu^2-\nu_0^2}}{c}\cdot\gamma$$

è il tetravettore "energia-impulso" del corrispondente elettrone. Dal punto di vista dell'onda lo chiameremo "tetravettore di propagazione" e indicheremo con questa espressione i coefficienti di ct, $-x$, $-y$, $-z$ nella fase (tralasciando il fattore $2\pi/h$) *per un'onda piana sinusoidale del tutto arbitraria*, sia essa un'onda ψ, sia un'onda

---

[4] E. Schrödinger, Physik. Zeitschr. **25**, 89 (1924).

[5] O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **37**, 895 (1926); E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **81**, 109 (1926); V. Fock, Zeitschr. f. Phys. **38**, 242 (1926); Th. De Donder e H. van den Dungen, Compt. rend., 5 luglio 1926; L. de Broglie, Compt. Rend., 26 luglio 1926; J. Kudar, Ann. der Phys. **81**, 632 (1926); W. Gordon, opera citata.

d'etere, o qualcos'altro. Il "vettore di propagazione" è un concetto puramente della cinematica delle onde ed ha le componenti

$$(3)\qquad \frac{h}{c}\cdot \text{frequenza},\ \frac{h\alpha}{\text{lunghezza d'onda}},\ \frac{h\beta}{\text{lunghezza d'onda}},\ \frac{h\gamma}{\text{lunghezza d'onda}},$$

dove α, β, γ sono i coseni direttori della normale d'onda. Per un'onda d'etere queste quantità coincidono pure con i valori dell'energia e dell'impulso secondo la teoria dei quanti. Tuttavia questi richiami a grandezze quantistiche servono solo ad agevolare alla fine l'identificazione del nostro risultato con quello di Compton - operiamo con il concetto puramente della cinematica delle onde (3) di vettore di propagazione. - Per vettore di propagazione *tri*dimensionale intendiamo naturalmente la proiezione spaziale, cioè il vettore (3) dopo aver tralasciato la prima componente.

Secondo l'ipotesi sempre finora confermata della meccanica ondulatoria non si associa significato fisico alla funzione ψ stessa, ma al quadrato del suo valore assoluto, e in particolare il significato: densità di elettricità[6]. Una sola onda ψ del tipo (2) genera quindi una distribuzione di densità costante nello spazio e nel tempo. Se tuttavia ne sovrapponiamo due - le costanti della seconda siano $\nu', \alpha', \beta', \gamma'-$ si riconosce facilmente che dalla loro azione congiunta si forma una "onda di densità elettrica" con un vettore di propagazione che è la differenza vettoriale dei vettori di propagazione delle due onde ψ costituenti. Se chiamiamo simbolicamente questi due vettori A, A', quello dell'onda di densità è[7]

$$(4)\qquad D = A - A'.$$

Quest'onda di densità è ora quella che compare al posto dell'onda sonora di Brillouin. Se facciamo l'ipotesi che da essa un'onda luminosa sia riflessa come da uno specchio in moto, purchè sia soddisfatta la legge di Bragg, le nostre quattro onde, cioè le due onde ψ, A ed A', l'onda luminosa incidente e l'onda luminosa riflessa, come mostreremo, stanno proprio nel rapporto di Compton. La differenza rispetto al caso di Brillouin della riflessione da un'onda sonora è solo quantitativa, perché in generale la velocità della nostra onda di densità D non è piccola rispetto alla velocità della luce; si possono avere valori arbitrari fino alla velocità della luce (ma mai sopra la velocità della luce, come si verifica facilmente).

La dimostrazione della nostra affermazione si ottiene facilmente. Non occorre infatti trovare davvero la riflessione da uno specchio *in moto*. Poiché tutte e quattro le onde e naturalmente anche i loro vettori di propagazione sono invarianti per trasformazioni di Lorentz, possiamo con una di queste trasformare a riposo l'onda di densità. La prima componente (temporale) del suo vettore di propagazione sarà allora nulla. Inoltre allora la frequenza (e la lunghezza d'onda) dell'onda luminosa *non* cambiano per riflessione, cioè la componente temporale del vettore di propagazione di *questa* risulta invariato per riflessione. In conclusione la relazione di Bragg vale proprio nella forma (1), dove λ è la lunghezza d'onda dell'onda luminosa, Λ quella dell'onda di densità, ϑ l'angolo di illuminazione. Essa si può porre nella forma:

[6]Il raffinamento relativistico nel nostro caso non cambia questa ipotesi. (W. Gordon, luogo citato).

[7]Il segno è di poca importanza, perché scambia soltanto i ruoli delle due onde ψ.

$$2\frac{h}{\lambda}\sin\vartheta = \frac{h}{\Lambda}, \tag{5}$$

che spieghiamo con l'adiacente Fig. 1, nella quale va anche notata l'uguaglianza dell'angolo di incidenza con l'angolo di riflessione.

La (5) esprime quindi che il trivettore dell'onda luminosa incidente, sommato al trivettore di D, è uguale al trivettore dell'onda luminosa riflessa. Ma un rapporto analogo al suddetto vale anche per le componenti temporali: queste sono *nulla* per D e *immutata* dopo la riflessione per l'onda luminosa. Se indichiamo con L e con L' i tetravettori di propagazione per l'onda luminosa incidente e riflessa, possiamo riassumere tutto questo nella singola equazione tetravettoriale[8]

$$L + D = L', \tag{6}$$

che ora deve valere per un arbitrario sistema di coordinate tetradimensionale. Combinata con la (4) essa dà

$$L + A = L' + A'. \tag{7}$$

Tenendo conto del significato delle componenti di L, L' secondo l'ipotesi dei quanti di luce e di quelle di A, A' secondo l'associazione di de Broglie delle onde ψ con l'elettrone, l'equazione (7) risulta esattamente in accordo con l'ipotesi della teoria di Compton dell'energia e dell'impulso per l'effetto Compton.

E' assai interessante notare la *completa reciprocità* tra le onde ψ da un lato e le onde luminose dall'altro. Il fenomeno si può interpretare parimenti come riflessione di Bragg di un'onda ψ da parte del sistema di *frange* d'*interferenza* prodotto da due onde luminose che s'incrociano. Nel sistema di coordinate scelto, prima utilizzato, esso è *a riposo* ed è identico al sistema di onde luminose stazionarie di O. Wiener. Le relazioni (4) e (6) dicono che il sistema di frange d'interferenza e l'onda di densità coincidono, hanno entrambe il vettore di propagazione D. Il sistema di coordinate scelto è proprio quello che Pauli[9] ha trovato come il più conveniente nello studio dell'effetto Compton.

La Fig. 2 cerca di rappresentare le relazioni tra i quattro fronti d'onda che si compenetrano e le onde combinate stazionarie (tratteggiate) nel sistema di coordinate spaziotemporale scelto. Per non confondere la figura, i due fronti d'onda luminosi sono disegnati solo nella metà sinistra e i due fronti d'onda ψ solo nella metà destra. Le *frecce* indicano la direzione d'avanzamento dei fronti d'onda a cui sono perpendicolari. La loro lunghezza non ha significato. Si immaginerà di trasportarle parallelamente al centro della figura, in modo che le piume di L' ed A' coincidano in un solo punto con le punte di L ed A. - Dalla figura si coglie facilmente la condizione di Bragg (1) per ciascuna delle coppie di onde (L,L') e (A,A') nel loro rapporto con l'onda stazionaria come "cristallo". Si può dire quindi:

Le leggi sulla direzione e sulla frequenza dell'effetto Compton sono completamente equivalenti all'affermazione che la coppia d'onde luminose e la coppia d'onde

[8] Il segno di D nella (6) è di poca importanza, perché scambia soltanto i ruoli delle due onde luminose.

[9] W. Pauli jr., Zeitschr. f. Phys. **18**, 272 (1923).

ψ che partecipano soddisfino alla condizione di Bragg per riflessione al prim'ordine (generalizzata al cristallo in moto) relativamente ad una ed una stessa "schiera di piani reticolari"; ogni schiera di piani reticolari pensabile può avere a priori arbitrarie la giacitura, la spaziatura dei piani e la velocità di traslazione (minore di quella della luce).

Potrei ora incontrare un'obiezione di principio. Si potrebbe dire: sì, ma i dati primari dell'effetto Compton sono *una* onda luminosa ed *un* elettrone che si muove in un modo determinato, ossia, diciamo, *una* onda ψ; come compare la *seconda* onda ψ, scelta opportunamente, che assieme a quella preesistente costituisce uno "specchio di Bragg" appropriato per l'onda luminosa preesistente? - A ciò si deve replicare, che le semplici considerazioni di fase che qui abbiamo presentato non possono certamente raggiungere una risposta a tale domanda. Studiamo con queste per così dire il fenomeno Compton *in regime stazionario*, nel quale costantemente l'onda primaria di un tipo per riflessione sul sistema di frange d'interferenza dell'altro tipo si trasforma in onda secondaria e vice-versa. Procediamo esattamente come per le analoghe considerazioni nell'ottica, almeno fin quando non la studiamo molto più precisamente per mezzo di una teoria più dettagliata. Anche in quel caso non trattiamo in generale il primo apparire per esempio di un'onda riflessa e di un'onda rifratta in corrispondenza alla testa d'onda dell'onda primaria, ma facciamo un'*ipotesi* non solo per l'onda incidente, ma anche per *tutte* le altre onde, la cui comparsa si può prevedere, e cerchiamo con questa ipotesi di rappresentare uno stato stazionario, che soddisfi a tutte le condizioni da imporsi.

Zürich, Physikalische Institut der Universität.

(ricevuto il 20 novembre 1926)