Sulla quantizzazione di Sommerfeld e Epstein

*Albert Einstein**

Traduzione di Sandro Graffi[@]

1. *Formulazione a tutt'oggi*

Non sussiste più alcun dubbio sul fatto che per sistemi meccanici periodici ad un grado di libertà la condizione di quantizzazione abbia la forma

$$\int p\, dq = \int p \frac{dq}{dt}\, dt = nh \tag{1}$$

(Sommerfeld e Debye). Qui l'integrale deve essere esteso ad un intero periodo del moto; q denota la coordinata, e p il corrispondente impulso del sistema. Per di più i lavori sulla teoria degli spettri di Sommerfeld dimostrano con certezza che per sistemi con più gradi di libertà si devono introdurre più condizioni di quantizzazione al posto della singola condizione (1), in generale altrettante (ℓ) quante il numero dei gradi di libertà che il sistema possiede. Queste ℓ condizioni sono espresse da Sommerfeld così:

$$\int p_i\, dq_i = n_i h \tag{2}$$

Poichè questa formulazione non è indipendente dalla scelta delle coordinate, essa può sussistere solo per una determinata scelta delle coordinate. Solo se si applica questa scelta, e le q_i sono funzioni periodiche del tempo, il sistema (2) contiene un'affermazione determinata sul moto.

Dobbiamo un ulteriore progresso concettuale a Epstein (e Schwarzschild). Il primo fonda la sua regola per la scelta delle coordinate q_i di Sommerfeld sul teorema di Jacobi, che notoriamente può essere enunciato in questo modo: Sia $H[H(q_i, p_i)]$ l'Hamiltoniana, funzione delle q_i, p_i, t che genera le equazioni canoniche

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{3}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{4}$$

e che - nel caso non contenga il tempo esplicitamente - coincide con la funzione energia;[1] se $J(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è un integrale completo dell'equazione a derivate parziali di Hamilton-Jacobi,

$$H(q_i, \frac{\partial J}{\partial q_i}) = \frac{\partial J}{\partial t} \tag{5}$$

allora la soluzione delle equazioni canoniche ha l'espressione:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{6}$$

* Conferenza tenuta nella seduta dell'11 maggio 1917 della Deutsche Physikalische Gesellschaft (Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft), Vol. 19 (1917), pagg.82-92. Publicato in questa versione su S. Graffi, *Le radici della quantizzazione*, *Quaderni di Fisica Teorica*, Università di Pavia, 1993, ISBN 88-85159-09-5

@ Dipartimento di Matematica, Universita' di Bologna, P. Porta S. Donato 4, Bologna, Italia

1 Infatti in questo caso si ha $\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i = 0$

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i \tag{7}$$

Se H non contiene esplicitamente il tempo, come assumeremo in seguito, la (5) può essere soddisfatta mediante la posizione

$$J = J^* - ht \tag{8}$$

dove h è una costante e J^* non ha più dipendenza esplicita dal tempo t. Pertanto le (5),(6) vengono sostituite dalle equazioni

$$H(q_i, \frac{\partial J^*}{\partial q_i}) = h \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial \alpha_i} &= \beta_i \\ \frac{\partial J^*}{\partial h} &= t - t_0 \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial q_i} = p_i \tag{7a}$$

dove tuttavia la prima delle equazioni (6a) rappresenta ora $\ell - 1$ equazioni, e dove al posto di α_n va sostituita la costante h e al posto di β_n la costante $-t_0$.

Secondo il procedimento di EPSTEIN si devono ora scegliere le coordinate q_i in modo tale che esista un integrale completo della (5a) della forma

$$J^* = \sum_i J_i(q_i) \tag{8a}$$

dove J_i dipende da q_i ma non dai rimanenti q. Le condizioni di quantizzazione di SOMMERFELD (2) devono pertanto valere per queste coordinate, nel caso in cui le q_i siano funzioni periodiche di t.

A causa dei grandi successi conseguiti dall'estensione di SOMMERFELD-EPSTEIN della quantizzazione a sistemi con più gradi di libertà, rimane tuttavia non soddisfacente il fatto che essa sia applicabile solo mediante separazione delle variabili, ciò che non ha nulla a che fare con il problema della quantizzazione. Nel seguito verrà descritta una piccola modificazione della condizione di SOMMERFELD–EPSTEIN, che evita questo inconveniente. Ne accennerò qui i concetti basilari per poi svolgerli più da vicino in quanto seguirà.

2. Formulazione modificata

Mentre pdq è un invariante, cioè è indipendente dalla scelta della coordinata q, nei sistemi ad un grado di libertà, nei sistemi a più gradi di libertà i singoli prodotti $p_i dq_i$ non sono invarianti; pertanto la condizione di quantizzazione (2) non possiede alcun significato invariante. Invariante è solo la somma $\sum_i p_i dq_i$ estesa a tutti gli ℓ gradi di libertà. Per dedurre ora da questa somma una pluralità di condizioni di quantizzazione invarianti, si può procedere nel modo seguente. Si considerino i p_i come funzione dei q_i. Detto geometricamente si può allora considerare p_i come un vettore (di carattere "covariante") nello spazio $\ell-$ dimensionale delle q_i. Se si traccia nello spazio delle q_i una qualsiasi curva chiusa, che non è affatto detto che debba coincidere con una "traiettoria" del sistema meccanico, allora l'integrale

$$\int \sum_i p_i dq_i \tag{9}$$

esteso a tale curva è un invariante. Se le p_i sono funzioni qualsivoglia delle q_i, allora in generale ad ogni curva chiusa corrisponde un valore diverso dell'integrale (9). Se invece il vettore p_i deriva da un potenziale, cioè se valgono le relazioni:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 \tag{10}$$

e, rispettivamente,

$$p_i = \frac{\partial J^*}{\partial q_i} \tag{10a}$$

allora l'integrale (9) assume lo stesso valore su tutte le curve chiuse che possono essere ricondotte l'una all'altra in modo continuo. Pertanto l'integrale (9) si annulla su tutte le curve che possono essere ridotte ad un punto mediante una deformazione continua. Se tuttavia lo spazio delle q_i da considerare ammette connessione multipla, allora esistono curve chiuse che non possono essere ridotte ad un punto mediante deformazioni continue; se pertanto J^* non è una funzione univoca (ma ad infiniti valori) delle q_i, allora l'integrale (9) sarà in generale diverso da zero per una tale curva. Ci sarà tuttavia un numero finito di curve chiuse nello spazio q alle quali si possono ridurre mediante deformazione continua tutte le curve chiuse nello spazio. In questo senso è pertanto possibile prescrivere un numero finito di condizioni

$$\int \sum_i p_i dq_i = n_i h \tag{11}$$

come condizioni di quantizzazione. Secondo la mia opinione queste condizioni devono essere sostituite alle condizioni di quantizzazione (2). Dovremo aspettarci che il numero di equazioni (10), che non si lasciano ridurre l'una all'altra, sia uguale al numero di gradi di libertà del sistema. Se è minore, incontreremo un caso di "degenerazione".

L'idea guida fin qui delineata (in modo intenzionalmente incompleto) sarà ora esposta in modo un pò più dettagliato.

3. Derivazione immediata dell'equazione differenziale di Hamilton-Jacobi

Dato un punto P nello spazio delle coordinate, se sono note le sue coordinate Q_i e le corrispondenti velocità, cioè i corrispondenti impulsi P_i, allora il moto è completamente determinato[2] attraverso le equazioni canoniche (3) e (4). Allora ad ogni punto della traiettoria L corrisponde una determinata velocità, cioè su L le p_i sono determinate in funzione delle q_i. Se ci si immagina che in ogni punto P su una "superficie" $\ell - 1-$dimensionale dello spazio delle coordinate siano dati i medesimi corrispondenti P_i, Q_i, allora ad ognuno dei punti corrisponde un moto con una traiettoria L nello spazio delle coordinate. Se i P_i sulla superficie sono funzioni continue delle Q_i, queste traiettorie riempiranno in modo continuo lo spazio delle coordinate (od una sua parte). Per ogni punto (q_i) dello spazio delle coordinate passerà una determinata traiettoria; quindi a questo punto corrisponderanno anche ben determinate coordinate di impulso p_i. Ci proponiamo ora il compito di stabilire la legge di questo campo vettoriale.

Se consideriamo le p_i come funzioni delle q_i nel sistema di equazioni canoniche (3) dobbiamo sostituire i primi membri con

$$\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}$$

[2] Si ammetta che H non dipenda esplicitamente dal tempo t.

che a loro volta diventano, per le (4)

$$\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Otteniamo quindi al posto di (3)

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \tag{12}$$

Questo è un sistema di ℓ equazioni differenziali lineari che le p_k devono soddisfare in funzione delle q_k.

Ci chiediamo ora se ci sono campi vettoriali di questo tipo per cui esiste un potenziale J^*, cioè per cui le condizioni (10) e (10a) sono soddisfatte. In questo caso a causa di (10) la (12) prende la forma:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \tag{12a}$$

Questa equazione significa che H non dipende dalle q_i. Esistono dunque campi potenziali del tipo cercato, ed il loro potenziale J^* soddisfa l'equazione di HAMILTON-JACOBI (5a), e corrispondentemente J l'equazione (5).

Con ciò si è dimostrato che le equazioni (3) possono essere sostituite dalle (7a) e (5a) o dalle (7) e (5), rispettivamente. Vogliamo inoltre dimostrare come il sistema (4) sia soddisfatto attraverso le (6a) o le (6), rispettivamente, anche se questo non ha importanza per le considerazioni successive. Una volta espresse le p_i in funzione delle q_i, in virtù della (7a), per integrazione della (5a), le equazioni (4) formano un sistema di equazioni differenziali totali per la determinazione delle q_i in funzione del tempo. Per la teoria delle equazioni differenzaili del primo ordine questo sistema di equazioni differenziali totali è equivalente alla equazione alle derivate parziali

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{13}$$

Quest'ultima tuttavia è soddisfatta da

$$\varphi = \frac{\partial J^*}{\partial \alpha_i}$$

nel caso in cui J sia un integrale completo della (5). Se si pone cioè questo valore della φ nel primo membro della (13) si ottiene, in considerazione della (7):

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial (\frac{\partial J}{\partial q_k})} \frac{\partial^2 J}{\partial q_k \partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \alpha_i}$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \{H(q_k, \frac{\partial J}{\partial q_k}) + \frac{\partial J}{\partial t}\}$$

le quali grandezze si annullano a causa di (5). Da ciò segue che le equazioni (4) sono integrate mediante le (6) o le (6a), rispettivamente.

4. Il campo delle p_i di una singola traiettoria

Arriviamo ora ad un punto del tutto essenziale, sul quale ho intenzionalmente taciuto nella precedente schematizzazione delle idee guida nel n.2. Tramite le considerazioni del n.3 abbiamo pensato il campo come generato attraverso infiniti moti distinti $\ell - 1$ dimensionali, che erano descritti da altrettante traiettorie nello soazio delle coordinate. Ora consideriamo invece il moto imperturbato di un singolo sistema percorso in un tempo infinito e immaginiamo tracciata nello spazio delle coordinate la traiettoria corrispondente. Qui si possono verificare due casi:

Esiste una parte [sottoinsieme] dello spazio delle coordinate tale che la traiettori a, nel corso del tempo, passa arbitrariamente vicino a ciascun punto di questo sottoinsieme ($\ell-$dimensionale).

La traiettori a si può interamente rinchiudere in un continuo di dimensione minore di ℓ. A ciò appartengono come casi particolari tutti i moti che danno origine a traiettori e chiuse.

Il caso 1 è quello più generale; i casi 2 possono verificarsi per specializzazione di 1. Consideriamo come esempio di 1 il moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza centrale, descritto attraverso due coordinate che determinano la posizione nel piano del moto (ad es., le coordinate polari r e φ). Il caso 2 si verifica, per esempio, se la legge di attrazione è esattamente proporzionale a $\frac{1}{r^2}$, e se si trascurano le correzioni al moto kepleriano richieste dalla teoria della relatività; la traiettori a è allora chiusa, ed i suoi punti formano un continuo di solamente una dimensione. Anche se considerato nello spazio tridimensionale il moto centrale è sempre un moto di tipo 2, dato che la traiettori a può essere rinchiusa in un continuo bidimensionale; in certe considerazioni tridimensionali occorre considerare il moto centrale come caso particolare di un moto definito da una legge di forza complicata (per esempio il moto studiato da Epstein nella teoria dell'effetto Stark).

L'osservazione seguente si riferisce al caso generale 1. Si prenda in considerazione un elemento $d\tau$ dello spazio delle coordinate . La traiettori a del movimento considerato vi passa attraverso infinite volte. Ad ogni tale attraversamento corrisponde un sistema di impulsi (p_i). A priori sono possibili due tipi di traiettori e, che si distinguono l'uno dall'altro per una differenza fondamentale. Tipo a): i sistemi delle p_i si ripetono, cosicchè solo un numero finito di sistemi p_i appartiene a $d\tau$. In questo caso i p_i si possono rappresentare come funzioni uni- o plurivoche delle q_i per il processo di moto considerato.

Tipo b): compaiono infiniti sistemi p_i al posto considerato. In questo caso le p_i non si possono esprimere come funzioni delle q_i.

Si osserva immediatamente che il tipo b) esclude l'applicabilità della condizione di quantizzazione (11) formulata nel n.2. D'altra parte la meccanica statistica classica si riferisce essenzialmente solo al tipo b); infatti solo in questo caso l'insieme microcanonico è equivalente alla media temporale relativa ad un sistema.[3]

Riassumendo possiamo dire: l'applicazione della condizione (11) richiede che esistano traiettori e di tal fatta, che la singola traiettori a determini un campo p_i per cui esiste un potenziale J^*.

5. Lo "spazo delle coordinate razionale"

È già stato osservato che in generale le p_i sono funzioni a più valori delle q_i. Consideriamo ancora come semplice esempio il moto piano di un punto sotto l'attrazione di un centro fisso. Il punto si muove in modo tale che la sua distanza r dal centro di attrazione oscilla periodicamente fra un valore minimo r_1 e un valore massimo r_2. Se si considera ora un punto dello spazio delle coordinate , cioè un punto che giace nella superficie anulare limitata dalle due circonferenze di raggi r_1 e r_2, la traiettori a gli passerà vicino infinite volte nel corso del tempo oppure - detto un pò meno precisamente - lo riattraverserà. Ma ogni volta che l'attraversamento ha luogo su su un arco di r crescente o su un arco di r decrescente, la componente

[3] Nell'insieme microcanonico sono presenti sistemi che per ogni dato q_i ammettono ogni dato p_i (compatibili con il valore dell'energia).

radiale della velocità ha un segno differente; le p_i sono funzioni a più valori delle q_i.

La scomodità di rappresentazione che ne consegue si risolve al meglio attraverso il noto metodo introdotto da Riemann in teoria delle funzioni. Immaginiamo la superficie anulare raddoppiata, in modo tale da avere due fogli congruenti a forma di anello circolare che giacciono l'uno sull'altro. Nell'anello superiore immaginiamo tracciato l'arco di traiettori a con $\dot{r}$ positivo accanto al corrispondente sistema dei p_i, e in quello inferiore l'arco di traiettori a con $\dot{r}$ negativo. In ambedue le circonferenze immaginiamo collegati ambedue i fogli, poichè il moto deve passare dall'uno all'altro anello circolare appena la traiettoria tocca una delle due circonferenze. Lungo queste circonferenze i p_i di ambedue i fogli coincidono, come si vede facilmente. Sulla superficie doppia i p_i hanno dunque l'interpretazione di funzioni delle q_i non solo continue, ma anche univoche; qui sta la sua importanza.

Sulla superficie doppia ci sono chiaramente due tipi di curve chiuse, che si possono ridurre ad un punto tramite deformazione continua, ma non si possono ricondurre l'una all'altra. La fig. 1 sottostante mostra un esempio per ciascuno di questi due tipi (L_1 e L_2); le parti di una linea che giacciono sul foglio inferiore sono quelle punteggiate. Tutte le altre curve chiuse si possono, tramite deformazione continua nella sueprficie doppia, o contrarsi in un punto oppure essere ricondotte ad uno o più percorsi dei tipi L_1 e L_2. La condizione di quantizzazione (11) dovrebbe qui essere applicata ad ambedue i tipi L_1 e L_2.

È chiaro che queste considerazioni si generalizzano a tutti i moti che soddisfano la condizione del n.4. Si deve immaginare lo spazio delle fasi in esame suddiviso in "tratti", che si connettono lungo superficie $\ell - 1-$ dimensionali, in modo tale che i p_i, interpretati nella rappresentazione che ne risulta, siano funzioni univoche e continue (anche all'atto della transizione da un tratto all'altro); denoteremo questa costruzione geometrica ausiliaria con il termine di "spazio delle fasi razionale". La condizione di quantizzazione (11) deve essere riferita a tutte le linee chiuse nello spazio delle fasi razionale.

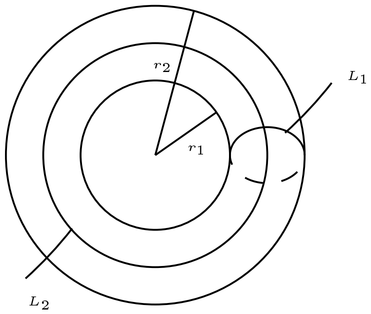

Fig.1

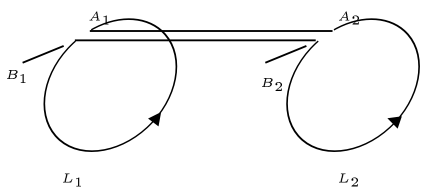

Fig 2

Affinchè la quantizzazione in questa forma possegga un significato preciso l'integrale $\int \sum p_i dq_i$ deve assumere lo stesso valore se esteso a tutte le curve chiuse dello spazio delle coordinate razionale che possono essere ricondotte l'una all'altra con continuità. La dimostrazione si basa completamente sullo schema che ora esporremo.

Siano (si veda la schematizzazione nella Fig.2) L_1 e L_2 curve chiuse nello spazio delle coordinate razionale che possono essere ricondotte l'una all'altra con continuità mantenendo il verso di percorrenza. Pertanto il percorso indicato in figura è una curva chiusa contrattibile in un punto con continuità. Da ciò segue, a causa di (10), che l'integrale esteso a questo percorso si annulla. Se si tiene inoltre in considerazione il fatto che gli integrali estesi alle due linee di collegamento infinitamente avvicinabili $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ sono uguali a causa dell'univocità delle p_i nello spazio delle coordinate razionale, ne consegue l'uguaglianza degli integrali estesi a L_1 e L_2.

Il potenziale J^* è una funzione ad infiniti valori anche nello spazio delle coordinate razionale; tuttavia a causa della quantizzazione questa multivocità è la più semplice immaginabile. Se infatti J^* è un valore del potenziale che corrisponde ad un punto dello spazio delle coordinate razionale, tutti gli altri sono $J^* + nh$, dove n è un numero intero.

[*Aggiunta in correzione* Un'ulteriore riflessione fa concludere che la seconda dlle condizioni indicate nel n.4 per l'applicabilità della formula (11) deve sempre essere automaticamente soddisfatta. Vale cioè l'affermazione: Se un moto genera un campo p_i, allora quest'ultimo possiede necessariamente un potenziale J^*.]

Per il teorema di JACOBI ogni moto del sistema può essere derivato da un integrale completo J^* della (5a). Esiste dunque in ogni caso almeno una funzione J^* delle q_i a partire dalla quale si possono calcolare, in base alle equazioni

$$p_i = \frac{\partial J^*}{\partial q_i}$$

gli impulsi p_i del moto considerato di un sistema per ciascun punto della sua traiettori a.

Dobbiamo ora ricordarci che J^* è stato ottenuto per integrazione di una equazione differenziale alle derivate parziali, cioè mediante una prescrizione di come la funzione J^* deve essere continuata nello spazio delle coordinate . Se, dato un sistema, vogliamo sapere anche come J^* si comporta nel corso del moto, dobbiamo immaginare J^* continuata lungo la traiettori a (anzi, in un suo intorno) per mezzo dell'equazione differenziale. Ora, quando il moto, trascorso un certo tempo (molto lungo) ritorna molto vicino ad un punto P per il quale la traiettori a era esattamente passata prima, la derivata $\frac{\partial J^*}{\partial q_i}$ fornisce le coordinate d'impulso per ambedue i tempi, qualora abbiamo continuato ad integrare J^* lungo l'intero intervallo della traiettori a. Non ci si deve minimamente aspettare che dopo questa continuazione si ritorni ai valori precedenti delle $\frac{\partial J^*}{\partial q_i}$; in generale ci si deve piuttosto aspettare che ogni qual volta che il sistema di coordinate q_i preso in considerazione venga riavvicinato nel corso del moto, si ottenga un sistema di p_i totalmente differente, cosicchè sarà in generale impossibile esprimere le p_i in funzione delle q_i nel moto indefinitamente continuato. Quando tuttavia le p_i - o rispettivamnte un numero finito di valori numerici di queste grandezze - si ripetono al ritorno della configurazione delle coordinate, allora è possibile esprimere $\frac{\partial J^*}{\partial q_i}$ per il moto indefinitamente continuato. Se dunque esiste per il moto indefinitamente continuato un campo delle p_i, allora esiste sempre un corrispondente potenziale J^*.

Possiamo dunque affermare quanto segue: se esistono ℓ integrali delle 2ℓ equazioni del moto della forma:

$$R_k(q_i, p_i) = cost, \tag{14}$$

dove le R_k sono funzioni algebriche delle p_i, allora $\sum p_i dq_i$ è sempre un differenziale esatto, se si immaginano le p_i espresse in funzione delle q_i tramite la (14). La condizione di quantizzazione ci dice che l'integrale $\int \sum p_i dq_i$ esteso ad una curva irriducibile deve essere un multiplo di h. Questa condizione di quantizzazione coincide con quella di SOMMERFELD–EPSTEIN nel caso particolare in cui ciascuna delle p_i dipenda solo dalla corrispondente q_i.

Se esistono meno di ℓ integrali del tipo (14), come dimostrato da POINCARÉ nel caso del Problema dei tre corpi, le p_i non sono esprimibili attraverso le q_i, e la condizione di quantizzazione di SOMMERFELD–EPSTEIN viene a mancare, anche nella forma in qualche misura generalizzata qui ottenuta.