I fondamenti della fisica[1]

(Prima comunicazione.)

David Hilbert

Presentata nella seduta del 20 novembre 1915.

[1]Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung), Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1915, 395-407.

La grandiosa formulazione del problema da parte di Einstein[1], unitamente ai metodi acuti da lui escogitati per la sua soluzione, i profondi ragionamenti e le costruzioni concettuali originali, mediante le quali Mie[2] ha formulato la sua elettrodinamica, hanno aperto nuove vie alla ricerca sui fondamenti della fisica.

Nel seguito io intendo - nel senso del metodo assiomatico - stabilire sostanzialmente da due semplici assiomi un nuovo sistema di equazioni fondamentali della fisica, che sono di ideale bellezza, e nelle quali, io ritengo, è contenuta contemporaneamente la soluzione dei problemi di Einstein e di Mie. Riservo a successive comunicazioni l'esposizione più precisa e anche soprattutto l'applicazione particolare delle mie equazioni fondamentali alle questioni principali dell'elettromagnetismo.

Siano w_s $(s = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate di qualche sorta che individuano in modo sostanzialmente unico il punto d'universo, ossia i cosiddetti parametri d'universo (le coordinate spazio-temporali più generali). Le quantità che caratterizzano l'evento in w_s siano:

1) i dieci potenziali gravitazionali $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$, introdotti per primo da Einstein, con carattere tensoriale simmetrico rispetto ad una qualunque trasformazione dei parametri d'universo w_s;

2) i quattro potenziali elettrodinamici q_s con carattere vettoriale nello stesso senso.

L'evento fisico non è arbitrario, infatti soddisfa i seguenti due assiomi:

Assioma I (assioma di Mie della funzione d'universo[3]): *La legge degli eventi fisici è determinata da una funzione d'universo H, che contiene i seguenti argomenti*:

$$g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w_l}, \quad g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k}, \tag{1}$$

$$q_s, \quad q_{sl} = \frac{\partial q_s}{\partial w_l}, \qquad (l, k = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

e quindi deve annullarsi la variazione dell'integrale

$$\int H \sqrt{g} d\omega$$

[1]Sitzungsber. d. Berliner Akad. 1914, p. 1030. 1915, pp. 778, 799, 831, 844.

[2]Ann. d. Phys. 1912, **37**, 511; **39**, 1; 1913, **40**, 1

[3]La funzione d'universo di Mie non contiene esattamente questi argomenti; in particolare l'uso dell'argomento (2) risale a Born; tuttavia l'introduzione e l'utilizzo di una tale funzione d'universo nel principio di Hamilton è proprio la caratteristica dell'elettrodinamica di Mie.

$$(g = |g_{\mu\nu}|, \quad d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4)$$

per ognuno dei 14 potenziali $g_{\mu\nu}$, q_s.

Al posto degli argomenti (1) possono comparire evidentemente anche gli argomenti

$$g^{\mu\nu}, \quad g_l^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial w_l}, \quad g_{lk}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k} \tag{3}$$

dove $g^{\mu\nu}$ indica il minore del determinante g corrispondente all'elemento $g_{\mu\nu}$ diviso per g.

Assioma II (Assioma dell'invarianza generale[4]). *La funzione d'universo* H *è un invariante rispetto ad una trasformazione arbitraria dei parametri d'universo* w_s.

L'Assioma II è la più semplice espressione matematica per la richiesta che il legame tra i potenziali $g_{\mu\nu}$, q_s sia di per sé completamente indipendente dal modo in cui il punto d'universo sarà denominato mediante parametri d'universo.

Il motivo conduttore per la costruzione della mia teoria è rappresentato dal seguente teorema matematico, del quale presenterò altrove la dimostrazione.

Teorema I. Se J è un invariante per una qualunque trasformazione dei quattro parametri d'universo, che contenga n quantità e le loro derivate, e a partire da

$$\delta \int J\sqrt{g}d\omega = 0$$

si costruiscono le n equazioni variazionali di Lagrange rispetto a quelle n quantità, sempre in questo sistema invariante di n equazioni differenziali per le n quantità quattro sono conseguenza delle rimanenti $n-4$, nel senso che tra le n equazioni differenziali e le loro derivate totali sono sempre soddisfatte identicamente quattro combinazioni lineari mutuamente indipendenti.

Riguardo alle derivate rispetto a $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$, $g_{kl}^{\mu\nu}$, che compaiono nella (4) e nelle formule successive, va notato una volta per tutte che, a causa della simmetria sia in μ, ν che in k, l, le derivate rispetto a $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$ devono essere moltiplicate per 1 o per 1/2, a seconda che sia $\mu = \nu$ o rispettivamente $\mu \neq \nu$, e inoltre le derivate rispetto a $g_{kl}^{\mu\nu}$ devono essere moltiplicate per 1, oppure

[4] Già Mie ha imposto il requisito di invarianza ortogonale. Nell'Assioma II sopra enunciato l'idea fondamentale di Einstein dell'invarianza generale trova la sua espressione più semplice, sebbene per Einstein il principio di Hamilton rivesta soltanto un ruolo accessorio e le sue funzioni H non siano affatto invarianti generali, e non contengano neanche il potenziale elettrico.

1/2, o ancora 1/4, a seconda che sia $\mu=\nu$ e $k=l$, oppure $\mu=\nu$, $k\neq l$, o ancora $\mu\neq\nu$ e $k\neq l$.

Dall'Assioma I derivano innanzitutto le dieci equazioni differenziali di Lagrange per i dieci potenziali gravitazionali

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}}-\sum_k\frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}}+\sum_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial w_k\partial w_l}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}=0,\quad(\mu,\nu=1,2,3,4)\quad(4)$$

e inoltre le quattro equazioni differenziali di Lagrange per i quattro potenziali elettrodinamici q_s

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_h}-\sum_k\frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{hk}}=0,\quad(h=1,2,3,4).\quad(5)$$

Per brevità indichiamo i primi membri delle equazioni (4), (5) rispettivamente con

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu}\,,\quad[\sqrt{g}H]_h\,.$$

Le equazioni (4) si chiameranno le equazioni fondamentali della gravitazione, le equazioni (5) le equazioni fondamentali elettrodinamiche oppure le equazioni di Maxwell generalizzate. A causa del teorema prima enunciato è possibile considerare le quattro equazioni (5) come una conseguenza delle equazioni (4), cioè per quella legge matematica possiamo affermare direttamente che *nel senso indicato i fenomeni elettrodinamici sono conseguenza della gravitazione.* In questo riconoscimento io scorgo la soluzione semplice e assai sorprendente del problema di Riemann, che per primo ha indagato teoricamente la relazione tra gravitazione e luce.

Nel seguito usiamo il fatto facilmente dimostrabile che, quando p^j $(j=1,2,3,4)$ rappresenta un arbitrario vettore controvariante, l'espressione

$$p^{\mu\nu}=\sum_s(g_s^{\mu\nu}p^s-g^{\mu s}p_s^\nu-g^{\nu s}p_s^\mu),\quad\left(p_s^j=\frac{\partial p^j}{\partial w_s}\right)$$

rappresenta un tensore simmetrico controvariante e l'espressione

$$p_l=\sum(q_{ls}p^s+q_sp_l^s)$$

un vettore covariante.

Enunciamo i due ulteriori teoremi matematici, che si esprimono come segue:

Teorema II. Se J è un invariante dipendente da $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, $g_{lk}^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk}, per tutti gli argomenti e per qualunque vettore controvariante p^s si ha sempre identicamente

$$\sum_{\mu,\nu,l,k}\left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}}\Delta g^{\mu\nu}+\frac{\partial J}{\partial g_l^{\mu\nu}}\Delta g_l^{\mu\nu}+\frac{\partial J}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}}\Delta g_{lk}^{\mu\nu}\right) + \sum_{s,k}\left(\frac{\partial J}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial J}{\partial q_{sk}}\Delta q_{sk}\right)=0$$

dove

$$\begin{aligned}
\Delta g^{\mu\nu} &= \sum_m (g^{\mu m}p_m^\nu + g^{\nu m}p_m^\mu),\\
\Delta g_l^{\mu\nu} &= -\sum_m g_m^{\mu\nu}p_l^m + \frac{\partial \Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l},\\
\Delta g_{lk}^{\mu\nu} &= -\sum_m (g_m^{\mu\nu}p_{lk}^m + g_{lm}^{\mu\nu}p_k^m + g_{km}^{\mu\nu}p_l^m) + \frac{\partial^2 \Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k},\\
\Delta q_s &= -\sum_m q_m p_s^m,\\
\Delta q_{sk} &= -\sum_m q_{sm}p_k^m + \frac{\partial \Delta q_s}{\partial w_k}.
\end{aligned}$$

Questo teorema II può esprimersi anche nel modo seguente:

Se J è un invariante e p^s un vettore arbitrario, come dianzi, vale l'identità

$$\sum_s \frac{\partial J}{\partial w_s}p^s = PJ, \tag{6}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned}
P &= P_g + P_q,\\
P_g &= \sum_{\mu,\nu,l,k}\left(p^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} + p_l^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g_l^{\mu\nu}} + p_{lk}^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}}\right),\\
P_q &= \sum_{l,k}\left(p_l\frac{\partial}{\partial q_l} + p_{lk}\frac{\partial}{\partial q_{lk}}\right)
\end{aligned}$$

e valgono le abbreviazioni:

$$p_k^{\mu\nu} = \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial w_k}, \quad p_{kl}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial w_k \partial w_l}, \quad p_{lk} = \frac{\partial p_l}{\partial w_k}.$$

La dimostrazione della (6) si ottiene facilmente; poiché questa identità è evidentemente corretta quando p^s è un vettore costante, per la sua invarianza essa è valida in generale.

Teorema III. Quando J è un invariante dipendente solo da $g^{\mu\nu}$ e dalle sue derivate e, come sopra, le derivate variazionali di $\sqrt{g}J$ rispetto a $g^{\mu\nu}$ sono indicate con $\left[\sqrt{g}J\right]_{\mu\nu}$, allora l'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\mu,\nu}[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}\,h^{\mu\nu}$$

- con $h^{\mu\nu}$ si è indicato un tensore controvariante qualunque - rappresenta un invariante; se sostituiamo in questa sommatoria al posto di $h^{\mu\nu}$ il tensore particolare $p^{\mu\nu}$ e scriviamo

$$\sum_{\mu,\nu}[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}\,p^{\mu\nu}=\sum_{s,l}(i_s p^s+i_s^l p_l^s),$$

dove le espressioni

$$\begin{aligned} i_s &= \sum_{\mu,\nu}[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}\,g_s^{\mu\nu}, \\ i_s^l &= -2\sum_{\mu}[\sqrt{g}J]_{\mu s}\,g^{\mu l} \end{aligned}$$

dipendono solo da $g^{\mu\nu}$ e dalle sue derivate, si ha

$$i_s=\sum_l\frac{\partial i_s^l}{\partial w_l} \tag{7}$$

in modo che questa equazione sia soddisfatta identicamente per tutti gli argomenti, vale a dire i $g^{\mu\nu}$ e le loro derivate.

Per dimostrarlo consideriamo l'integrale

$$\int J\sqrt{g}d\omega,\qquad d\omega=dw_1dw_2dw_3dw_4$$

esteso a una porzione finita dell'universo tetradimensionale. Si supponga inoltre che p_μ sia un vettore che si annulli, insieme alle sue derivate, sulla superficie tridimensionale che delimita quella porzione d'universo. Per $P=P_g$ dalla formula successiva (α) si ha

$$P_g(\sqrt{g}J)=\sum_s\frac{\partial\sqrt{g}Jp^s}{\partial w_s},$$

che dà

$$\int P_g(\sqrt{g}J)d\omega = 0$$

e per il modo in cui è costruita la derivata lagrangiana si ha anche

$$\int \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu}\, p^{\mu\nu} d\omega = 0.$$

L'introduzione di i_s, i_s^l in questa identità mostra infine che

$$\int \left(\sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial w_l} - i_s \right) p^s d\omega = 0$$

e che quindi l'enunciato del nostro teorema è corretto.

D'ora in poi l'obiettivo principale è la definizione del concetto di energia e la derivazione del teorema dell'energia solo sulla base dei due assiomi I e II.

A questo scopo scriviamo dapprima:

$$P_g(\sqrt{g}H) = \sum_{\mu,\nu,k,l} \left(\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} p_k^{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} p_{kl}^{\mu\nu} \right).$$

D'altra parte $\partial H/\partial g_{kl}^{\mu\nu}$ è un tensore misto del quart'ordine e quindi se si pone

$$A_k^{\mu\nu} = p_k^{\mu\nu} + \sum_\rho \left(\left\{ {k\,\rho \atop \mu} \right\} p^{\rho\nu} + \left\{ {k\,\rho \atop \nu} \right\} p^{\rho\mu} \right),$$

$$\left\{ {k\,\rho \atop \mu} \right\} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\mu\sigma} \left(g_{k\sigma\rho} + g_{\rho\sigma k} - g_{k\rho\sigma} \right),$$

l'espressione

$$a^l = \sum_{\mu,\nu,k} \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} A_k^{\mu\nu} \tag{8}$$

è un vettore controvariante.

Se scriviamo l'espressione

$$P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}a^l}{\partial w_l},$$

essa non contiene più le derivate seconde $p_{kl}^{\mu\nu}$ ed ha quindi la forma

$$\sqrt{g} \sum_{\mu,\nu,k} \left(B_{\mu\nu} p^{\mu\nu} + B_{\mu\nu}^k p_k^{\mu\nu} \right),$$

dove

$$B^k_{\mu\nu} = \sum_{\rho,l} \left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_k} - \frac{\partial}{\partial w_l} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}} - \frac{\partial H}{\partial g^{\rho\nu}_{kl}} \left\{ {l \ \mu \atop \rho} \right\} - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\rho}_{kl}} \left\{ {l \ \nu \atop \rho} \right\} \right)$$

è di nuovo un tensore misto.

Formiamo ora il vettore

$$b^l = \sum_{\mu,\nu} B^l_{\mu\nu} p^{\mu\nu} \tag{9}$$

e otteniamo

$$P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial \sqrt{g}(a^l + b^l)}{\partial w_l} = \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}H]_{\mu\nu}\, p^{\mu\nu}. \tag{10}$$

Se inoltre scriviamo

$$P_q(\sqrt{g}H) = \sum_{k,l} \left(\frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial q_k} p_k + \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial q_{kl}} p_{kl} \right);$$

$\partial H / \partial q_{kl}$ è un tensore e l'espressione

$$c^l = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} p_k \tag{11}$$

rappresenta un vettore controvariante. Come sopra si ottiene

$$P_q(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial \sqrt{g} c^l}{\partial w_l} = \sum_k [\sqrt{g}H]_k\, p_k. \tag{12}$$

Se si tiene conto delle equazioni fondamentali (4) e (5), sommando la (10) e la (12) si ottiene:

$$P(\sqrt{g}H) = \sum_l \frac{\partial \sqrt{g}(a^l + b^l + c^l)}{\partial w_l}.$$

Inoltre si ha

$$P(\sqrt{g}H) = \sqrt{g} PH + H \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} = \sqrt{g} PH + H \sum_s \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial w^s} p^s + \sqrt{g} p^s_s \right)$$

e per l'identità (6)

$$P(\sqrt{g}H) = \sqrt{g} \sum_s \frac{\partial H}{\partial w^s} p^s + H \sum_s \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial w^s} p^s + \sqrt{g} p^s_s \right) = \sum_s \frac{\partial \sqrt{g} H p^s}{\partial w^s}. \tag{α}$$

Si ottiene così infine l'equazione invariante

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial w_l}\sqrt{g}(Hp^l - a^l - b^l - c^l) = 0.$$

Teniamo conto ora che

$$\frac{\partial H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$$

è un tensore controvariante antisimmetrico; quindi

$$d^l = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \left(\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{kl}} \right) p^s q_s \right\} \tag{13}$$

sarà un vettore controvariante, e soddisferà in particolare l'identità

$$\sum_l \frac{\partial\sqrt{g}d^l}{\partial w_l} = 0.$$

Definiamo d'ora innanzi

$$e^l = Hp^l - a^l - b^l - c^l - d^l \tag{14}$$

come *il vettore dell'energia; allora il vettore dell'energia è un vettore controvariante, che dipende ancora linearmente dal vettore arbitrario p^s e che, per ogni scelta di questo vettore p^s, soddisfa identicamente all'equazione invariante dell'energia*

$$\sum_l \frac{\partial\sqrt{g}e^l}{\partial w_l} = 0.$$

Per quanto riguarda la funzione d'universo H, perché la sua scelta sia univoca, è necessario introdurre ulteriori assiomi. Perché le equazioni della gravitazione contengano solo le derivate seconde dei potenziali $g^{\mu\nu}$, H deve avere la forma

$$H = K + L$$

dove K indica l'invariante costruito a partire dal tensore di Riemann (la curvatura della varietà tetradimensionale)

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

$$K_{\mu\nu} = \sum_\kappa \left(\frac{\partial}{\partial w_\nu} \left\{ {\mu\ \kappa \atop \kappa} \right\} - \frac{\partial}{\partial w_\kappa} \left\{ {\mu\ \nu \atop \kappa} \right\} \right) + \sum_{\kappa,\lambda} \left(\left\{ {\mu\ \kappa \atop \lambda} \right\} \left\{ {\lambda\ \nu \atop \kappa} \right\} - \left\{ {\mu\ \nu \atop \lambda} \right\} \left\{ {\lambda\ \kappa \atop \kappa} \right\} \right)$$

ed L dipende solo da $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk}. Infine, facciamo nel seguito ancora l'ipotesi semplificatrice che L non contenga i $g_l^{\mu\nu}$.

Applichiamo ora il teorema II all'invariante L e otteniamo

$$\sum_{\mu,\nu,m} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \left(g^{\mu m} p_m^\nu + g^{\nu m} p_m^\mu\right) - \sum_{s,m} \frac{\partial L}{\partial q_s} q_m p_s^m \\ - \sum_{s,k,m} \frac{\partial L}{\partial q_{sk}} \left(q_{sm} p_k^m + q_{mk} p_s^m + q_m p_{sk}^m\right) = 0. \tag{15}$$

L'annullarsi dei coefficienti di p_{sk}^m al primo membro dà l'equazione

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}}\right) q_m = 0$$

ovvero

$$\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}} = 0, \tag{16}$$

vale a dire le derivate dei potenziali elettrodinamici q_s appaiono solo in coppie del tipo

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}.$$

Pertanto riconosciamo che con le nostre ipotesi l'invariante L dipende oltre che dai potenziali $g^{\mu\nu}$, q_s, solamente dalle componenti del tensore antisimmetrico invariante

$$M = (M_{ks}) = \mathrm{Rot}(q_s),$$

vale a dire dal cosiddetto esavettore elettromagnetico.

Questo risultato, dal quale soltanto dipende il carattere delle equazioni di Maxwell, si ottiene così qui essenzialmente come conseguenza della invarianza generale, ovvero sulla base dell'Assioma II.

Se poniamo uguali a zero i coefficienti di p_m^ν al primo membro dell'identità (15) otteniamo, mediante la (16)

$$2\sum_{\mu} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} q_\nu - \sum_{s} \frac{\partial L}{\partial M_{ms}} M_{\nu s} = 0, \;\; (\mu = 1,2,3,4). \tag{17}$$

Questa equazione permette una importante trasformazione dell'energia elettromagnetica, vale a dire della parte del vettore dell'energia che deriva da L. Questa parte si ottiene infatti dalle (11), la (13) e la (14) nel modo seguente:

$$Lp^l - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_{kl}} p_k - \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \left(\frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{kl}} \right) p^s q_s \right\}.$$

Per la (16) e tenendo conto della (5) questa espressione sarà uguale a

$$\sum_{s,k} \left(L\delta_s^l - \frac{\partial L}{\partial M_{lk}} M_{sk} - \frac{\partial L}{\partial q_l} q_s \right) p^s \quad (\delta_s^l = 0,\ l \neq s;\ \delta_s^s = 1) \tag{18}$$

vale a dire, per la (17), uguale a

$$-\frac{2}{\sqrt{g}} \sum_{\mu,s} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu s}} g^{\mu l} p^s. \tag{19}$$

Per la formula (21) che verrà stabilita successivamente, si vede da qui in particolare che l'energia elettromagnetica e, con essa, anche il vettore complessivo dell'energia e^l si puo' esprimere solo con K, di modo che in esso compaiano solo i $g^{\mu\nu}$ e le loro derivate, ma non i q_s e le loro derivate. Quando nell'espressione (18) si passa al limite per

$$g_{\mu\nu} = 0, \qquad (\mu \neq \nu)$$
$$g_{\mu\mu} = 1$$

essa coincide esattamente con quella che Mie ha formulato nella sua elettrodinamica: *il tensore dell'energia elettromagnetico di Mie non è nient'altro che il tensore generale invariante che si ottiene per derivazione dell'invariante L rispetto ai potenziali gravitazionali $g^{\mu\nu}$ passando al limite anzidetto* - una circostanza che fin dalla prima volta mi ha indicato la necessaria stretta relazione tra la teoria della relatività generale di Einstein e l'elettrodinamica di Mie, e mi ha convinto della correttezza della teoria qui sviluppata.

Rimane ancora da dimostrare direttamente come, con l'ipotesi

$$H = K + L, \tag{20}$$

le equazioni generalizzate di Maxwell (5) prima formulate siano conseguenza delle equazioni della gravitazione (4), nel senso specificato prima.

Mediante l'utilizzo della notazione dianzi introdotta per le derivate variazionali rispetto ai $g^{\mu\nu}$ le equazioni gravitazionali, tenendo conto della (20), assumono la forma

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \tag{21}$$

Il primo termine del primo membro sarà

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Kg_{\mu\nu}),$$

come segue facilmente senza alcun calcolo dal fatto che $K_{\mu\nu}$ è l'unico tensore del secondo ordine, oltre $g_{\mu\nu}$, e che K è l'unico invariante che può venir costruito con i $g^{\mu\nu}$ e le loro derivate prime e seconde $g_k^{\mu\nu}$ e $g_{kl}^{\mu\nu}$.

Le equazioni differenziali della gravitazione così ottenute sono, a me pare, in accordo con la grandiosa teoria della relatività generale esposta da Einstein nelle sue ultime comunicazioni[5].

Se indichiamo inoltre in generale, come sopra, le derivate variazionali di $\sqrt{g}J$ rispetto al potenziale elettrodinamico q_k con

$$[\sqrt{g}J]_h = \frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_{hk}},$$

per la (20) le equazioni elettrodinamiche assumono la forma

$$[\sqrt{g}L]_h = 0. \tag{22}$$

Poiché K è un invariante che dipende solo da $g^{\mu\nu}$ e dalle sue derivate, per il teorema III l'equazione (7), nella quale

$$i_s = \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}K]_{\mu\nu}\, g_s^{\mu\nu} \tag{23}$$

e

$$i_s^l = -2\sum_{\mu} [\sqrt{g}K]_{\mu s}\, g^{\mu l}, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{24}$$

è soddisfatta identicamente.

Per la (21) e la (24) la (19) è uguale a $-(1/\sqrt{g})i_\nu^m$. Derivando rispetto a w_m e sommando su m si ottiene per la (7)

$$\begin{aligned}
i_\nu &= \sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}\left(-\sqrt{g}L\delta_\nu^m + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_\nu + \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}M_{s\nu}\right) \\
&= -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} + \sum_m \left\{q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m}\left([\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\right)\right\} \\
&\qquad + \sum_m q_{\nu m}\left([\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\right) \\
&\quad + \sum_s \left([\sqrt{g}L]_s - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}\right)M_{s\nu} + \sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m},
\end{aligned}$$

[5] l.c. Berliner Sitzungsber. 1915.

poiché

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} = [\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}$$

e

$$-\sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{sm}} = [\sqrt{g}L]_s - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}.$$

Inoltre si tiene conto del fatto che per la (16) si ha

$$\sum_{m,s} \frac{\partial^2}{\partial w_m \partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}} = 0,$$

e si ottiene dopo un opportuno raccoglimento:

$$\begin{aligned} i_{\nu=} - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} &+ \sum_m \left(q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m} [\sqrt{g}L]_m + M_{m\nu} [\sqrt{g}L]_m \right) \\ &+ \sum_m \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} q_{m\nu} + \sum_{s,m} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}. \end{aligned} \tag{25}$$

D'altra parte si ha

$$-\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} = -\sum_{s,m} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{sm}} g_\nu^{sm} - \sum_m \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} q_{m\nu} - \sum_{m,s} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\frac{\partial g_{ms}}{\partial w_\nu}.$$

Il primo termine del secondo membro, per la (20) e la (21), non è nient'altro che i_ν. L'ultimo termine al secondo membro si rivela essere uguale ed opposto all'ultimo termine a secondo membro nella (25); infatti si ha

$$\sum_{s,m} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}} \left(\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}\right) = 0, \tag{26}$$

poiché l'espressione

$$\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu} = \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial w_s \partial w_m} - \frac{\partial^2 q_s}{\partial w_\nu \partial w_m} - \frac{\partial^2 q_m}{\partial w_\nu \partial w_s}$$

è simmetrica in s, m e il primo fattore sotto il segno di sommatoria nella (26) risulta antisimmetrico in s, m.

Dalla (25) risulta quindi l'equazione

$$\sum_m \left(M_{m\nu} [\sqrt{g}L]_m + q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m} [\sqrt{g}L]_m \right) = 0, \tag{27}$$

vale a dire dalle equazioni della gravitazione (4) derivano di fatto le quattro combinazioni lineari tra loro indipendenti (27) delle equazioni elettrodinamiche fondamentali (5) e delle loro derivate prime. *Questa è l'espressione matematica esatta dell'affermazione generale formulata prima sul carattere dell'elettrodinamica come un fenomeno conseguenza della gravitazione.*

Poiché L nella nostra ipotesi non deve dipendere dalle derivate di $g^{\mu\nu}$, L deve essere una funzione di certi quattro invarianti generali, che corrispondono agli invarianti speciali ortogonali introdotti da Mie e dei quali i due più semplici sono questi:

$$Q = \sum_{k,l,m,n} M_{mn} M_{lk} g^{mk} g^{nl}$$

e

$$q = \sum_{k,l} q_k q_l g^{kl}.$$

La proposta per L più semplice e insieme, tenendo conto della struttura di K, la più ovvia, è quella corrispondente all'elettrodinamica di Mie, vale a dire

$$L = \alpha Q + f(q)$$

oppure, seguendo Mie ancor più particolarmente:

$$L = \alpha Q + \beta q^3,$$

dove $f(q)$ è una qualche funzione di q, e α, β indicano delle costanti.

Come si vede, per la costruzione della teoria sono sufficienti, con interpretazione più sensata, le poche semplici ipotesi espresse negli assiomi I e II: con le medesime non solo vengono riformulate le nostre rappresentazioni di tempo, spazio e moto nel senso esposto da Einstein, ma io sono anche dell'idea che, mediante le equazioni fondamentali qui stabilite, otterranno spiegazione i processi più intimi, finora occulti, all'interno dell'atomo, e soprattutto dev'essere in generale possibile una riduzione di tutte le costanti fisiche a costanti matematiche - con ciò infine si avvicina la possibilità che dalla fisica origini, in linea di principio, una scienza del tipo della geometria: certo la gloria più splendida per il metodo assiomatico, che qui, come vediamo, prende al suo servizio i possenti strumenti dell'analisi, vale a dire calcolo delle variazioni e teoria degli invarianti.