# A proposito della prima nota di Hilbert sui fondamenti della fisica[1] [2]

**F. Klein**

Comunicazione presentata nella seduta del 25 gennaio 1918.

[1]Queste "Nachrichten", Math.-Phys. Klasse, 1915, p. 395-407 (comunicazione del 20 novembre 1915).

[2]Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1917, 469-482.

### I. Da una lettera di F. Klein a D. Hilbert.

....studiando accuratamente la Sua nota, mi sono accorto che è possibile abbreviare considerevolmente i calcoli intermedi da Ella effettuati mediante l'utilizzo dell'usuale principio variazionale di Lagrange, e come conseguenza si ottiene una visione più esatta del significato del teorema di conservazione, che Ella ha stabilito per il Suo vettore dell'energia. Nella seguente esposizione delle mie considerazioni mi attengo il più possibile alla Sua notazione, salvo che per coerenza denoto il parametro d'universo $w$ con indici *alti*:

$$w^I, w^{II}, ...w^{IV}$$

e contrassegno sempre gli indici indeterminati mediante caratteri greci. In tal modo rendo più agevole il confronto con gli sviluppi paralleli di Einstein, sui quali parimenti ho da fare alcune osservazioni.

**1.** Comincio proprio con l'introdurre, come a pag. 10 della Sua nota, i due integrali, che chiamo $I_1$ e $I_2$,:

$$I_1 = \int K d\omega, \qquad I_2 = \int L d\omega; \tag{1}$$

con $d\omega$ si intende l'elemento di volume invariante

$$d\omega = \sqrt{g}.dw^I...dw^{IV}.$$

Qui $K$ è l'invariante fondamentale di posizione del $ds^2$ posto a fondamento, che si scrive così:

$$K = \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma} (\mu\nu, \rho\sigma)(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), \tag{2}$$

usando il simbolo di Riemann a quattro indici, mentre per $L$, poiché non m'importa della generalità delle ipotesi fisiche, scrivo l'espressione più semplice ammissibile secondo la pagina 13 della Sua nota:

$$L = \alpha Q = \alpha \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma} (q_{\mu\nu} - q_{\nu\mu})(q_{\rho\sigma} - q_{\sigma\rho})(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}). \tag{3}$$

In essa, secondo le idee di Einstein, $\alpha$ è da porre uguale alla costante gravitazionale moltiplicata per $8\pi/c^2$, quindi nelle unità in uso presso i fisici un numero molto piccolo:

$$\alpha = 1,87.10^{-27};$$

riporto esplicitamente questo valore numerico, in modo che si veda come la vecchia teoria di Maxwell degli elettroni nello spazio vuoto, che pone

$\alpha = 0$ e non parla affatto di $K$, può essere considerata una approssimazione sufficiente, per le misure usuali, della nuova impostazione della quale qui si discuterà. Si veda inoltre in seguito al Nr. 5.

**2.** Innanzitutto eseguo ora in modo puramente formale la variazione degli integrali $I_1$, $I_2$ che corrisponde a una variazione arbitraria di $g^{\mu\nu}$, $q_\rho$ dell'ammontare $\delta g^{\mu\nu}$, $\delta q_\rho$, e la scrivo abbreviandola così:

$$\delta I_1 = \int \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\omega \tag{4}$$

$$\delta I_2 = \alpha \int \left( \sum_{\mu,\nu} Q_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sum_{\rho} Q^\rho \delta q_\rho \right) d\omega. \tag{5}$$

Qui indico con $K_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$ i ben noti tensori controgredienti rispetto al prodotto $dw^\mu dw^\nu$:

$$K_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_{\rho} \frac{\partial \left( \frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho}} \right)}{\partial w^\rho} + \sum_{\rho,\sigma} \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho\sigma}} \right)}{\partial w^\rho \partial w^\sigma} \right) : \sqrt{g}, \tag{6}$$

$$Q_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial \sqrt{g} Q}{\partial g^{\mu\nu}} \right) : \sqrt{g}, \tag{7}$$

$Q^\rho$ indica il vettore controgrediente rispetto a $dw^\rho$:

$$Q^\rho = - \left( \sum_{\sigma} \frac{\partial \left( \frac{\partial \sqrt{g} Q}{\partial q_{\rho\sigma}} \right)}{\partial w^\sigma} \right) : \sqrt{g}. \tag{8}$$

*Le equazioni*

$$Q^\rho = 0 \tag{9}$$

*scritte nelle coordinate $w$, sono le equazioni di Maxwell corrispondenti alle nostre ipotesi fisiche; i $Q_{\mu\nu}$ sono invece, come Ella osserva a pag. 10 della Sua nota, le componenti dell'energia del campo elettromagnetico.*

**3.** Inoltre per chiarezza distinguerò in primo luogo tra la *divergenza scalare* di un "vettore $p^\rho$" e la *divergenza vettoriale* di un "tensore $t_{\mu\nu}$" Nelle nostre coordinate generali $w^\nu$ la prima si esprime, come noto, mediante la somma

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \sqrt{g} p^\nu}{\partial w^\nu} : \sqrt{g}, \tag{10}$$

la seconda invece sarà un po' più complicata; le sue quattro componenti si scrivono:

$$\left( \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial (\sqrt{g} t_{\mu\sigma} g^{\mu\nu})}{\partial w^\nu} + \frac{1}{2} \sqrt{g} \sum_{\mu,\nu} t_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\sigma} \right) : \sqrt{g}, \tag{11}$$

per $\sigma = 1, 2, 3, 4$.

**4.** Svilupperò ora *le quattro semplici equazioni differenziali alle derivate parziali* soddisfatte da $I_1$ e rispettivamente da $I_2$ (perché entrambi sono invarianti per trasformazioni arbitrarie di $w$). A questo scopo naturalmente si calcolano, come ha fatto Lie nelle sue numerose e importanti pubblicazioni, le variazioni formali che risultano da una trasformazione infinitesima arbitraria

$$\delta w^I = p^I, ....\delta w^{IV} = p^{IV} \tag{12}$$

(con $p^\sigma$ intendiamo un vettore infinitesimo, le cui potenze più alte possono essere trascurate). Questo Ella ha fatto per l'integrale $I_1$ alle pp. 4, 5, 6 della Sua nota nel modo seguente: prima prende in considerazione le relativamente complicate variazioni di $K$, per poi risalire per integrazione alla variazione di $I_1$. Tutta la mia semplificazione del procedimento consiste nel fatto che io inizio dalla formula (4), vale a dire calcolo la variazione di $I_1$ direttamente dalla derivata lagrangiana. *La variazione di $I_1$ deve esser nulla se io sostituisco (nella (4)) al posto dei $\delta g^{\mu\nu}$ quelle espressioni che corrispondono alla trasformazione infinitesima (12).* Poiché $g^{\mu\nu}$ è cogrediente rispetto a $dw^\mu dw^\nu$, si trova facilmente che

$$\delta g^{\mu\nu} = \sum_\sigma (g^{\mu\nu}_\sigma p^\sigma - g^{\mu\sigma} p^\nu_\sigma - g^{\nu\sigma} p^\mu_\sigma). \tag{13}$$

Si ha quindi

$$\int \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu} \left( \sum_\sigma g^{\mu\nu}_\sigma p^\sigma - \sum_\sigma g^{\mu\sigma} p^\nu_\sigma - \sum_\sigma g^{\nu\sigma} p^\mu_\sigma \right) d\omega = 0.$$

Qui trasformiamo i termini con $p^\nu_\sigma$, $p^\mu_\sigma$ nel modo noto mediante integrazione per parti, poiché sottoponiamo i $p^\sigma$, altrimenti arbitrari, alla condizione che si annullino ai confini d'integrazione. Otteniamo allora

$$\int \sum_\sigma p^\sigma \left( \sqrt{g} \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_\sigma + 2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \left(\sqrt{g} K_{\mu\sigma} g^{\mu\nu}\right)}{\partial w^\nu} \right) dw^1 ... dw^{IV} = 0$$

e quindi, per l'arbitrarietà dei $p^\sigma$, *le quattro equazioni differenziali soddisfatte dal tensore $K_{\mu\nu}$, ricavate anche da Ella (e da Einstein):*

$$\sqrt{g} \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_\sigma + 2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \left(\sqrt{g} K_{\mu\sigma} g^{\mu\nu}\right)}{\partial w^\nu} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4), \tag{14}$$

che possiamo evidentemente interpretare dicendo: *la divergenza vettoriale del tensore $K_{\mu\nu}$ è nulla.*

Proprio nelle stesso modo si potrà trattare l'integrale $I_2$. Oltre all'incremento (13) di $g^{\mu\nu}$ compare allora ancora solo il seguente incremento di $q_\rho$[1]:

$$\delta q_\rho = \sum_\sigma (q_{\rho\sigma} p^\sigma + q_\sigma p^\sigma_\rho). \tag{15}$$

*Otteniamo così le seguenti quattro equazioni differenziali per $Q_{\mu\nu}$, $Q^\rho$:*

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu} \left( \sqrt{g} Q_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_\sigma + 2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \left( \sqrt{g} Q_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} \right)}{\partial w^\nu} \right) \\ + \sum_\rho \left( \sqrt{g} Q^\rho q_{\rho\sigma} - \frac{\partial \left( \sqrt{g} Q^\rho q_\sigma \right)}{\partial w^\rho} \right) = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\text{per } \sigma = 1, 2, 3, 4.$$

Non è affatto necessario esprimerle ancora in dettaglio a parole. Vale la pena invece di ricordare una trasformazione che esse ammettono data la forma particolare del nostro $Q$ (e che mutatis mutandis appare anche in diversi punti della Sua nota). $Q$ dipende solo dalle differenze $q_{\rho\sigma} - q_{\sigma\rho}$ ed ha quindi, come mostra un'occhiata alla (8), una divergenza scalare nulla:

$$\sum_\rho \frac{\partial \left( \sqrt{g} Q^\rho \right)}{\partial w^\rho} = 0.$$

*Di conseguenza possiamo porre le equazioni differenziali* (16) *nell'altra forma:*

$$\sum_{\mu,\nu} \left( \sqrt{g} Q_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_\sigma + 2 \frac{\partial \left( \sqrt{g} Q_{\mu\sigma} g^{\mu\nu} \right)}{\partial w^\nu} \right) + \sum_\rho \left( \sqrt{g} Q^\rho (q_{\rho\sigma} - q_{\sigma\rho}) \right) = 0, \tag{17}$$

$$\text{per } \sigma = 1, 2, 3, 4.$$

**5.** Ed ora introduco l'ipotesi fondamentale della teoria di Einstein, preferibilmente certo nella forma scelta da Ella nella Sua Nota, che si esprime nel fatto che *la variazione*

$$\delta I_1 + \delta I_2 \tag{18}$$

*dev'esser nulla per $\delta g^{\mu\nu}$, $\delta q_\rho$ arbitrari.*

Ciò fornisce per mezzo delle (4), (5) le ben note 14 "*equazioni di campo*", vale a dire le 10 equazioni:

$$K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0 \tag{19}$$

[1] I miei $\delta g^{\mu\nu}$ (13) e $\delta q_\rho$ (15) non sono altro che le quantità indicate da Ella con $p^{\mu\nu}$ e $p_\rho$ a pag. 4 della Sua nota.

e le 4 equazioni

$$Q^\rho = 0. \tag{20}$$

Ella osserva nella Sua nota, che tra queste 14 equazioni devono esistere 4 relazioni di dipendenza, e mostra a pag. 12 mediante un calcolo specifico, come in particolare le 4 equazioni (20) - le equazioni di Maxwell - si possano derivare dalle 10 equazioni (19). Per me ciò è naturalmente già contenuto nelle formule del numero precedente. Infatti basta soltanto sommare alle equazioni (14) le equazioni (17) moltiplicate per $\alpha$, per riconoscere direttamente che dalle equazioni (19) deriva l'annullarsi dei $Q^\rho$.

Risulta parimenti del tutto chiaro ciò che è stato detto sul carattere delle vecchie equazioni di Maxwell come caso limite della nuova teoria. Quando trattiamo la vecchia teoria di Maxwell in coordinate curvilinee arbitrarie $w^I, ...w^{IV}$, abbiamo sempre a che fare tuttavia con un $ds^2$ la cui curvatura riemanniana è identicamente nulla, per il quale quindi i $K_{\mu\nu}$ sono senz'altro zero. Si assuma d'altronde $\alpha = 0$. *Allora le 10 equazioni (19) sono soddisfatte automaticamente; le componenti dell'energia $Q_{\mu\nu}$ del campo elettromagnetico non sono da esse più sottoposte ad alcun legame.* Non restano che le 4 equazioni (20), vale a dire proprio le equazioni di Maxwell. Come conseguenza di queste i $Q_{\mu\nu}$ per le (16) hanno una divergenza vettoriale nulla.

Certo prima di Einstein noialtri abbiamo introdotto in fisica le coordinate curvilinee $w$ solo in modo tale da trasformare arbitrariamente le tre coordinate spaziali e lasciare invariato $t$. L'introduzione di $t$ nella trasformazione di coordinate appare come un grande contributo di Einstein. L'altro è poi evidentemente quello che si possa tener conto della gravitazione mettendo al posto del $ds^2$ con curvatura riemanniana nulla un $ds^2$ più generale. D'altra parte, e questo è anche da sottolineare, l'attrezzatura matematica per l'elaborazione di queste nuove idee fisiche era già pronta da molto tempo, perché fin dal tempo di Riemann ci sono familiari spazî con un numero arbitrario di dimensioni con elemento d'arco arbitrario. Non è questo il luogo per inserire una digressione storica, che dovrebbe iniziare con i metodi della Mécanique analytique di Lagrange; altrimenti ci sarebbe da parlare soprattutto dei lavori di Beltrami e di Lipschitz.

**6.** Ora, senza usare le equazioni (19), (20), sommerò tra di loro le equazioni (14), (16), dopo aver moltiplicato le seconde per $\alpha$. Si ottengono così per $\sigma = 1, 2, 3, 4$ le identità:

$$\sum_{\mu,\nu} \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu})\, g_\sigma^{\mu\nu} + \sum_\rho \alpha\sqrt{g} Q^\rho q_{\rho\sigma}$$

$$= -2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \left[\sqrt{g}\,(K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} - \alpha\sqrt{g} Q^{\nu} q_{\sigma}\right]}{\partial w^{\nu}}. \tag{21}$$

Moltiplico queste equazioni per $p^{\sigma}$ (dove per $p^{\sigma}$ s'intenda un qualunque vettore cogrediente rispetto a $dw^{\sigma}$) e sommo su $\sigma$. Qui posso, al secondo membro, inserire i $p^{\sigma}$ sotto il simbolo della derivata, pur di aggiungere al primo membro i corrispondenti termini di completamento. Quindi scambierò nel primo membro gli indici $\sigma$ e $\nu$, e inoltre sostituirò a $2g^{\mu\sigma}p^{\nu}_{\sigma}$ la combinazione simmetrica $g^{\mu\sigma}p^{\nu}_{\sigma} + g^{\nu\sigma}p^{\mu}_{\sigma}$, equivalente nel contesto. Si ottiene in tal modo:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu,\nu,\sigma} \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu})\,(g^{\mu\nu}_{\sigma} p^{\sigma} - g^{\mu\sigma} p^{\nu}_{\sigma} - g^{\nu\sigma} p^{\mu}_{\sigma}) \\ &\qquad\qquad + \sum_{\rho,\sigma} \alpha\sqrt{g} Q^{\rho} (q_{\rho\sigma} p^{\sigma} + q_{\sigma} p^{\sigma}_{\rho}) \\ &= -2 \sum_{\mu,\nu,\sigma} \frac{\left\{\partial \left[\sqrt{g}\,(K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} - \alpha\sqrt{g} Q^{\nu} q_{\sigma}\right] p^{\sigma}\right\}}{\partial w^{\nu}}, \end{aligned} \tag{22}$$

che è naturalmente solo un altro modo di scrivere la (21). In considerazione dell'espressione particolare che io ho assunto dall'inizio per il Suo $H$ ($H = K + \alpha Q$), compare ora al primo membro proprio ciò che Ella dà come espressione della divergenza scalare del Suo *vettore dell'energia* $e^{\nu}$ moltiplicato per $\sqrt{g}$ (pag. 8 della Sua nota), ossia

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \sqrt{g} e^{\nu}}{\partial w^{\nu}}.$$

Si deduce che *il Suo vettore dell'energia* $e^{\nu}$ *differisce da*

$$-2 \sum_{\mu,\sigma} \sqrt{g}((K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} + \alpha\sqrt{g} Q^{\nu} q_{\sigma}) p^{\sigma},$$

*solo per un termine la cui divergenza scalare si annulla identicamente.*

Se ora sostituiamo le 14 equazioni (19),(20), $e^{\nu}$ si riduce a questo termine aggiuntivo e il risultato a pag. 8 della Sua nota, che si ha

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \sqrt{g} e^{\nu}}{\partial w^{\nu}} = 0 \tag{23}$$

appare come una identità matematica. Il suddetto risultato non può affatto esser visto come analogo alla legge di conservazione dell'energia, come vale nella meccanica solita. Infatti quando in quest'ultima scriviamo:

$$\frac{d(T + U)}{dt} = 0,$$

questa relazione differenziale non vale identicamente, ma solo in conseguenza delle equazioni differenziali della meccanica.

**7.** Naturalmente sarebbe desiderabile scrivere esplicitamente il termine aggiuntivo, per distinguere il Suo $e^\nu$ dai termini che si annullano in conseguenza delle equazioni di campo. Ma trovo le Sue formule così complicate, che non ho tentato il calcolo. Ora è chiaro che esso comprende delle parti che sono lineari in $p_\sigma$, ed altre, che contengono i $p^\sigma_\mu$, e forse anche parti tali da contenere i $p^\sigma_{\mu\nu}$ linearmente. Non dev'essere proprio difficile scrivere i vettori più generali con forma di questo tipo, la cui divergenza scalare si annulli identicamente. In generale si ottengono vettori a divergenza nulla se si parte da un qualunque esavettore (un tensore antisimmetrico) $\lambda^{\mu\nu}$ e si pone

$$\sqrt{g}X^\nu = \sum_\mu \frac{\partial \lambda^{\mu\nu}}{\partial w^\mu}. \tag{24}$$

Se si vorrà avere linearità degli $X^\nu$ in $p^\sigma$ e in $p^\sigma_\mu$, si potrà per esempio scegliere

$$\lambda^{\mu\nu} = \left( (\sum_\rho g^{\mu\rho} q_\rho) p^\nu - (\sum_\rho g^{\nu\rho} q_\rho) p^\mu \right). \tag{25}$$

**8.** Devo qui aprire una parentesi importante. Ella sa che la sig.na Noether ha continuamente discusso con me dei miei lavori, e che veramente solo per suo tramite io sono stato introdotto alla materia presente. Poiché ho parlato di recente con la sig.na Noether del mio risultato a proposito del Suo vettore dell'energia, ella mi ha potuto comunicare che lei stessa già da un anno ha derivato lo stesso risultato dagli sviluppi della Sua nota (quindi non dai calcoli semplificati del mio n. 4), e che l'aveva allora fissato in un manoscritto (del quale poi ho preso visione); soltanto ella non l'aveva posto in risalto con tanta decisione, come io ho fatto recentemente alla Società Matematica (22 gennaio).

**9.** Infine voglio ancora far notare che per il "teorema di conservazione", come lo ha formulato[2] Einstein nel 1916, vale evidentemente la stessa cosa che per il Suo teorema (23). Egli stesso l'ha espresso in modo completamente chiaro. Non entrerò qui nei dettagli del suo calcolo, ma mi riallaccerò al suo

[2]Vedansi il testo apparso in forma autonoma: I fondamenti della teoria della relatività generale (Lipsia 1916), ed anche specialmente la comunicazione all'Accademia di Berlino del 29 ottobre 1916 "Principio di Hamilton e teoria della relatività generale" (Sitzungsberichte, pp. 1111-1116).

risultato conclusivo, che egli scrive così:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial w^{\nu}}(\mathbf{T}_{\sigma}^{\nu} + \mathbf{t}_{\sigma}^{\nu}) = 0, \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{26}$$

dove egli indica $\mathbf{T}_{\sigma}^{\nu}$ e $\mathbf{t}_{\sigma}^{\nu}$ come le componenti "miste" dell'energia del campo elettromagnetico e rispettivamente del campo gravitazionale. Inoltre egli dimostra che, se si tiene conto delle equazioni di campo, questi $\mathbf{T}_{\sigma}^{\nu} + \mathbf{t}_{\sigma}^{\nu}$ si possono esprimere nel modo seguente mediante una funzione $\mathbf{X}^*$ da lui definita nei dettagli, e indipendente dalle coordinate:

$$\mathbf{T}_{\sigma}^{\nu} + \mathbf{t}_{\sigma}^{\nu} = -\sum_{\mu,\rho} \left( \frac{\partial}{\partial w^{\rho}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial g_{\rho}^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \right) \right), \tag{27}$$

e che per questa $\mathbf{X}^*$ indipendentemente dal valore di $\sigma$ vale l'equazione *identica*:

$$\sum_{\mu,\nu,\rho} \frac{\partial^2}{\partial w^{\nu} \partial w^{\rho}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial g_{\rho}^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \right) = 0. \tag{28}$$

Ciò è esattamente quello che succede qui.

Per esibire la relazione con la notazione da me usata, osservo che i $\mathbf{T}_{\sigma}^{\nu}$ di Einstein sono uguali ai miei $\sum_{\mu} \sqrt{g} Q_{\mu\sigma} g^{\mu\nu}$, ma i $\mathbf{t}_{\sigma}^{\nu}$ di Einstein differiscono dai corrispettivi $\frac{1}{\alpha} \sum_{\mu} \sqrt{g} K_{\mu\sigma} g^{\mu\nu}$ per un addendo che si ottiene confrontando le equazioni (27) con le equazioni di campo

$$K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0.$$

Dopotutto stento a credere che sia conveniente designare le quantità $\mathbf{t}_{\sigma}^{\nu}$, costruite in modo molto arbitrario, come componenti dell'energia del campo gravitazionale. . . . . . . .

## II. Dalla risposta di D. Hilbert.

. . . di fatto concordo totalmente con le Sue considerazioni sul teorema dell'energia: Emmy Noether, il cui aiuto richiesi più di un anno fa per la chiarificazione di alcune questioni di analisi riguardanti il mio teorema dell'energia, ha trovato allora che le componenti dell'energia da me proposte, così come quelle di Einstein, per mezzo delle equazioni differenziali di Lagrange (4) e (5) nella mia prima comunicazione, possono essere trasformate in espressioni la cui divergenza si annulla *identicamente*, vale a dire, senza l'utilizzo delle equazioni di Lagrange (4) e (5). Poiché d'altra parte le equazioni dell'energia della meccanica classica, della teoria dell'elasticità e dell'elettrodinamica sono soddisfatte solo in conseguenza delle equazioni differenziali di Lagrange del problema, è giusto che Ella di conseguenza non veda nelle mie equazioni dell'energia l'analogo delle equazioni dell'energia di quelle teorie. Però io allora affermo che per la relatività generale, vale a dire nel caso dell'invarianza *generale* della funzione di Hamilton, equazioni dell'energia, che corrispondano nel Suo senso a equazioni dell'energia delle teorie con invarianza per trasformazioni ortogonali, non esistono affatto: anzi designerò questa circostanza come un segno caratteristico della teoria della relatività generale. Della mia affermazione si potrebbe portare la dimostrazione matematica.

Ella mi consenta, riguardo a questa circostanza, di esporre in breve come ho trattato nella mia lezione dell'inverno scorso il problema delle equazioni dell'energia delle teorie della fisica invarianti per trasformazioni ortogonali (elettrodinamica, idrodinamica e teoria dell'elasticità).

Prendiamo per brevità come invariante ortogonale la funzione d'universo $H$, che dipenda solo dalle componenti di un tetrapotenziale elettrodinamico $q_s$, e dalle derivate prime $q_{sk}$ di queste rispetto a $w_k$ $(s, l = 1, 2, 3, 4)$ - i metodi valgono ugualmente quand'anche $H$ contenesse la tetradensità $r$ e le sue derivate, o ancora altri parametri fisici con le loro derivate; allora il principio di Hamilton

$$\delta \int H d\omega = 0 \tag{1}$$

conduce al sistema delle quattro equazioni differenziali di Lagrange

$$[H]_s = 0, \qquad (s = 1, 2, 3, 4), \tag{2}$$

dove in generale si è posto

$$[H]_s = \frac{\partial H}{\partial q_s} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{\partial H}{\partial q_{sk}}.$$

Per arrivare alle equazioni dell'energia di questo problema, seguiamo la strada indicata dalle considerazioni della mia prima comunicazione, vale a dire la strada della teoria della gravitazione. Sia $\overline{H}$ un qualunque invariante generale con gli argomenti

$$q_s,\ q_{sl},\ g^{\mu\nu},\ g_l^{\mu\nu},$$

che per

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad g_l^{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

si riduca ad $H$; otteniamo lo stesso risultato se sostituiamo in $H$ al posto di $q_{sl}$ le derivate covarianti

$$\overline{q}_{sl} = q_{sl} - \sum_h \left\{ {s\ l \atop h} \right\} q_h$$

e introduciamo la contrazione con i g$^{\mu\nu}$. Se per esempio $H$ contiene

$$Q = \sum_{m,n} (q_{nm} - q_{mn})^2 = \frac{1}{4} \sum_{m,n} M_{mn}^2, \tag{4}$$

come termine dell'espressione invariante per trasformazioni ortogonali, esso va sostituito con

$$\overline{Q} = \frac{1}{4} \sum_{m,n,k,l} M_{mn} M_{kl} g^{mk} g^{nl}.$$

L'espressione

$$T = \sum_{s,h} q_{sk}^2$$

va trasformata in

$$\overline{T} = \sum_{s,h,m,n} q_{sh} q_{mn} g^{sm} g^{hn}.$$

e così via.

Ora, per ogni invariante generale vale un'identità, che nella mia prima comunicazione (teorema III) è stata dimostrata solo per il caso che l'invariante dipenda da $g^{\mu\nu}$ e dalle sue derivate; ma il procedimento di dimostrazione adottato vale anche per il nostro invariante generale $\overline{H}$. Usando le notazioni della mia prima comunicazione, al posto dell' equazione scritta allora

$$\int P_g(J\sqrt{g}) d\omega = 0$$

otteniamo adesso l'equazione

$$\int \left\{ P_g(\overline{H}\sqrt{g}) + P_q(\overline{H}\sqrt{g}) \right\} d\omega \equiv \int P(\overline{H}\sqrt{g}) d\omega = 0,$$

un'identità, che ha immediatamente come conseguenza

$$\int \left\{ \sum_{\mu,\nu} \left[ \sqrt{g}\overline{H} \right]_{\mu\nu} p^{\mu\nu} + \sum_{\mu} \left[ \sqrt{g}\overline{H} \right]_{\mu} p^{\mu} \right\} d\omega = 0.$$

Introducendo $p^{\mu\nu}$, $p^{\mu}$ e usando l'integrazione per parti è possibile portare l'integrale al primo membro a una forma nella quale l'integrando è moltiplicato per $p^s$; ma poiché $p^s$ è un vettore arbitrario, l'altro fattore sotto il segno d'integrale deve annullarsi identicamente, e quindi si ottengono le identità ($s = 1, 2, 3, 4$):

$$\sum_{\mu,\nu} \left[\sqrt{g}H\right]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu} - 2\sum_m \frac{\partial}{\partial w_m} \left\{ \sum_\mu \left[\sqrt{g}H\right]_{\mu s} g^{\mu m} \right\}$$
$$+ \sum_\mu \left[\sqrt{g}H\right]_\mu q_{\mu s} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial w_\mu} \left( \left[\sqrt{g}H\right]_\mu q_s \right) = 0. \tag{5}$$

Proprio come Ella ha fatto prima notare, queste quattro identità sono parimenti quelle la cui esistenza tra le 14 equazioni di Lagrange del nostro problema è stata affermata nel teorema I da me enunciato.

Se ritorniamo ora al problema originario dell'equazione (1), nella quale eliminiamo i potenziali gravitazionali in conformità alla (3), e teniamo conto delle equazioni differenziali di Lagrange (2), le identità (5) diventano

$$\sum_m \frac{\partial}{\partial w_m} \left\{ \left[\sqrt{g}H\right]_{ms} \right\}_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} = 0; \tag{6}$$

se designamo inoltre le espressioni in parentesi

$$\epsilon_{mn} = 2 \left\{ \left[\sqrt{g}H\right]_{ms} \right\}_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} \tag{7}$$

come le *componenti del tensore dell'energia*, otteniamo nelle equazioni della divergenza (6) le equazioni dell'energia cercate per il problema fisico (1).

Se prendiamo ora in particolare come $H$ l'invariante $Q$ nella (4), gli $\epsilon_{\mu\nu}$ saranno le componenti del noto tensore elettromagnetico dell'energia, e a causa delle equazioni di Maxwell

$$\left\{ \left[\sqrt{g}H\right]_m \right\}_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} = \mathrm{Div}_m M = r_m$$

- con $r$ si intende la tetradensità elettrica - in questo caso le nostre identità (5) danno

$$\mathrm{Div}_s \epsilon - \sum_m r_m q_{ms} + \sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}(r_m q_s) = 0$$

ovvero, poiché Div $r = 0$:

$$\mathrm{Div}_s \epsilon = -r.M$$

vale a dire, esse producono la nota espressione della divergenza per la forza ponderomotrice.

Solo nel caso della relatività generale, ossia quando l'invariante richiesto $H$ è già un invariante generale, la via indicata per costruire le equazioni dell'energia fallisce per il problema (1). In relatività generale abbiamo in sostituzione delle equazioni dell'energia mancanti nel Suo senso, il fatto che le equazioni di Lagrange sono di quattro in soprannumero (teorema I della mia prima comunicazione) come risulta dianzi espresso nelle quattro identità (5). Inversamente il teorema dell'energia delle teorie invarianti per trasformazioni ortogonali appare come un residuo di quelle quattro identità della teoria della gravitazione.

Si noti ancora che il tensore dell'energia (7), non solo, come si vede immediatamente, ha le proprietà di simmetria e di invarianza per trasformazioni ortogonali, ma oltre a ciò soddisfa sempre ai requisiti delle teorie fisiche particolari: così esso, nel caso dell'elettrodinamica, dove $H$ contiene i $q_{sl}$ solo nella combinazione

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks},$$

dipenderà sempre solo da queste componenti dell'esavettore $M$, e d'altra parte nel caso della teoria dell'elasticità dipenderà solo dalle deformazioni proprie, come avviene nei problemi di elasticità. . . . . .

### III. Da una successiva lettera di F. Klein.

. . . Mi preme descrivere ancora da parte mia anche con poche parole la differenza tra la teoria dell'elettrodinamica invariante per trasformazioni ortogonali e quella che prende insieme in considerazione la forza di gravità.

A questo proposito si fa particolare chiarezza quando, come ho suggerito già prima (Nr. 5), si introduce come elemento intermedio il trattamento dell'elettrodinamica classica in coordinate d'universo arbitrarie ("curviline").

La Sua ipotesi fondamentale, che le componenti dell'energia del campo elettromagnetico si rappresentino semplicemente mediante i $Q_{\mu\nu}$, appare allora in primo piano già nel suo pieno significato; io preferirei quindi che oltre a questa ipotesi non ci si appellasse a niente della moderna teoria della gravitazione.

Trovo inoltre vantaggioso tenere separati nella rappresentazione gli integrali $\int K d\omega$ e $\int Q d\omega$, e non fonderli dall'inizio in un unico integrale $\int H d\omega$.

Abbiamo quindi sia per i $K_{\mu\nu}$ che per i $Q_{\mu\nu}$ quattro identità (le equazioni (14) e (16) - ovvero (17) - della mia prima lettera), in totale quindi otto, e la contrapposizione tra la teoria precedente e quella attuale si può allora esprimere con proposizioni precise nel modo seguente:

**1.** In entrambi i casi abbiamo oltre alle otto identità 14 "equazioni di campo".

**2.** Queste nella vecchia teoria si scrivono

$$\text{a)}\;\; K_{\mu\nu} = 0, \qquad \text{b)}\;\; Q^{\rho} = 0.$$

A causa delle dieci equazioni a) le quattro identità (14) sono automaticamente soddisfatte, ma le identità (16) - ovvero (17) - si riducono a causa delle quattro equazioni b) alle quattro asserzioni chiamate le quattro leggi di conservazione (leggi dell'energia e dell'impulso).

**3.** Invece nella nuova teoria si hanno le equazioni di campo

$$\text{a}')\;\; K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0, \;\; \text{con } \alpha \neq 0, \qquad \text{b}')\;\; \mathrm{Q}^{\rho} = 0.$$

Ora le equazioni $Q^{\rho} = 0$, per le otto identità, appaiono come una conseguenza delle dieci equazioni $a')$.

Dalle identità (16) seguono, quando si cancellano i $Q^{\rho}$, ancora come prima, "leggi di conservazione" per i $Q_{\mu\nu}$. Ma queste ora non hanno più significato (fisico) indipendente, perchè, a causa delle dieci equazioni $a')$ si riducono alle quattro identità (14); esse sono quindi già contenute nelle dieci equazioni di campo.

Tutto questo è davvero in completo accordo con le considerazioni della Sua lettera. Tuttavia mi interesserebbe molto vedere l'esecuzione della dimostrazione matematica, che Ella prospetta alla fine del primo capoverso della Sua risposta.

. . . . . . . . .