Il vuoto e la cicloide: Torricelli e Pascal

Giovanni Gallavotti
Fisica, Università "La Sapienza", Roma
giovanni.gallavotti@roma1.infn.it

Sommario

Le implicazioni fisiche del vuoto torricelliano conducono Pascal, 1647, a una disputa con il gesuita E.Noël sulla natura del vuoto, fra la Fisica aristotelica e la Fisica moderna, e ad esprimere lusinghieri riconoscimenti a Torricelli. Dopo un decennio, in relazione alla natura dell'infinito matematico e alle applicazioni del metodo degli indivisibili, Pascal da estimatore di Torricelli è ormai (1659) suo accusatore di plagio verso il matematico P.Roberval. Una breve storia che coinvolge anche altri, tra cui Fermat, Descartes e Wallis.

1 "*Expériences nouvelles...*" 1
2 "Disputa sul vuoto" 5
3 "*Le plein du vide*" 12
4 "Fine della disputa; Torricelli" 15
5 "Cicloide: Torricelli, Roberval e Pascal" 17
6 "*Histoire de la Roulette*, Wallis e Dati" 24
7 "Il *paralogismo* sul $\frac{11}{18}$" 29
8 "Appendices" 33
A "Analisi della cicloide in forma moderna" 33
B "Quadratura della parabola per indivisibili (Torricelli)" 35
C "Quadratura della cicloide per indivisibili (Torricelli)" 37
D "Quadratura della cicloide per indivisibili (Roberval)" 38
E "Quadratura della parabola per indivisibili (Roberval)" 39

1 "Experiences nouvelles".

Nel 1644 grazie al matematico M.Mersenne, padre minimo, giunge a Parigi e poi a Rouen, notizia di un esperimento "eseguito in Italia" e Pascal lo riprende

(1646). In quel momento Pascal ha già raggiunto notorietà per contributi alla matematica (sulle coniche, 1640) e al calcolo automatico (progetto e costruzione di una "macchina aritmetica", ossia di una calcolatrice, 1642) e dal 1635 partecipa alle riunioni dell'*Académie* di Mersenne, [25].

La notizia dell'esperienza "*venue d'Italie*" e apparentemente trasmessa senza indicare il nome del suo autore, fornisce a Pascal l'occasione per dedicare alla Fisica dei fluidi una parte importante della sua attività documentata dal 1646 al 1651.[1]

Torricelli aveva osservato che una provetta più lunga di 76cm riempita di mercurio, se rovesciata su una conca anch'essa ripiena di mercurio, non si svuota: ma il livello del mercurio scende fermandosi a un'altezza di $\sim$ 76cm, lasciando vuota la parte superiore della provetta.

Ripetuto l'esperimento originale,[2] in collaborazione con il funzionario e fisico P.Petit intorno al giugno 1646, [28, p.366], Pascal lo perfezionò e arricchì, in vari modi, riportando i risultati nell'opuscolo «*Nouvelles expériences touchant le vide*», (1647), [27, p.1-8], che è in realtà solo una sua rapida descrizione degli esperimenti, preliminare annuncio di un futuro "*Traité de l'équilibre des liqueurs*" (che però apparirà postumo).

Sono 8 esperienze ispirate dalla scoperta "*venue d'Italie*"; una interpretazione dettagliata degli esperimenti verrà in seguito (1651, [27, p.138]). E l'esperimento sarà sviluppato con nuovi risultati (ad esempio da R.Boyle, [27]), e arricchito anche di altri inseriti nel quadro di applicazioni fisico-matematiche in studi medico-biologici sulla circolazione dei fluidi corporei, [29, p.155]).

Ritenendo che potrà, grazie all'analisi degli esperimenti che illustrerà in una pubblicazione organica, che nessuna materia conosciuta riempie gli spazi apparentemente lasciati vuoti, dal mercurio o dall'acqua, nelle esperienze considerate, dirà: *C'est pourquoi je dirai du vide véritable ce que j'ai montrè*

[1] In Europa molta attenzione era in realtà rivolta da molti a questioni sui fluidi, e al peso dell'aria: fra cui i fisici G.Galilei, I.Beekman (Olanda), G.B.Baliani (Genova), ..., culminanti nell'invenzione del barometro da parte di Torricelli, cfr. lettera del 11 giugno 1644 al matematico (e cardinale) M.Ricci [23, p.186]: *Le accennai già, che si stava facendo non so che esperienza filosofica intorno al vacuo, non per far semplicemente il vacuo ma per far uno strumento, che mostrasse le mutazioni dell'aria hora più grave e grossa, et hora più leggera e sottile*; a cui segue anche Pascal, [27, p.132,148].

[2] Cosa già tentata ma non riuscita qualche tempo prima a Mersenne

du vide apparent, et je tiendrai pour vraies les maximes posés ci-dessus, et énoncées du vide absolu comme elles l'ont été de l'apparent, savoir en cette sorte.[3]

Dopo le conclusioni ("*maximes*") suggeritegli dagli esperimenti, che conta di presentare nel futuro trattato, elenca cinque note obiezioni all'esistenza del vuoto alle quali considera di poter rispondere, [27, p.7,8], e cui darà risposta nel futuro trattato, del quale l'opuscolo è un "*abrégè*".

Quindi l'identificazione del *vuoto apparente* con il *vuoto vero* deve essere considerata un'abbreviazione di un riferimento alle "conclusioni presentate" (*maximes posés ci-dessus*); ma, ove intesa letteralmente come identità, influenzerà profondamente la discussione successiva.

Alla pubblicazione delle "*Nouvelles...*", avvenuta l'8 ottobre 1647, seguì *dopo* circa un mese l'identificazione del peso dell'aria sulla conca di liquido (mercurio o acqua) come responsabile del fenomeno barometrico, descrivendo l'esperienza che chiama del "*vide dans le vide*", eseguita "poco prima" con il giurista (e cognato) F.Périer. È questa l'esperienza di Torricelli svolta ponendo la provetta dentro un contenitore all'interno del quale si possa variare la pressione dell'aria osservando le corrispondenti variazioni del livello del mercurio, [27, p.139] (già proposta da Torricelli nella lettera a M.Ricci del 28 giugno 1644, [23, p.85]). Tuttavia nelle "*Nouvelles ..*" non vi è cenno a questa esperienza.

Avendo così raggiunto la convinzione sul ruolo determinante del peso dell'aria, Pascal propose a F.Périer di misurare l'altezza della colonnina di mercurio in due località di diversa altezza relativa, e precisamente nella città di Clermont e sul vicino Puy-de-Dôme, con un dislivello di $\sim$ 1000m, e verificare la dipendenza del peso dell'aria dall'altezza: e inviò formalmente richiesta, il 15 novembre 1647, [27, p.138].

È opportuno menzionare come sia sorprendente che invece pochi giorni prima, nelle "*Nouvelles ...*", non sia menzionata l'ipotesi della responsabilità del peso dell'aria sul fenomeno!

La vicinanza temporale fra le *Nouvelles...* (8 ottobre 1647) e la successiva richiesta (15 novembre 1647) di esecuzione dell'esperienza del Puy de Dôme fa pensare che per Pascal l'ipotesi del ruolo del peso dell'aria possa

[3]La questione del vuoto ha una lunga storia, si veda ad esempio un contemporaneo detto di Galileo "*Se il vacuo non si può conscere né col senso né coll'intelletto, come avete fatto voi a saper che non si dia?*", [13, vol.3_1,p.350], o anche Erone in [11].

aver avuto origine solo nel mese fra le due date, dopo la pubblicazione delle "*Nouvelles...*", a seguito di nuove informazioni sul fenomeno di Torricelli.

Ad esempio è possibile che Pascal possa essere stato influenzato da Descartes, incontrato in questo periodo, [31, p.84], il quale venuto a conoscenza dell'esperimento di Torricelli aveva considerato, nel settembre 1647, il ruolo del peso dell'aria, [1] [4], [31, p.154], raccomandando (a vari frequentatori dell'*Académie* di Mersenne) di verificare la dipendenza del livello del mercurio dall'elevazione; o dal gesuita E.Noêl, che nella disputa con Pascal, interamente svoltasi proprio in questo intervallo di tempo, attribuiva al peso dell'aria alcuni fenomeni descritti nelle *Nouvelles..*, [27, p.25].

Si comprende quanto le date possano influire sulla priorità dell'idea sul ruolo del peso dell'aria, e sulla invenzione del barometro, che dipende, almeno per quel che concerne gli accademici di Parigi, dalle date citate ma talvolta poste in dubbio, [31].[5] Anche altri sostengono di aver proposto la pressione dell'aria quale causa del fenomeno e la relativa esperienza, [31]: ad esempio Descartes sostiene, ad es. nella lettera al matematico P.Carcavi del 17 agosto 1649, di aver suggerito l'esperienza: *c'est moi qui l'avois prié, il y a deux ans, de la vouloir faire, et je l'avois assuré du succès, comme étant entièrement conforme à mes principes, sans quoi il n'eût eu garde d'y penser, à cause qu'il étoit d'opinion contraire.*, [9, Vol.10,p.351]. O anche Auzout, [3, v.2, p.330].

Tuttavia il ritardo del riferimento al peso dell'aria può anche essere ascrit-

[4]Qui è un'accurata analisi sull'originalità e sul contributo di Pascal in confronto a quello di Descartes e altri: pur dedicando minor attenzione al ruolo di Torricelli.

[5]In proposito, già Torricelli, nella descrizione a M.Ricci dell'esperimento, nel giugno 1644, [23, p.186], aveva ipotizzato che la pressione dell'aria diminuisse con l'altezza, attribuendo questo alla sua maggiore "purificazione", e aveva pensato di utilizzare il fenomeno per *far uno strumento, che mostrasse le mutazioni dell'aria, hora più grave e grossa, et hor più leggera e sottile*; e ne aveva anche notato la variazione con il clima, ossia con la temperatura: *la mia intenzione principale poi non è potuta riuscire, cioè di conoscere quando l'aria fosse più grossa, e grave, e quando più sottile e leggiera con lo strumento EC,* [le lettere si riferiscono a una figura nella lettera]*, perché il livello AB si muta per un'altra causa, che io non credeva mai, cioè per il caldo, e freddo, e molto sensibilmente, appunto come se il vaso AE fusse pieno d'aria*, c.f.r. anche [6, p.21]. Per una storia del barometro cfr. [21]: in cui però un passo di Galileo, [13, vol.4,p.167], "*Né si maravigli alcuno che tutta l'aria non pesi niente, perché il simile è dell'acqua*" è (incorrettamente) interpretato attribuendogli di sostenere l'assenza di peso dell'aria, e dicendo "This seems to have been one of Galileo's blind spots", [21, p.12].

to alla prudenza che Pascal richiede, ad esempio nella lettera a Noël, [27, p.12], che sia sempre seguita come *règle universelle* nell'esprimere giudizi: cioè non ci sia alcun modo per i sensi o la ragione di dubitarne, ovvero si deducano come conseguenza infallibile e necessaria da principi la cui certezza implica quella delle conseguenze.

La tesi della cautela di Pascal su questo punto è stata sostenuta con vigore da molti, *e.g.* [1], mentre è anche stato sostenuto il suo ritardo sulla comprensione del fenomeno torricelliano, *e.g.* [31].

Infine l'esperienza, richiesta da Pascal, fu eseguita nel settembre 1648 ($\sim$10 mesi dopo) confermando che l'altezza residua del mercurio, nella provetta di Torricelli, misurata sul Puy-de-Dôme è inferiore rispetto a quella alla sua base ($\sim$ 1000m più in basso, a Clermont): a causa del diverso peso del'aria sovrastante.[6] Il relativo resoconto dell'osservazione della differenza di livello di circa 3pollici ($\sim$ 8cm) è in [27, p.141].

2 "Disputa sul vuoto".

Nel frattempo, la conclusione delle «*Nouvelles ..*» che, secondo Pascal, mostrano possibilità e esistenza di *vero vuoto* inteso come *spazio in cui non si trova alcuna materia nota*, quale ad esempio lo spazio lasciato libero nella provetta di Torricelli al di sopra dei $\sim$ 76cm, indusse l'immediata reazione, [19], del gesuita E.Noël, ($\sim$25 ottobre 1647).

Noël ritiene che, invece, necessariamente un corpo abbia preso il posto abbandonato dal mercurio e lo identifica con un gas contenuto nei 'pori' del vetro e purificato al punto che la sua fuoriuscita dal vetro divenga possibile: *Si donc on me demande quel corps entre dans le tube, le mercure descendant, je dirai que c'est un air épuré qui entre par les petits pores du verre, contraint à cette séparation du grossier par la pesanteur du vif-argent descendant et tirant après soi l'air subtil qui remplissoit les pores du verre,....* La tesi del Noël è, dunque, che la discesa del mercurio, creando il vuoto apparente, fa violenza al vetro della provetta estraendone aria purificata.

È questa una manifestazione della esistenza del 'pieno' richiesto dalla dottrina Aristotelica dell'orrore del vuoto, che addirittura la natura non può

[6]Confermò sperimentalmente, senza citarlo, quanto sostenuto da Torricelli (e Galilei) che il peso dell'aria diminuisce con l'altezza e "*sopra le cime degli alti monti l'aria cominci ad esser purissima e di molto minor peso che la quattrocentesima parte del peso dell'acqua*", [6, p.21].

'neppure sopportare', [5, L.13], [7] in completo contrasto con le conclusioni di Pascal che, pur in accordo sull'orrore del vuoto (ossia sulla difficoltà di generarlo), nega che la natura 'non lo sopporti'; e ritiene aver mostrato con le sue esperienze che nella natura si creano spazi vuoti (intesi come privi di qualsiasi materia nota) e anche molto grandi. La natura solo lo eviterebbe ove possibile, avendone 'orrore'.

Occorre qui sottolineare che, come già detto, Pascal aveva convenzionalmente abbreviato "vuoto apparente", ossia uno spazio in cui non si trova alcuna *materia nota*, in "vuoto", [27, p.7]: quindi Noël qui indica cosa invece, a suo parere, si trova nel vuoto torricelliano e Pascal sarà costretto poi, nella risposta alla lettera, a ripetere esplicitamente cosa intenda per vuoto.

Riprende poi, [27, p.8], cinque obiezioni possibili all'esistenza del vuoto presentate dallo stesso Pascal nelle "*Nouvelles ...*", ove ne era annunziata la confutazione [8] e ne accetta alcune come ulteriore evidenza dell'impossibilità del vuoto.

È notevole che scarti la quarta "*Qu'une matière imperceptible, inouïe et inconnue à tous les sens, remplit cet espace*": perché *nessuno la considera* valida: sorvolando che invece è parte essenziale del *Traité de là Lumière* di Descartes, [9], apparso nel 1664 ma in parte noto dal ∼1633.

Invece sottolinea la quinta obiezione, ossia che la presenza nel vuoto apparente di qualche materia sarebbe provata dal passaggio della luce attraverso di esso; dichiara: *La cinquième est une preuve péremptoire du plein, puisque la lumière, ou plutôt l'illumination est un mouvement luminaire des rayons, composés des corps lucides qui remplissent les corps transparens, et ne sont mus luminairement que par d'autres corps lucides, comme la poudre Daris* [limatura di ferro] *n'est remuée magnétiquement que par l'aimant: or cette illumination se trouve dans l'intervalle abandonné du vif-argent; il est donc nécessaire que ces intervalles soient un corps transparent. En effet c'en est un, puisqu'il est un air raréfié* (che in seguito, aderendo alla teoria di Descartes, chiamerà "etere" o "aria sottile" o "fuoco elementare", [27, p.37])

Certo l'affermazione del Noël, che nel vuoto torricelliano ci sia qualco-

[7] *Quarto apparet quia illud spatium in quo stellae moventur, non potest esse vacuum, eo quod impossibile est esse vacuum in natura, ut in IV Physic. probatum est.*

[8] Rinviata però a un futuro trattato sull'equilibrio dei fluidi, rimasto incompleto. Parti, e forse diviso in due in "*Traité de l'équilibre des liqueurs*,[27, p.83], e "*De la pesanteur de la masse de l'air*",[27, p.98], furono pubblicate postume, 1663.

sa, sarebbe sostenibile, e corretta, se non fosse appoggiata su precisazioni e dettagli poco comprensibili (fra i quali trova posto di rilievo l'ultimo sulla luce).

Invero il vuoto torricelliano non è vuoto assoluto e vi rimane gas a bassissima pressione: certo almeno il vapore di mercurio (la cui pressione di vapore è di circa ~ 0.0013mmHg, a 20^oC, ovviamente non osservabile da Pascal). E anche volendo insistere, anticipando di circa un secolo la fisica atomica, che a ben vedere gli atomi dei gas sono separati da distanze molto grandi prive di materia, ancora non si può sostenere che tali spazi siano vuoti, a meno che si prescinda ad esempio da onde elettromagnetiche, come sottolineato in proposito da Einstein, [19], o gravitazionali.

La lettera di Noël, in cui manca qualsiasi riferimento al peso dell'aria, esibisce una raccolta di idee, riflettenti la fisica "aristotelica", in cui si mescolano enti piuttosto vaghi, ma dotati di nomi altisonanti, e enti con proprietà non dedotte da esperienze ma da una costruzione della realtà fisica adatta a spiegare i fenomeni, a mezzo di una descrizione di proprietà immaginate e non verificate, e consistenti con la concezione aristotelica della infinita divisibilità della materia.

E l'ardore giovanile del ventiquattrenne Pascal vuole rispondere all'anziano Noël, sebbene sappia che questi non sia un qualunque scolastico: è rettore del *Collège de Clermont* dei Gesuiti a Parigi, [31, p.137], ed è stato un maestro (nel 1611-12) di Descartes, [19, sec.1], con il quale comunque corrisponde. E Descartes, a sua volta, sostiene la non esistenza del vuoto: anche quello apparente sarebbe pieno di "materia sottile" in continuo moto.[9]

E risponde subito (29 ottobre 1647), [27, p.12], assumendo un tono che certamente urtò la sensibilità del Noël: ad esempio inizia spiegando la regola da seguire nell'espressione di un giudizio positivo o negativo per evitare che sia 'visione, capriccio, idea, bel pensiero'.

Ciò premesso inizia la risposta commentando l'affermazione del Noël che il vuoto torricelliano è un corpo perché, come un corpo, trasmette la luce e, inoltre, inclinando la provetta questa non viene istantaneamente riempita dal mercurio[10]. E Pascal 'spiega' che, prima di utilizzare questi argomenti,

[9] E, organizzato in vortici, sarebbe responsabile su scala astrofisica, del moto di pianeti e comete, trascinandoli, [9].

[10] *Je dis que c'est un corps, puisqu'il a les actions d'un corps, qu'il transmet la lumière avec réfraction et réflexion, qu'il apporte du retardement au mouvement d'un autre corps..*

si devono definire lo spazio vuoto, la luce e il movimento e 'poi' mostrare che la penetrazione della luce in uno spazio vuoto e il non istantaneo moto di un corpo in esso sono proprietà in manifesto contrasto con lo spazio vuoto. E poiché la natura della luce non è nota ad alcuno, per ora se non per sempre, l'argomento rimarrà non convincente, [27, p.13].

Critica il presupposto di Noël che l'aria sia composta di 'aria sottile','fuoco' e 'terra' elementari e che poi il fuoco si possa separare e l'aria sottile possa fuoriuscire dai 'pori' del vetro, mantenendo una tendenza a ritornarvi una volta uscita.

Non comprende, Pascal, che per risolvere il problema del vuoto *vous ne donnassiez autre chose qu'une matière, dont vous supposez non-seulement les qualités, mais encore l'existence même; de sorte que qui* présupposera *le contraire, tirera une conséquence contraire aussi nécessairement. Si cette façon de prouver est reçue, il ne sera pas difficile de résoudre les plus grandes difficultés*, [27, p.14],

E anche: *Je sais .. que quantité de physiciens y avoient déjà travaillé; mais sur ces sujets de cette matière nous ne faisons aucun fondement sur les autorités: quand nous citons les auteurs, nous citons leurs démonstrations, et non pas leurs noms; nous n'y avons nul égard que dans les matières historiques*, [27, p.15].

Trova il modo di impartire ancora varie 'lezioni' quali: "non è molto difficile spiegare come possa risultare un effetto se si suppone la materia, le qualità e la natura delle qualità della sua causa" ovvero "se per risolvere questa difficoltà si fa una seconda ipotesi e se per salvare questo inconveniente si inventa allo scopo ancora una qualità che, non essendo ancora abbastanza sufficiente obbliga a trovarne una terza per salvare le due altre, senza alcuna prova, non saprei mai cosa rispondere, oltre a quanto già detto, o piuttosto crederei di aver già risposto".

E continua, trovando anche modo di far notare un'inesattezza nel commento con cui Noël evita di discutere la (citata) quarta obiezione "*qu'une matière imperceptible, inouïe et inconnue à tous les sens, remplit cet espace*", [27, p.8], delle cinque da lui elencate nelle "*Nouvelles...*". Obiezione che Noël ha considerato trascurabile dato che *nessuno la sostiene*. Ribatte che famosi contemporanei [*allude a Descartes*] invece ne discutono: forse sottintendendo che l'omissione da parte di Noël sia attribuibile alla necessità di evitare di coinvolgere Descartes e la sua teoria della materia sottile, [9, p.48], ampliando assai la discussione.

Inoltre, citando il famoso passo (su riportato) della lettera di Noël sulla natura della luce, spiega di aver difficoltà a capire come *la lumière est un mouvement luminaire des rayons composés de corps lucides, c'est-à-dire lumineux...* perchè i termini non sono stati definiti, [27, p.18].

La conclusione è *on ne peut vous refuser la gloire d'avoir soutenu la physique péripatéticienne, aussi bien qu'il est possible de le faire; et je trouve que votre lettre n'est pas moins une marque de la foiblesse de l'opinion que vous défendez, que de la vigueur de Votre esprit.*

Abbastanza per immaginare lo stato d'animo del Noël al ricevimento della risposta: e la reazione fu immediata, [27, p.18-27], e segue di appena qualche giorno, ($\leq$10 novembre 1647), [28, p.1083].

Vista la (irrispettosa) durezza della lettera di Pascal, ironicamente detta subito da Noêl "*vraiment docte, claire et courtoise*", non sorprende il duro tono della sua risposta. Sorprende però la dettagliata analisi "scientifica" esposta da Noël, nella quale mostrerà anche di aderire alla teoria di Descartes sulla "materia sottile" (il 'fuoco" o "etere", primo dei tre elementi che costituiscono il mondo, con l'"aria" e la "terra", [9, p.48]).

Inizia riconoscendo il suo difetto di aver inteso (dalle "*Nouvelles ...*") che "tutto ciò che è spazio è corpo", e presupposto come cosa evidente che il vuoto, apparente o vero, non sia né spirito né accidente di un corpo e quindi sia un corpo; ora invece vede che, secondo quanto definito da Pascal, il vuoto non è corpo materiale, né accidente di un corpo materiale, ma uno spazio dotato di lunghezza, larghezza e profondità, immobile e capace di ricevere e contenere un corpo. Però dopo la citazione, letteralmente ripetuta e che ora accetta, nega che un tale spazio realmente esista senza un contenuto materiale.

La definizione di Pascal, così posta da Noël, è però ambigua, perché non ripete quanto detto nelle "*Nouvelles ..*" circa l'identificazione del *vuoto apparente* con il *vuoto reale*, da intendere solo come privo di qualsiasi materia nota. Qui il vuoto è inteso e definito senza parlare della differenza e quindi Noël ha una base su cui appoggiare la tesi della sua prima lettera.

La risposta prosegue quindi sostenendo in maggior dettaglio come nel vetro della provetta possa coesistere un miscuglio di aria, fuoco e altro, estratti dai pori del vetro a causa della caduta del mercurio: e descrive un esperimento, (con una certa dovizia di dettagli), che proverebbe che aria elementare, da non confondere con l'aria eventualmente in soluzione, è intrinsecamente contenuta nell'acqua: [11] probabilmente Noël lo cita per contrapporlo agli

[11]"..si costruisca una camera cubica di lato $\sim 1.8m$ (5-6 piedi) da porre sul fondo

esperimenti di Pascal e mostrare che anche lui esegue prove tecniche per sostenere la sua teoria; ma c'è da dubitare che abbia eseguito personalmente l'esperimento descritto, ma riporti piuttosto la descrizione sommaria di qualche dispositivo, visto in un mulino o in una fabbrica, e comunque non un esperimento progettato per lo studio accurato di un'ipotesi.

L'esperimento avrebbe dovuto far notare la differenza fra "l'aria che è nell'acqua e quella che è mescolata con l'acqua": *.. ici une différence fort notable entre l'air qui est dans l'eau (c'est le même des autres élémens) et l'air qui est mêlé avec l'eau, faisant une partie du tout, ou mélange, que nous appelons eau; l'air dans l'eau fait un tout à part, que nous appelons air, et monte toujours au-dessus de l'eau; l'air mêlé avec l'eau fait un tout avec les autres élémens, que nous appelons eau, et ne s'en sépare point que par quelque violence.*

Pascal lo criticherà identificando la natura dell'aria osservata nell'esperimento come aria presa direttamente dall'ambiente e non come estratta con violenza dall'acqua. E oltre un secolo dopo il fenomeno sarà identificato come un effetto legato al *teorema di Bernoulli* su un fluido che scorre in un condotto di diametro variabile.

L'esperimento citato da Noël è particolarmente interessante perché mostra che l'*effetto Venturi* era noto e empiricamente usato, come ad esempio osserva Pascal, in "*ces soufflets qui se font par le moyen de la chute de l'eau dans une chambre close presque de toutes parts*", [27, p.57].[12]

Si deve sottolineare che la descrizione del Noël, nonostante i dettagli tecnici, non si confronta neppur lontanamente con gli esperimenti progettati per verificare fenomeni generali, eseguiti e descritti da Pascal e collaboratori: as-

---

di una diga di uguale altezza, con un canale di $\sim 8cm$ (3-4 pollici) di diametro perpendicolare al pavimento sul quale sia posta una pietra rotonda dura e piatta di diametro $32cm$ (1 piede), più alta di $2.7cm$ (1 pollice), che riceva l'acqua che cade dal canale; si faccia poi un foro su uno dei quattro muri all'altezza del pavimento da cui fuoriesca l'acqua; si faccia un secondo foro all'altezza di $32cm$ (1 piede) dal fondo e alla sua uscita si metta un tubo [conico] lungo $\sim 1m$ (3 piedi) che vada restringendosi dai $\sim 27cm$ (9-10 pollici) del foro a $\sim 8cm$ (2-3 pollici) da cui si vedrà impetuosa fuoriuscita di aria ... come da quei grandi mantici lunghi più di $\sim 50cm$ (15 piedi) ...", [27, p.22].

[12]Un suo uso è ben descritto (1647), dall'ingegnere e matematico G.B.Aleotti, nell'appendice al testo della sua traduzione dei 'Moti Spiritali' di Erone Alessandrino, [11, p.96], per la costruzione di un condizionatore (!).

sai accurati e precisi, certamente anche costosi, e basati sul controllo rigoroso di ipotesi e dati, cfr. [27, p.134].

A questo Noël fa seguire un'ingegnosa descrizione del termometro, cfr. [28, p.1086], basata sull'emissione di 'particelle ignee' da parte della mano calda e la loro ricezione dal bulbo del termometro: lo scopo è di dare un altro esempio di esistenza e azione sulla materia da parte di particelle invisibili ma certamente esistenti.

E il vuoto presente nella provetta di Torricelli è ritenuto tale perché nessun corpo è penetrato nella regione lasciata dalla discesa del mercurio: ma tutti sanno, dice Noël (riferendosi forse alla teoria di Descartes sulla luce, [9], e trascurando che proprio questo è il tema della discussione), che il mondo consiste di corpi sempre in contatto fra loro senza alcuno spazio vuoto che li separi. È *beaucoup plus raisonnable d'avouer qu'en cet espace il y a un corps, quoique sa nature nous soit cachée, que de nier qu'il y en ait, pour ne pas savoir quel il est.* Ironizza sul dire che nella provetta c'è il vuoto nel senso di Pascal, perché è come dire: *je ne sais pas quelle distance il y a entre Saturne et les étoiles; donc il n'y en a point.*

Passa poi a esaminare alcuni esperimenti descritti nelle "*Nouvelles..*", per mostrare che i risultati si spiegano bene in base alle sue varie ipotesi e fra queste *pone anche il peso dell'aria.* Qui è una importante novità perchè non attribuisce, a differenza della prima lettera, l'altezza del mercurio nella provetta a trazione da parte del corpo che riempie il vuoto apparente, ma al peso dell'aria sul mercurio della conca (mentre l'aria purificata, pur presente nella provetta, non pesa): *Cela veut dire que l'air commun que nous respirons soit pesant*, [27, p.25]; e analizza qualcuna delle esperienze di Pascal spiegandole come effetto del peso dell'aria.

Questo punto sembra essere il primo, per Noêl, in cui il peso dell'aria appare e ha un ruolo essenziale: ed è *anche* il primo per Pascal che lo introduce nella citata lettera a F.Périer, di pochi giorni successiva (ma si è addirittura proposto che la lettera fosse posteriore al novembre 1647 e quindi sia antedatata, cfr. [31]). Evidentemente la menzionata questione sulla originalità dell'esperienza del *vide dans le vide* e la proposta della "grande esperienza" sul Puy-de-Dôme sono strettamente legate alla data della lettera a F.Périer (della quale non resta l'originale autografo, [31, p.85], e dalla stessa lettera risulta che l'esperienza del *vide dans le vide* è di *ces jours passés*, [27, p.139]), benché non menzionata ancora nelle "*Nouvelles..*" del 10 ottobre 1647.

Infine ritorna sul significato della sua precedente definizione delle proprietà della luce, che Pascal aveva giudicato incomprensibile: ma i termini usati

vengono spiegati ancora in modo incomprensibile (certamente per Pascal e anche per noi, influenzati dal senno di poi) con qualche particolare in più.

Alla fine dichiara che, a parte l'idea del vuoto, i loro pensieri si accordano: cioè si accordano sui risultati sperimentali delle "*Nouvelles ..*" ma non su quello che accade nel vuoto torricelliano e conclude acidamente: *Ceci est court, mais suffisant pour des personnes capables et intelligentes, comme celle à qui j'ai l'honneur d'écrire.*

Alle argomentazioni e commenti di Noël, conclusi in modo poco rispettoso, ma che si deve ritenere conseguenza del tono che lo stesso Pascal aveva usato nella sua lettera, non ci fu risposta diretta. Certamente, in questo, influì la richiesta del Noël di non dargli risposta perché "*il craignoit que ma première lettre n'eût intéressé ma santé, et qu'il me prioit de ne pas la hasarder par une deuxième*", come Pascal riporta nella successiva lettera al matematico J.Le Pailleur,[27, p.49]. Del resto è chiara l'inconciliabilità delle due posizioni e che gli argomenti non avrebbero potuto che ripetersi.

Ciononostante Noël decise di continuare pubblicamente già qualche mese dopo, nel febbraio 1648 [19], rivolgendosi all'autorevole abate A.de Bourbon-Conti con un opuscolo dal titolo "*Le plein du vide*", [27, p.27].

3 "Le plein du vide"

Noël inizia senza nominare esplicitamente Pascal ma accusandolo con forza, se pure in modo indiretto. Di fronte alla "inaudita accusa" mossa alla Natura, con l'aiuto dei sensi e di esperienze, di "sopportare il vuoto", Noël si propone di mostrare la "falsità" dei fatti di cui la Natura è accusata e le "imposture" delle relative testimonianze.

Il testo procede riferendosi formalmente non a Pascal bensì a V.Magni, cappuccino milanese.E quasi subito interverrà il padre di Pascal, [27, p.63], Etienne, in difesa di Blaise e riterrà ingiuriose le accuse di imposture e falsi, sebbene Noël avesse intanto precisato di essersi invece riferito al Magni. E anzi scrive che Blaise considera un segno di scarsa stima aver pensato che avrebbe creduto che i commenti dell'opuscolo, *qui paroissent aigres et inutiles*, fossero diretti al Magni e non a lui stesso.[13]

[13]Valeriano Magni, cappuccino milanese, pubblicò in Polonia un opuscolo "*Demonstratio ocularis loci sine locato*", [24], anni dopo Torricelli, nel 1648.

Nel "*Le plein du vide*" subito Noël, pur citando le "*Nouvelles ..*" di Pascal, descrive l'esperienza "italiana" riferendone però la descrizione di V.Magni, invece della originale di Torricelli, [27, p.28].

E ripete, a prova dell'esistenza di un corpo che si è inserito nello spazio lasciato libero dal mercurio, il fatto che la luce passi attraverso di esso. Adducendo con maggiori dettagli gli argomenti presentati nella seconda lettera a Pascal (che li aveva contestati).

Ad esempio non esita a spiegare di nuovo la concezione della luce con i suoi 'spiriti ignei' il cui movimento, dovuto a un corpo luminoso, produce la luce percepita attraverso i corpi lucidi, *esprits lucides*, che raggiungono i nervi ottici producendo quello che chiamiamo *vista*. E questi spiriti ignei provano che nell'aria ci sia del fuoco che se ne può separare e, separato, formare aria sottile o *etere*.

Per dimostrare che aria esiste anche nell'acqua, ritorna con maggior dettaglio sulla strana esperienza già descritta nella seconda lettera a Pascal e aggiunge che non solo nell'acqua è intrinsecamente presente aria (quale elemento fondamentale, diversa da quella che, a volte, è anche in soluzione, a sua volta composta dai tre elementi costituenti la materia del mondo), ma anche fuoco e poi anche terra, alludendo alla teoria di Descartes, [9, p.41].

E "spiriti ignei" emessi da corpi caldi spiegano anche i termometri: il cui funzionamento è descritto, sulla base della teoria del termometro già esposta nella seconda lettera. E quindi procede a mostrare che i corpi hanno pori in cui c'è aria, come dimostra senza fallo il suono emesso dal tremito dei vetri. E adducendo altri argomenti, sempre perfezionando quanto esposto nella seconda lettera a Pascal, conclude che il mondo è 'pieno': materia lo occupa interamente.

Riprende l'interpretazione dell'esperienza di Torricelli per rafforzare sulla base di esperienze concrete le conclusioni raggiunte, ossia che l'etere (che chiama anche 'aria sottile' o 'fuoco elementare') riempie il vuoto della provetta di Torricelli e *...qui ait le pouvoir de retenir et faire monter le vif-argent...*, [27, p.30]: ne ripercorre l'esperienza attribuendo all'etere proprietà utili a spiegare il fenomeno, regredendo alle idee della prima lettera, lasciando da parte il ruolo del peso dell'aria, [27, p.59].

Afferma che nell'aria sono presenti i tre elementi fondamentali e ne illustra alcuni fenomeni in cui si rivelano, tra cui una errata interpretazione del principio di inerzia per cui "*... On connoît d'ici pourquoi la balle que vous laissez choir de la portière d'un carrosse qui roule, ne tombe pas à plomb*

..",[27, p.31], spinta [in avanti] dallo spostamento degli spiriti ignei dell'aria da parte della sfera.

In definitiva sviluppa in molto dettaglio il metodo della prima lettera per spiegare le "*Nouvelles expériences ..*": ma non fa cenno al ruolo del peso della colonna d'aria [14] per spiegare i fenomeni, ricorrendo invece all'introduzione di opportune proprietà degli elementi fondamentali (etere, aria e terra) man mano che si rendono necessarie per chiarire che il vuoto apparente mai è vero vuoto: e i fenomeni osservati sono dovuti a opportune azioni di corpi (dotati di *légèreté mouvante*) solitamente invisibili.

É questo un sorprendente cambiamento rispetto alla posizione sostenuta nella sua seconda lettera, in cui il peso dell'aria veniva considerato responsabile dei fenomeni studiati da Pascal.

La conclusione di Noël, poi, è coerente con la sua visione del mondo: *...Et parce que nous avons parlé souvent, en ce petit traité, du rare et du dense, et que la différence des deux semble moins connue à quelques-uns, je mettrai, pour la conclusion de ce petit ouvrage, une hypothèse possible et probable pour aider cette connoissance. Présupposons donc, par manière de simple hypothèse, que Dieu, voulant faire le monde, ait créé une masse de corps extrémement rare...*, [27, p.48].

Questo è ancora un accenno alla onnipresente materia sotttile pervasiva nel cosmo secondo Descartes, [9, p.48], che pure ne descrive le proprietà esemplificandole nell'ipotesi che "*Dio abbia...*", [9, p.67]. Ma così "*presupponendo che Dio abbia voluto ...*" Noël viola ancora, e molto più profondamente che nelle due lettere precedenti, [15]tutte le linee guida già poste da Pascal, nel preambolo della sua prima lettera, per lo sviluppo di un'analisi corretta di un problema, che come tale deve essere basata su fatti certi, talmente chiari e distinti ai sensi che non si possa dubitarne.

La disputa, che avrà ancora qualche strascico, ha ricevuto molta attenzione nella letteratura come episodio della contrapposizione fra la Fisica Aristotelica e la Fisica Moderna: la prima al tramonto e la seconda ormai in piena evoluzione, [19, 31].

[14]Del quale aveva fatto uso nella seconda lettera, [27, p.25].

[15]già nella prima aveva presupposto *Présupposons une chose vraie, que le verre a grande quantité de pores ...* senza però arrivare a Dio, [27, p.9].

4 "Fine della disputa; Torricelli"

L'opuscolo di Noël ricevette, insieme a commenti sulla sua seconda lettera (che Noël aveva chiesto di non rendere pubblica), una risposta indiretta nella corrispondenza di Pascal con il Le Pailleur,[27, p.49]. Scritta, (∼febbraio 1648), fra la proposta e l'esecuzione dell'esperienza del Puy-de-Dôme, rivela che la discussione diretta con Noël non proseguì su esplicita richiesta del gesuita.

Nella lettera Pascal sottolinea la sua definizione di vuoto apparente e la sua abbreviazione in vuoto vero, posta chiaramente nelle "*Nouvelles ..*", ma non chiarissima nella sua lettera a Noël: *C'est qu'il se figure que j'ai assuré, en termes décisifs, l'existence réelle de l'espace vide et sur cette imagination, qu'il prend pour une vérité constante, il exerce sa plume pour montrer la foiblesse de cette assertion.*[16]

Ritorna sugli argomenti già usati dal Noël, decorandoli anche con sarcasmi, che vengono commentati dicendo: *Comme une grande suite de belles choses devient enfin ennuyeuse par sa propre longueur, je crois que le P. Noël s'est ici lassé d'en avoir tant produit* e prevedendo la noia degli ascoltatori ha deciso di alleggerire un po' la dicussione passando a uno stile meno serio.

Poi esamina e critica acutamente vari passaggi delle due lettere di Noël insistendo sulla differenza della prima, e del "*Le plein du vide*", rispetto alla seconda: e dice di tutte che non soddisfano alle condizioni necessarie per essere credute come verificate. Anche perché *après avoir donné des doutes, pour appuyer son sentiment, il le confirme par des expériences fausses..*, [27, p.59].

Mostra che Noël cita risultati delle "*Nouvelles...*" in modo errato, ma adattato alle sue tesi, e *Vous voyez par là, monsieur, que le P. Noël appuie cette matière invisible sur des expériences fausses, pour en expliquer d'autres qu'il a mal entendues*,[27, p.59].

Il radicale cambiamento sul ruolo attribuito al peso dell'aria sarà commentato, [27, p.58-59], iniziando: *il attribue la suspension du vif-argent à une qualité qu'il lui donne, qu'il appelle légèreté mouvante, et non pas au poids*

[16]che Noël aveva ripetuto dicendo *Voilà, monsieur, votre pensée de l'espace vide fort bien expliquée; je veux croire que tout cela vous est évident, et en avez l'esprit convaincu et pleinement satisfait, puisque vous l'affirmez*, per poi riferirsi al vuoto apparente come *un espace ayant longueur, largeur et profondeur, immobile, capable de recevoir et de contenir un corps de pareille longueur et figure.*

de l'air extérieur, comme il faisoit dans sa lettre, ricorrendo ancora una volta a proprietà inventate allo scopo di giustificarne le osservazioni quali loro conseguenze.

Però subito aggiunge di aver ricevuto, mentre scrive, un foglio stampato "*...qui renverse la plus grande partie de son livre: il révoque la légèreté mouvante de l'éther, en rappelant le poids de l'air extérieur pour soutenir le vif-argent*", [27, p.61].[17]

Quanto poi all'autore del primo esperimento italiano scrive che il nome ne fu richiesto a Roma, e fu ricevuto appena possibile e con grande piacere (certo prima della pubblicazione delle "*Nouvelles...*" in cui stranamente Torricelli non è citato: sebbene si evinca da una lettera, del 26 novembre 1646, [28, p.366], di P.Petit che, conoscendo il lavoro di Torricelli, aveva iniziato con Pascal, intorno al giugno 1646, gli esperimenti con il mercurio). E anzi questa è la prima volta che "*le grand Toricelli*" viene citato direttamente da Pascal e sono ormai passati quattro anni dalle "*Nouvelles ..*" e più di sei da quando i membri dell'*Académie* di Mersenne vennero a conoscenza della scoperta di Torricelli. [18]

Questa lettera assolve egregiamente al compito di dimostrare che Pascal non ha risposto alla seconda lettera di Noël non perché varie persone *et même de ces pères, qui n'étoient pas bien informées de l'intention du P. Noël ont pris sujet de dire qu'ayant trouvé dans sa lettre la ruine de mes sentimens, j'en ai dissimulé les beautés, de peur de découvrir ma honte, et que ma seule foiblesse m'a empêché de lui repartir.*

Alla lettera a Le Pailleur segue, ∼aprile 1648, la citata lettera del padre di Pascal, Etienne, a Noël, [27, p.62], in difesa del figlio, che è un ulteriore esempio del livello delle polemiche intellettuali dell'epoca: ad esempio la lettera critica molto duramente Noël per accuse di ingiurie, di falsità, di insolenze rilevate (a suo vedere) in vari passi dell'opuscolo *"Le plein du vide"* e conclude: *Laissez, s'il vous plaît, ces façons d'écrire ou de parler à ceux à qui Dieu a donné moins de lumière.*

Qualche anno dopo, segue una lettera di Blaise Pascal al magistrato M. de Ribeyre, ultima della serie (giugno/1651) [27, p.73 e 81], nella quale si difende

[17] Noël si sarebbe giustificato per non aver potuto correggere le bozze a causa di un impedimento.

[18] E probabilmente conosceva Torricelli come matematico almeno dal 1643, quando ebbe inizio la corrispondenza fra Torricelli e i membri dell'*Académie* sulla geometria. E nel 1648 è menzionato nella citata lettera del padre Etienne.

dall'accusa di plagio su Torricelli rivoltagli in una conferenza pubblica da un gesuita (J.P. Médaille, [28, p.1092]) al collegio del Montferrand. Il quale, fra l'altro, aveva detto: *Il y a de certaines personnes aimant la nouveauté, qui veulent se dire les inventeurs d'une certaine expérience dont Toricelli est l'auteur...*, aggiungendo dati e luoghi univocamente identificanti Pascal e i suoi collaboratori.

Qui Pascal ha occasione di ripetere di nuovo (come già nelle *Nouvelles..*) con molta chiarezza di non essersi mai attribuito l'esperienza "venuta dall'Italia", cosa certo ben nota ma resa necessaria dall'inopportuno intervento del gesuita di Monferrand (di cui non cita il nome).

E informa che *En l'année 1644, on écrivit d'Italie au R. P. Mersenne, minime à Paris, que l'expérience dont nous parlons y avoit été faite, sans spécifier en aucune sorte qui en étoit l'auteur.* La notizia giunse a Rouen ove Pascal, nel 1646, ripeté l'esperienza con successo, varie volte, e conducendo altre esperienze riportate nelle "*Nouvelles ..*". E ancora tributa riconoscimenti al "*grand Toricelli*" quale fisico e matematico.

5 "Cicloide: Torricelli, Roberval e Pascal"

Dunque Torricelli, scomparso prematuramente nel 1647, appare menzionato, per la sua esperienza sul mercurio, nelle citate lettere a De Pailleur (1649) e, in particolare, a Ribeyre (1651) ricevendo pieno riconoscimento della sua scoperta, e lusinghieri commenti personali.

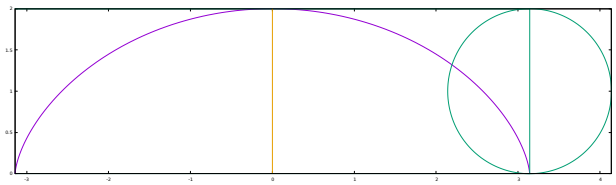

Figura 1: Cicloide, asse e cerchio generante (di raggio 1): il suo punto inizialmente in $(\pi, 0)$ traccia, mentre il cerchio rotola senza strisciare, la curva cicloide. La semi-cicloide è la parte racchiusa nel rettangolo formato dalle due linee verticali, delle quali la prima è l'asse e l'altra segna il diametro del cerchio nella posizione iniziale.

Ritorna il suo nome a proposito dei problemi sulla cicloide in riferimento all'ormai vecchio (ossia più che decennale) scambio di lettere fra Torricelli e il matematico P.Roberval: quest'ultimo accusò Torricelli di plagio, in due lettere di cui una del 1 gennaio 1646, [23, p.349], in tardiva risposta a un primo tentativo di dialogo da parte di Torricelli (di due anni prima, com-

mentato in [18]) e precedente la sua morte, e una seconda, senza data ma non precedente l'estate del 1647, e forse mai ricevuta da Torricelli, [7, p.284], scomparso nell'ottobre 1647.

Il rinnovato interesse di Pascal per Torricelli si manifesta, nell'agosto 1658, a seguito della "originale" iniziativa di indire, con lo pseudonimo "*Amos Dettonville*", un concorso a premi per chi risolverà, *entro l'1 ottobre 1658*, una serie di problemi sulla *cicloide*, [27, p.322], chiamata spesso *roulette* o anche *trochoïde*:[19] *Nous en demandons instamment la solution à tous les géomètres de l'univers, offrant à ceux qui l'auront trouvée un prix, non pour rémunérer leurs efforts, (loin de nous cette pensée!), mais ....*

Il premio offerto, a spese di Dettonville, è di 40 dobloni d'oro al primo classificato e di 20 al secondo, [27, p.322]: cifre considerevoli visto che sembra che un doblone d'oro (a > 18 carati) dal 1647 pesasse > 6.g. E qui ci si domanda se Pascal, pur non essendo in difficoltà economiche, immaginasse/contasse che nessuno sarebbe riuscito a trovare, in tempo, le soluzioni: alcune delle quali affermava di non sapere ancora risolvere.

Sorgono subito problemi di interpretazione del 'bando' (tipici ancora nei bandi moderni: ad esempio: *come interpretare la voce del bando "data una qualunque cicloide" laddove il bando prima definisce solo "una" cicloide?*, o anche una domanda equivalente a *in quale unità esprimere i risultati*!) [20]

Nel bando viene dichiarato che, *dopo* l'esame dei temi arrivati entro l'1 ottobre 1658 e la comunicazione dei premiati, l'istitutore del premio pubblicherà le sue soluzioni.

Alla data arrivarono varie soluzioni manifestamente incomplete, i cui autori cercavano di trarre vantaggio dalla tolleranza sul tempo eventualmente necessario per redigere una versione completa: tolleramza dichiarata verso chi avrebbe inviato soluzioni ancora incomplete ma corrette nel metodo.

Il 10 ottobre 1658, nell'attesa dell'esame delle soluzioni, Pascal intanto pubblica la "*Histoire de la Roulette*", [27, p.337]: questa importante storia

[19]Dal greco τροχός=ruota. Curva già considerata nel passato recente da altri, Galileo, N.Cusano, C.De Bovelles, ..

[20]Questo genera una "*Addition au programme precedent*" a vari punti del testo del bando precisando ('incautamente', come si vedrà dalle contestazioni) cosa si debba intendere per soluzione pervendendo a: *Voici maintenant un cas particulier dont le calcul sera regardé comme suffisant. Une demi-cycloïde ACF, tournant autour de sa base AF, engendre un solide que l'on coupe en deux moitiés égales par un plan conduit suivant l'axe de révolution AF; on demande de déterminer le centre de gravité de chacune de ces moitiés*,[27, p.328].

ha ricevuto molti commenti che però ne contestano alcune delle affermazioni principali, ad esempio [6, 4, 17].

La storia inizia dalla priorità sulla definizione di roulette (o cicloide o trochoide), che è data a Mersenne, 1615; l'attribuzione però è contraddetta dall'affermazione di Torricelli che aveva ricordato, nell'esporre la sua soluzione al problema della determinazione ('quadratura') dell'area delimitata dalla cicloide e dalla sua base, [33, p.85], che Galilei aveva studiato la curva intorno al 1600 (chiamandola appunto "cicloide", figura già comunque considerata da vari geometri), trovandone anche, sperimentalmente, l'area pari a "quasi" tre volte quella del cerchio generante.

La storia continua con Mersenne che propone il problema della quadratura della cicloide a varie persone, e informa che dopo vari anni, nel 1634, Roberval ha trovato il valore dell'area della cicloide, ma non ne divulga il valore né il metodo seguito; e poi solo nel 1638 Mersenne ne rese pubblico il valore (triplo di quella del cerchio generante) e presto Fermat e Descartes confermarono il valore di Roberval, con loro (diverse) dimostrazioni. In proposito Descartes commenta, (maggio/1638), [36]: *Je n'y ai encore jamais pensé, la remarque de Roberval en est en effet assez belle; mais je ne vois pas qu'il y ait de quoi faire tant de bruit d'avoir trouvé une chose qui est si facile que quiconque sait tant soit peu de géométrie ne peut manquer de la trouver pourvu qu'il la cherche.* La dimostrazione di Fermat è esposta in [15]. Infine anche Roberval divulgherà indirettamente il suo metodo, ma *solo* nel giugno 1644, in una lettera a Torricelli scritta dal suo allievo F.Du Verdus, [23, p.184]; ritardo forse spiegabile per la necessità di conservare segreti i suoi risultati al fine di mantenere la sua cattedra che, per statuto, era messa periodicamente a concorso.[21]

Informa che nel 1638 J.de Beaugrand portò a Galileo (ma Cavalieri, 22 settembre 1643, non crede a questo evento, [23, p.143]) le due dimostrazioni già disponibili, ma senza nominarne gli autori, [27, p.338]: e, confermando un analogo sospetto espresso da Roberval in una lettera a Mersenne del 1643, [7, p.278], (in cui, su richiesta di Mersenne stesso, dava la sua opinione sui risultati di Torricelli) Pascal azzarda: "forse cercando di esserne lui stesso

[21] *"Pour maintenir son poste au Collège, Roberval devait remporter la victoire aux concours périodiquement renouvelé selon le testament de Petrus Ramus, fondateur de la chaire; d'où probablement sa forte tendance à tenir ses découvertes en secret", [16, p.36].*

accreditato come autore (pur non nominandosi per modestia)".[22]

Nel 1644 Torricelli pubblicò la sua "*Geometria*", [32], in cui, fra l'altro, calcolava l'area della cicloide (con tre metodi, uno 'all'antica' e due basati sulla teoria degli indivisibili di Cavalieri, [32, p.85], o meglio sulla sua versione della teoria di Cavalieri, [2, 14]).

Già nel 1643, al corrente dei risultati di Torricelli (sulla cicloide) via Mersenne, Roberval aveva scritto a Mersenne, [7, p.278], esaminando lo studio della cicloide e vari altri risultati di Torricelli e rilevando che alcuni erano presentati senza dimostrazione e molti, comunque, contenuti nei suoi lavori; lodava però Torricelli e, concludendo, si augurava che rendesse noti i suoi risultati ai 'nostri matematici'.

Il contenuto di questa lettera pervenne a Torricelli che scrisse direttamente a Roberval, ottobre 1643, [18], commentando i propri risultati e intendendo che le sovrapposizioni, ove esistenti, erano dovute alla sua non conoscenza dei relativi risultati di Roberval, Fermat e Descartes. E, forse alludendo ironicamente al citato augurio di Roberval, Torricelli concludeva la sua lettera: *Vale, Vir Clarissime, tuorumque Operum editionem accelera, in pubblicam litteratorum omnium utilitatem*, [23, 18].[23]T

Ma la "*Histoire de la roulette*" diventa a questo punto sorprendente: Pascal riporta, adottandolo, gran parte del contenuto di una "lettera" (o "scritto") che può *sembrare* essere una risposta di Roberval alla appena citata lettera di Torricelli. Qui Roberval, ripetutamente, lo accusa di plagio, elencando con estrema dovizia di dettagli i suoi risultati su vari problemi di geometria (alcuni dei quali risolti anche nella "*Geometria*", del 1644, di Torricelli).

Questa "lettera", *senza data*, non risulta pubblicata prima del 1682 (ma letta alla *Académie Royale des Sciences* nel 1668), è fra le opere postume di Roberval, ed è riportata in [7, p.284], subito dopo la citata lettera di Torricelli a Roberval e quindi può indurre un lettore incauto a ritenerla una risposta alla lettera del 1643 (cit.) di Torricelli a Roberval: tuttavia la vera risposta di Roberval a Torricelli fu *in un'altra lettera*, del 1 gennaio 1646 (*e comunque*

[22].. *mais il écrivit de sorte qu'en prenant pas garde de près, il sembloit que ce n'étoit que par modestie qu'il n'y avoit pas mis son nom et, pour déguiser un peu les choses, il changea les premiers noms de roulette, et trochoïde, en celui de cycloïde.*

[23]Nella *Histoire de la roulette* Pascal afferma che *Toricelli s'attribuoit, en 1644, l'invention..* e che *M. de Roberval s'en plaignit donc à Toricelli, par une lettre qu'il lui en écrivit la même année..* riferendosi però al 1644: mentre la prima lettera, [23, 349], di Roberval a Torricelli è del 1/gennaio/1646.

con due anni di ritardo), [6], [23, p.349]; ma si veda il prossimo paragrafo per i problemi sollevati in proposito.

Riferendo, di fatto in modo acritico, molti dettagli della "lettera", *aggressiva oltre ogni misura*, di Roberval a Torricelli[24]e certamente anche voci di corridoio circolate fin dall'arrivo a Parigi della "*Geometria*" di Torricelli, insiste nell'accusarlo di disonestà e plagio: in particolare sulla soluzione a alcuni problemi sulla cicloide, [27, p.338-339].

Formulate dopo 11 anni dalla scomparsa di Torricelli, sorprendono accuse da parte di un Pascal che solo 10 anni prima, 1648, e ben dopo la divulgazione delle soluzioni di Fermat, Descartes, Roberval e di Torricelli stesso, nella lettera a Le Pailleur, lo riconosceva, con ammirazione, come "*le grand Toricelli*", [27, p.57].

Sostiene che Torricelli avrebbe ottenuto possesso delle carte, che J. de Beaugrand [25] avrebbe dato a Galileo, contenenti le soluzioni del problema della cicloide (di Fermat e Descartes, ma prive dei nomi degli autori).[26]

E afferma, senza prove, che Torricelli, atteso qualche tempo, *il crut qu'il y avoit assez de temps passé que la mémoire en fût perdue et ainsi il pensa en profiter*, [27, p.338]. Una così grave affermazione dovrebbe essere accompagnata da prove non confutabili, ma Pascal la lascia così e non cita le fonti di queste informazioni, facilmente riconducibili alla sola su citata "lettera" senza data di Roberval, e che sono anche in conflitto con documenti allora disponibili, [6, p.9].

Poi rincara l'accusa dicendo che "quindi" Torricelli si appropria del risultato e attribuisce a Galileo ciò che spetta a Mersenne e a se quello che spetta a Roberval,[27, p.338]: ma con nessun dato o citazione corrobora questa ulteriore affermazione.

Dice infine che la pubblicazione del libro di Torricelli fu ricevuta in Francia (1644) come un argomento di risate, perché tutti erano consapevoli che la

[24]Che è anche notevole perché, prima delle accuse a Torricelli, premette "fuori tema" che, sebbene spetti formalmente a Cavalieri l'invenzione del metodo degli indivisibili, [2, 14, 22], *certe illud scio, me integro quinquennio antequam in lucem emiserit, eam doctrinam usum fuisse in solvendis multis...*, [7, p.285], pur non avendola pubblicata: ma ammette *Ille prior vulgavit: ille, hoc jure, suam fecit.*

[25](ormai morto da circa un decennio e a sua volta già accusato da Roberval di abitudine a "*aliorum inventa mutatis vocabulis, et supressis Authorum nominibus, propalare*", [23, p.133]).

[26]Posto in dubbio da Cavalieri, [23, p.143], come già citato.

soluzione era già nota dal 1640.[27]

E, Pascal ammette, Roberval e Mersenne scrissero a Torricelli il quale in risposta riconobbe la priorità della scoperta di Roberval in una lettera: 'conservata dai destinatari ma che è solo detta esistere, non pubblicata' (ma la lettera invece esiste in [23, p.173],[4, p.102]). E questa mancanza di pubblicità è motivo di ulteriori critiche, perché "non essendo pubblica può confondere"; cosa che dichiara esser successa a lui stesso: *ce qui a été cause que par mes prémiers écrits je parle de cette ligne* [la cicloide] *comme étant de Toricelli*, [27, p.339].

Come mai abbia dapprima creduto che "la linea (cicloide) appartenesse a Torricelli", pur essendo lui in Francia e assai vicino ai tanti suoi colleghi che conoscevano, dal 1638 almeno, il risultato di Roberval e almeno nel 1644 'ridevano', [27, p.338], di Torricelli? Si deve pensare che abitando a Rouen (dal 1640 al 1647, [28, I,p.XXXVII]) avesse perso i contatti con i membri dell'*Académie* che, già in polemica, irridevano Torricelli? Eppure dal 1635 al 1640 partecipava a Parigi all'*Académie* e dall'estate 1647 era di nuovo a Parigi e nel ∼febbraio 1648 ne parlava con deferenza nella citata lettera a Le Pailleur, [27, p.57].

E se neppure lui conosceva a chi "appartenesse la cicloide" al momento della pubblicazione di Torricelli nel 1644 (lo scambio di lettere fra Roberval, Mersenne e Torricelli avvenne addirittura prima della disputa con Noël o delle lodi a Torricelli, espresse da Pascal nella lettera a Le Pailleur del ∼febbraio 1648) perché accusarlo? è un'osservazione che sarà immediatamente sottolineata dai primi difensori di Torricelli, [17, 6].

Prima di procedere a esporre la successione dei problemi che lo hanno portato a indire il concorso a premi, Pascal lancia una ultima critica a Torricelli: dopo il riconoscimento della precedenza a Roberval *et ne pouvant plus passer, auprès de ceux qui savoient la vérité, pour auteur de la dimension de l'espace de la roulette, ni même ..* Torricelli aveva proposto il calcolo del volume del solido ottenuto ruotando la cicloide attorno all'asse.

Però potè solo trovare un'*approssimazione* (differente di $\simeq 1.4\%$ dal valore esatto), dichiara Pascal: ma subito la chiama errore e azzarda, [27, p.345], *ratus errorem illum a nemine refelli posse* la comunicò fornendone il rapporto,

[27] *.. car ce fut un sujet de rire en France, de voir que Toricelli s'attribuoit, en 1644, une invention qui étoit publiquement et sans contestation réconnue depuis huit ans pour être de M. de Roberval, et dont il y avoit, outre une infinité de témoins vivans, des témoignages imprimés, et entre autres un écrit de M. Desargues, imprimé à Paris au mois d'aoû 1640..*, [27, p.338].

$\frac{11}{18}$, con il volume del cilindro circoscritto; e Roberval "prontamente" inviò il valore x esatto: [28] scrivendolo essere $x = (\frac{3}{4} - \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^2})$,[29] Qui Pascal non critica il metodo seguito ma solo menziona la differenza; e neppure Roberval, nella citata lettera dell'1 gennaio 1646, inviò il metodo seguito: oltre al risultato [29] aggiunse solo, *sprezzante*, che se fosse stato vero avrebbe implicato l'assurdo: $\pi = \frac{12}{\sqrt{15}} \simeq 3.098..$ (risultato della "equazione" per π^2 ottenuta scrivendo $x = \frac{11}{18}$)!

Chiusa la parentesi di aspra critica a Torricelli la storia continua con la serie di questioni sulla cicloide da lui stesso risolte dopo che, trascorsi 14 anni dalla prima pubblicazione sulla quadratura, era ritornato al problema constatando che ne risultavano vari ancora aperti e difficili. E pertanto aveva deciso, dopo averne risolto uno, di bandire il menzionato premio proponendone vari altri.

La "*Histoire de la Roulette*" si conclude con il riassunto e puntualizzazione di 'chi ha fatto cosa' (secondo Dettonville). [30]

---

[28] *Non proprio prontamente*: $\frac{11}{18}$ è nella lettera di Torricelli a Mersenne del 1 maggio 1644, mentre il valore esatto è nella lettera di Roberval a Torricelli del 1 gennaio 1646! Come riferisce Pascal, senza dire se oltre al numero esatto, abbia anche inviato il metodo seguito per ottenerlo: omissione interessante considerata l'abitudine di Roberval di non comunicare i suoi metodi, [16, p.36]. Il metodo è però descritto in [7, p.261-266], pubblicato postumo dopo il 1682, cfr. prefazione [7].

[29] Invero dalla lettera di Roberval a Torricelli del 1 gennaio 1646 si legge, [23, p.349]: *Si ex tribus quadrantibus quadrati dimidiae basis, dematur tertia pars quadrati altitudinis; erit ut reliquum ad ipsum dimidiae basis quadratum, ita solidum Trochoidis circa axem conversae, ad Cylindrum ejusdem basis ejusdemque cum ipso solido altitudinis.* Ossia, supposta qui sempre la cicloide generata da un cerchio di raggio 1, ricordando che (quindi) l'altezza al centro del solido è 2 e la base del solido è un cerchio di raggio π, letteralmente: *Se dai tre quarti, ($[\frac{3}{4}]$), del quadrato della metà della base, ($[\pi^2]$) si sottrae la terza parte del quadrato dell'altezza, ($\frac{1}{3}2^2$), il risultato starà al quadrato della metà della stessa base ($[\pi^2]$), così il solido della cicloide, ($[\pi(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3})]$, [18]* e seguente appendice*), starà al [volume del] cilindro della sua base e della sua altezza ($[2 \cdot (\pi \cdot \pi^2)]$)*, e dice che il calcolo è difficile, ma fu ben controllato dai *Clarissimis Viris Academiae Mathematicae Parisiensis* e non dà ulteriori dettagli.

[30] *Que le premier qui a remarqué cette ligne en la nature, mais sans en pénétrer les propriétés, a été le P. Mersenne. Que le premier qui en a connu la nature, trouvé les touchantes, mesuré les plans et les solides, et donné le centre de gravité*

6 Commenti su l'*Histoire de la Roulette*, Wallis e Dati.

Dopo la scadenza dei termini del concorso, rapidamente il lavori inviati furono esaminati: fu escluso il P. Lallouère, noto matematico gesuita, che aveva inviato un testo che Pascal guardò subito, essendo stampato; e subito comunicò al candidato che non conteneva altro che quanto trovato da Roberval. E, come già succederebbe ancora oggi, ne risultò un lungo scambio epistolare, [27, p.349].

Eliminato il Lalluouère e anche altri candidati, *c.f.r.* le *Reflexions* in [27, p.328], facilmente giudicati non idonei, rimase un solo concorrente: il celebre J.Wallis, professore a Oxford. La giuria dopo accurato esame concluse che nel suo lavoro, a parte errori di calcolo, in un punto importante il metodo usato non era corretto. Quindi anche questo candidato fu eliminato. Risulterà: *De l'examen et du jugement des écrits envoyés pour les prix proposés publiquement sur le sujet de la roulette, où l'on voit que ces prix n'ont point été gagnés, parce que personne n'a donné la véritable solution des problèmes.*, [27, p.349].

Protesterà, e Pascal riporta la discussione in dettaglio, [27, p.352], dal suo punto di vista.

Dopo "*Histoire de la roulette*", Pascal scrive anche un "*Récit*", ossia un verbale dettagliato, dell'esame dei lavori ricevuti per il premio, e riguardo al lavoro di Wallis scrive, [27, 351], che *il n'avoit trouvé, ni la véritable dimension des solides autour de l'axe, ni le centre .... qui étoient proprement les seuls problèmes proposés* .

E continua *On jugea aussi que ces erreurs n'étoient point de calcul, mais de méthode,...*, *... Et on remarqua qu'une de ses erreurs les plus considérables consiste en ce qu'il raisonne de certaines surfaces indéfinies en nombre, et qui ne sont pas également distantes entre elles, de même que si elles l'étoient;...* e

du plan et de ses parties, a été M. de Roberval. Que le premier qui en a mesuré la ligne courbe, a été M. Wren. Et qu'enfin j'ai trouvé le centre de gravité des solides et des demi-solides de la ligne et de ses parties, tant autour de la base, qu'autour de l'axe, le centre de gravité des surfaces, demi-surfaces, quarts de surface, etc., décrites par la ligne et par ses parties, tournées autour de la base et autour de l'axe et la dimension de toutes les lignes courbes des roulettes allongées ou accourcies, [27, p.343].

poi *C'est ce qui le mène à comparer, comme nombre à nombre, des quantités .. non commensurabili* (come diremmo oggi).

E degli altri lavori, ricevuti ma presentati fuori concorso dagli autori stessi, loda quelli di Huygens e, in particolare, la determinazione di Wren della lunghezza dell'arco di cicloide. Ma *dopo la lode* a Wren dice anche che, appena lo ebbe menzionato come problema a Roberval e Fermat, questi lo risolsero immediatamente: un messaggio *sicuramente inopportuno*; seguito, nel resoconto finale, dal riassunto delle regole del premio e dal riassunto della storia della cicloide, già menzionato.

Poco dopo (gennaio 1659) appaiono le sue soluzioni alle domande proposte nel concorso indetto nell'agosto 1658, [27, p.364]: le scrive ancora con lo pseudonimo "Amos Dettonville", e descrive in dettaglio il metodo che segue e i suoi risultati; che poi illustra ancora presentandoli in modo alternativo, [27, p.431].

Wallis continuerà a commentare il risultato del concorso e il giudizio della giuria riguardo allo studio della cicloide, riferendosi alla avvenuta pubblicazione, gennaio 1659, delle soluzioni di Pascal, [27, p.362,431], ai problemi del concorso.

Un'estesa critica e un'accurata e strenua difesa di Torricelli da parte di Wallis è riportata nel preambolo del *Tractatus Posterior* di Wallis, commentato in [17]. E sulla stessa linea, ma con molti più dettagli e supporto di documenti, si trova la puntuale analisi della "*Histoire de la Roulette*" da parte di C.Dati, [6]. E molti altri difensori di Torricelli, dopo Wallis e Dati, interverranno, ad esempio in [4].

Subito Wallis allude al fatto che Pascal ha avuto il vantaggio di vedere, prima di dare le sue soluzioni, i lavori sui problemi da lui proposti. E prima di procedere prega il *tres docte personnage* (ossia Dettonville = Pascal) di non accusarlo di plagio qualora trovi che, in quel che scrive, vi siano similitudini con i suoi scritti, 'come gà fece per Torricelli dopo tanti anni dalla sua morte'.

Chiede anche di non cercare di privarlo di risultati da lui stesso conseguiti qualora ottenuti anche da Pascal e Roberval i quali, pur non pubblicando i loro, non sopportano che altri, ignari di questi, pubblichino i propri. Avrebbe preferito che l'Autore della "*Historiette ...*" non avesse insultato Torricelli, sempre considerato uno dei migliori matematici, al quale non si vede perché debba essere proibito di trovare l'area della cicloide, curva che non ha neppure detto di aver inventato: e, quindi, non c'è bisogno di insultarlo per rivendicare priorità.[17]

E mancano, sostiene Wallis, [17], e documenta Dati, [6], le prove dell'esistenza fra le carte di Galileo delle dimostrazioni, allora note, consegnategli da Beaugrand; inoltre la su menzionata lettera, che Pascal dichiara in suo possesso, in cui Torricelli riconosce la priorità di Roberval, è conservata "come un tesoro" ma non è esibita e ciò può dar luogo a confusione.

Domanda come mai, alla pubblicazione del libro di Torricelli, avvenne a Pascal di ignorare il lavoro di Roberval credendo originale il contributo dell'allievo di Galilei (come Pascal stesso riconosce aver creduto "*.. et je l'avois été moi-même*, [27, p.339]), mentre a Parigi suscitava l'ilarità dei matematici. E l'analisi di Wallis continua formulando molte altre critiche al "molto celebre personaggio".

Le affermazioni e le critiche di Wallis sono corroborate da molti documenti aggiunti nella lettera di "Timauro Antiate" (pseudonimo di C. Dati) a "Filalete".[31] pubblicata in [6]. In questa fra l'altro viene esplicitamente menzionato, smentendo Pascal, che le carte di Galileo non furono consegnate a Torricelli: *Non è vero altresì che le scritture del Galileo venissero dopo la morte di esso nelle mani del Torricelli, perché furono sempre e sono ancora presso agli eredi*,[6, p.9]. Per un più recente e molto dettagliato commento alla "*Histoire..*" si veda anche [4].

Oltre a una analisi punto per punto della "*Histoire..*", sempre appoggiata su documenti, Dati cita e documenta molti dettagli di lettere scambiate fra Torricelli, Mersenne e Roberval: da queste emergono importanti particolari.

Ad esempio cita la lettera in cui Cavalieri si felicita con Torricelli per la sua quadratura della cicloide (che quindi consente di datarla a prima dell'aprile 1643), [23, p.122]. E sottolinea che la prima lettera a Roberval di Torricelli, dell'ottobre 1643, ricevette risposta da Roberval solo più di 2 anni dopo, e nel frattempo ci furono molte lettere, scambiate fra Torricelli e Mersenne e comunicate a Roberval, in alcune delle quali Torricelli descriveva i suoi risultati e, a richiesta di Mersenne, aveva inviato la sua soluzione completa (con le dimostrazioni, [23, p.202]) anche a problemi che a Parigi consideravano aperti (esclusa però la determinazione del baricentro della semi-cicloide).

Pone l'accento su alcune contraddizioni nel comportamento di Mersenne, a volte incoerente, dalle quali non emerge come "super partes" nel suo ruolo, svolto per lunghi anni, quale intermediario fra Torricelli e Roberval.

[31] Alessandro Filalete è per antonomasia "amante del vero", e credo sia qui riferito come tale (nella realtà diresse la scuola di medicina a Laodicea (Frigia) nel I^o secolo A.C.).

Infine Dati informa che, con lettera del 1 gennaio 1646, Roberval finalmente risponde alla lettera di Torricelli del 1643 e nel riportarla per esteso, [6, p.12], dice che nel leggerla occorre tener conto *che ella è scritta dopo due anni, in un tempo solo, e non distintamente in tempi diversi, come se tre lettere fossero che a tre cose separatissime rispondessero, in maniera che quando si riscriveva alla prima, non si avessse notizia delle altre il che veramente non è.*

Questa lettera di Roberval, che Dati riporta, datata 1 gennaio 1646, pur aggressiva, ha piuttosto il tono di una discussione scientifica in cui Roberval rivendica, certo con forza e anche con molta durezza, le sue ragioni sulla priorità dei suoi studi.

A questa di Roberval, Torricelli risponde con fermezza [23, p.381,389],[6], il 7 luglio 1646, rivendicando la sua indipendenza, sempre, e priorità in alcuni casi (anche su problemi non concernenti la cicloide), e affermando l'appropriazione di alcuni suoi risultati da parte di Roberval.

È molto importante notare che la lettera di Roberval, (1 gennaio 1646), riportata da Dati in [6, p.12] e in [23, p.349], alla quale fu risposto da Torricelli il 7 luglio 1646, *NON è lo scritto o "lettera", cit., che, senza data, si trova invece* (credo pubblicata per la prima volta) *nella selezione di opere raccolte dalla "Académie Royale des Sciences", [7, p.284]*, nel 1693.

Quest'ultima è molto più aggressiva e, come già affermato, la si può riconoscere come sorgente delle accuse nella *Histoire de la Roulette*; inoltre nella selezione dell'Accademia è preceduta dalla citata lettera di Roberval a Mersenne, [7, p.278], e dalla prima lettera di Torricelli a Roberval, dell'ottobre 1643, [7, p.283], e quindi può essere erroneamente interpretata come risposta a quest'ultima. È *senza data* e certo è databile dopo il gennaio 1647, come risulta dalla sua riproduzione in [23, p.487]: ed è assai improbabile che la lettera senza data di Roberval sia mai stata ricevuta da Torricelli, [6].

Per un altro interessante punto di vista sulla *Histoire de la Roulette*, si veda [10]. Qui la lettera di Dati è considerata 'poco argomentata', ma molti aspetti delle critiche di Wallis e Dati sono esaminati in dettaglio insieme alle relazioni della *Histoire ..* con altri matematici.

Così si deve pensare che l'ultima relazione fra i due geometri risalga alla citata lettera con cui Torricelli rispose a Roberval il 7 luglio 1646. Si può anche osservare che la lettera di Torricelli dell'ottobre 1643 è giustamente stata oggetto di molto interesse, [18], ma non confrontabile con quello verso le due risposte, con e senza data, di Roberval.

Nel suo commento alla *Histoire ..*, Dati riferisce che sia Torricelli che Roberval, [6], si proponevano di scrivere la loro versione della storia dei problemi sulla cicloide, sulle parabole e altro: dice anche, [6, p.18], che Torricelli aveva già iniziato la scrittura e ne cita un breve brano, tratto da [23, p.28].

Si deve pensare che la aggressiva (e lunghissima) "lettera" di Roberval, tramandata dalla "*Académie Royale des Sciences*", senza data, sia proprio parte del progetto di Roberval, cui Dati accenna, [6, p.19]; e che la lettera, forse ancora in forma non definitiva, non fu spedita ne' divulgata per la sopravvenuta scomparsa di Torricelli.

Scrive Dati: *ricevuta la lettera di Torricelli il Roberval fece, o cominciò, o sparse voce di fare una, piena, dotta, risentita, e pungente risposta, e il P. Mersenno facendo il furiere n'empiè il mondo d'espettazione, e particolarmente scrivendo al Torricelli sotto dì primo di marzo 1647 d'avere a mandarne copie per tutta Italia*, [6].

Si osservi che lo stesso Mersenne era consapevole delle gravi accuse, e della loro forma, che Roberval preparava: e anche avvertì Torricelli, [23, p.437], che la lettera di prossimo arrivo sarebbe stata forse poco cortese e, apologeticamente, scrisse *comunque ricorda sempre che io non approvo affatto il suo stile aggressivo, dal quale noi tutti, sebbene amici, non lo possiamo distogliere*.[32]

Dall'opuscolo di Dati emergono le ragioni di Torricelli e la sua indipendenza scientifica e che, invece, si può addirittura parlare di plagio da parte di Roberval, complice Mersenne, su Torricelli con ben più argomenti di quelli usati da Roberval.

Le menzionate accuse a Torricelli gettano un'ombra su Pascal che, ancor molto giovane, ma ormai gravemente infermo e a meno di tre anni dalla fine, si era dedicato al problema della cicloide per distrarsi dalle sofferenze dovute alla sua infermità: forse non valutò appieno il peso delle sue accuse, o la necessità di almeno addurre prove in loro appoggio, accettando e riportando acriticamente affermazioni tratte quasi letteralmente dalla lettera senza data di Roberval, [23, p.487] (scritta dopo l'estate del 1647, quasi certamente mai spedita, e dalla quale Torricelli non aveva avuto modo di difendersi).

Roberval, sebbene eccellente matematico, fu coivolto in altre polemiche; e anche, interessato in esperimenti sul vuoto, fu coinvolto in accese discus-

[32]"*dummodo semper memineris me stylum illum acerbiorem nullatenus probare, a quo nos omnes, licet amici, non possumus eum divellere*".

sioni anche con Descartes, [36], ad esempio per voler *établir l'impossibilité du mouvement sans le vide.*

7 "Il paralogismo sul $\frac{11}{18}$"

È utile seguire nella sua evoluzione temporale la discussione sul rapporto fra i volumi del solido di rotazione della cicloide attorno all'asse e quello del volume del cilindro circoscritto, che come visto in Sec.6 e 7, ha giocato un ruolo importante nello scambio di lettere attorno alla cicloide.

1 ottobre 1643: Nella citata lettera a Roberval, [18], Torricelli aveva dichiarato di non saper nulla sui solidi di rotazione della cicloide, di fatto riconoscendo di aver difficoltà sul valore dei volumi dei solidi di rotazione generati dalla cicloide, ma elencando altre proprietà da lui trovate. Suscitando plauso ma anche dubbi, espressi poi da Mersenne.

13 gennaio 1644: Mersenne domanda dettagli su alcune proprietà della cicloide, [23, p.161], e comunica, senza dimostrazione, il risultato di Roberval sul rapporto fra i volumi del solido di rotazione della cicloide attorno alla sua base e del cilindro circoscritto: $\frac{5}{8}$. Torricelli, dopo essersi lamentato della (proverbiale) illeggibilità della calligrafia di Mersenne, risponde il

1 maggio 1644, [23, p.173]. Una delle novità sottolineate in questa risposta è l'esistenza di una relazione fra la conoscenza del baricentro di una figura piana e il volume del solido ottenuto per rotazione attorno ad una retta del suo piano: relazione che Torricelli aveva appreso da Cavalieri, [8, p.231], che gli aveva comunicato un notevole teorema di Pappus (poi formalizzato da Guldin). È un teorema che collega il volume V di un solido di rotazione di una figura piana attorno all'asse y, all'ascissa b del suo baricentro e alla sua area Δ.[33]

Così Torricelli aveva ritrovato il menzionato rapporto ($\frac{5}{8}$): in accordo con il risultato trovato da Roberval. E nel successivo *De sphaera et solidis sphaeralibus libri duo*, pubblicato nel 1644 (e in parte noto a Parigi dall'ottobre precedente) Torricelli afferma che A.Nardi trova che il rapporto fra

[33]Il teorema di Pappus (facilmente derivabile in linguaggio moderno) è noto come teorema di Pappus-Guldin (il quale ultimo lo discusse formalmente come teorema). Dice, in particolare: *Se $f(x) \geq 0$ è una funzione e la curva $y = f(x)$ delimita la figura piana $(x, y) : x \in [0, \ell], y \in [0, f(x)]$, allora il volume V del solido di rotazione della figura, attorno all'asse y, è collegato alla ascissa b del baricentro della figura piana e alla sua area Δ da $V = 2\pi b\Delta$.*

volume del solido di rotazione (*dell'intera cicloide*) attorno alla tangente parallela all'asse, (una delle due), e il volume del cilindro circoscritto è $\frac{3}{4}$, [35, p.122].[34]

Infine ispirato dal citato teorema di Pappus comunica una determinazione approssimata per l'ascissa del baricentro della semi-cicloide ottenendo il rapporto $\frac{11}{18}$ fra il volume del solido di rotazione della cicloide attorno all'asse e quello del cilindro circoscritto.

Invero un valore di questo rapporto seguirebbe dalla affermazione di Torricelli sulla relazione fra baricentro di una figura piana e volume del suo solido di rotazione (già usata da Nardi e Torricelli stesso) menzionata a Mersenne, se applicata alla *semi-cicloide* appoggiata sull'asse: pur di avere il valore corretto dell'ascissa b del suo baricentro. In questa lettera non si accenna a che il rapporto possa essere approssimato, tuttavia è certo che venne considerato tale fin dal 1644, come risulta addirittura dalla successiva critica di Pascal nella "*Histoire ...*", prima di chiamarlo "errore".

24 giugno 1644, [23, p.195]: Mersenne scrive "*Dubitat noster Robervallus an mechanice tantum centra gravitatis Cycloidis aut Trochoidis invenerisse, quae Geometrice falsa suspicatur, docebis num istius rei demonstrationem habeas*". [35] Il dubbio è forse dovuto alla non conoscenza, da parte di Roberval, del teorema di Pappus, [8, 231]. E questo dopo aver scritto nella stessa lettera che Roberval gli concede la priorità su varie invenzioni, fra cui il baricentro della cicloide (che taglia l'asse, di altezza 2, come $\frac{7}{5}$).

luglio 1644: Torricelli risponde, [23, p.202], e invia le dimostrazioni richieste con qualche aggiunta, ma, turbato (*victus*) dalle parole "*Dubitat...*", tace su quella da cui dipende la teoria del solido attorno all'asse. Dichiara, inoltre, che sui baricentri dei solidi delle cicloidi non sa nulla e nulla si attende di sapere fino a quando 'quei punti' in dubbio resteranno nascosti alla sua comprensione.

---

[34] Applicando la formula di Pappus, $V = 2\pi b\Delta$, cfr nota precedente, nel caso di Nardi, per la cicloide, si ha $b = \pi$ (ovvio) e $\Delta = 3\pi$ (noto), e quindi $V = 6\pi^3$ mentre il volume del cilindro osculante è $V_o = 8\pi^3$ ossia $\frac{V}{V_o} = \frac{3}{4}$.

[35] Il 'meccanicamente' è un riferimento al metodo, molto usato da Torricelli, di determinare i baricentri immaginando la figura in un piano verticale e appendendo ad essa pesi opportuni (idealizzati come segmenti paralleli, pesanti secondo la loro lunghezza) in modo da determinare il centro di gravità come il punto ove il momento delle forze risulta nullo. La qualifica induce a pensare che il procedimento sia non rigoroso, il che non è vero.

Il testo di questa lettera deve essere interpretato: dice di inviare le dimostrazioni sui baricentri delle cicloidi e semi-cicloidi, sebbene avesse pensato di non comunicarle ad alcuno: ne aggiunge una, ma ne tace un'altra da cui dipende l'analisi del solido di rotazione attorno all'asse. Il rapporto $\frac{11}{18}$ dipende proprio da questa analisi: ritengo però, anche dopo aver considerato le lettere successive e [6], che si riferisca proprio a difficoltà di calcolo del baricentro b della semi-cicloide; mentre la relazione fra b, l'area Δ della semi-cicloide e il volume V del solido generato dalla sua rotazione attorno all'asse, cioè il teorema di Pappus, è fra le dimostrazioni comunicate. Che si devono intendere essere invece descritte in dettaglio: e, ben più tardi, lo ricorderà a Mersenne, dopo che Roberval avrà dichiarato di aver ottenuto, e in precedenza, tutti i risultati di Torricelli (almeno sulla cicloide), [23, p.399,402]. [36] La successiva affermazione di non sapere alcunché del .. *centrum gravit. Solid. Cycloidalium nihil scio nihilque spero unquam adeo puncta illa meo iudicio abdito latent...*, si riferisce invece ai baricentri dei solidi, non a quelli delle figure piane (ad esempio ai solidi generati da rotazioni di angoli $\leq 2\pi$): che Pascal considera un problema aperto ancora nel 1658, [27, p.339].

10 gennaio 1645: Mersenne esprime il suo forte desiderio che la nuova teoria di Torricelli sui baricentri (che, anche ignorando i solidi, includeva comunque ancora quella delle figure piane associate alla cicloide) sia pubblicata: la considera a tal punto che, anche a sua cura (*propriis impensis*), ne seguirebbe l'edizione, al ritorno a Parigi, se Torricelli volesse, [23, p.249].

febbraio 1645: nella lettera a Carcavi, [23, p.280], Torricelli ammette di aver erroneamente attribuito il valore dei baricentri a solidi parabolici di rotazione: *confesso che centri della gravità dei solidi di esse parabole rivoltate intorno all'asse non stanno con quelle proporzioni che io avevo accennate*; e, credo scherzosamente avendo ancora rapporti cordiali con i matematici dell'*Académie* di Mersenne, continua: *ma era pur necessario che fra molti teoremi veri da me dimostrati inserissi alcuno di maniera tale che potessi accorgermi altri ne aveva dimostrazione.*

Dunque qualcosa nel calcolo dei baricentri di solidi di rotazione (ma non dei baricentri della figure piane) era per Torricelli incompleto: si può pensare che sia collegato all'errore sul *volume* del solido di rotazione della cicloide?

[36] Torricelli ricorderà di aver inviato, il 7 luglio 1646, a lui e a Roberval il testo del risultato e del suo reciproco: ossia come dedurre il volume del solido di rotazione intorno all'asse dall'ascissa del baricentro e viceversa: *..sed etiam methodum meam, inversa tantum propositione, inter sua numerat, quod egerrime fero....*

cioè a un errore sul calcolo dell'ascissa b del baricentro della semi-cicloide? o piuttosto che il valore di b fosse dichiaratamente approssimato?

1 gennaio 1646: Roberval finalmente risponde alla lettera del 1 ottobre 1643, su citata, e *sprezzantemente* comunica che il valore di $\frac{11}{18}$ è errato, cfr. Sec.5.

Quando Roberval aveva trovato la soluzione corretta? come argomenta K.Hara, [16], la si deve collocare poco prima della fine 1645: perché, nelle varie lettere da parte di Mersenne a Torricelli, dal maggio 1644 al dicembre 1645 (e quindi prima del gennaio 1646), non viene menzionato come errore il valore inviato da Torricelli.

Ma dalle lettere di Mersenne e Roberval risulta anche che i baricentri dei solidi di rotazione della cicloide erano loro noti '*da tempo*', [6, p.17]. Tuttavia Mersenne emenda il rapporto $\frac{11}{18}$, fornendone anche il valore esatto, solo nel 1647, [26, III,p.71]. E Torricelli domanderà conto di questo conflitto di date, [6, p.17].

Il metodo usato da Torricelli, infatti, non è menzionato da Mersenne e Roberval, ma è riferito come approssimato nella "*Histoire..*" di Pascal: "*Ne pouvant donc y réussir, il en envoya une solution assez approchante,..*, [27, p.339].

7 luglio 1646: nella sua lettera a Mersenne, scritta lo stesso giorno della sua risposta alla tardiva lettera di Roberval, cfr. precedente Sec.6, Torricelli è piuttosto contrariato (su questo punto, come anche su altri).

Ricorda che Archimede aveva sostenuto che $\frac{\pi}{4} = \frac{11}{14}$ come valore approssimato. E poi quasi in tono di sfida, riferendosi al $\frac{11}{18}$ che qui chiama "paralogismo" (ossia ragionamento errato ma non intenzionale), [23, p.404], dice che non ritiene di doverlo spiegare, e: "*Quaero ab ipso* [Roberval] *unde nam putet me habuisse rationem quam ad numeros 11 et 18 reducebam?*", e conclude "*se invero* [lui] *si riferisce a quella affinché di nuovo io invii di mia iniziativa le dimostrazioni,* [lui] *si sbaglia*". Occorre ricordare che a questa data non era stata ancora pubblicata la dimostrazione di Roberval del dato esatto (ma ne era solo stato dichiarato il suo valore).

Allude qui alla relazione, appena menzionata, fra V, b, Δ, che fu tra le informazioni inviate a Mersenne, su richiesta di Roberval e Mersenne, nel lontano luglio 1644? Risolutive, a meno di banali errori di calcolo. Ed è credibile che così fu dal momento che Torricelli sottolinea, fin dalla lettera a Mersenne del luglio 1645, la generalità delle sue affermazioni e la intima relazione da lui usata (e comunicata) fra calcolo di baricentri di figure piane e volumi dei loro solidi di rotazione.

Il riferimento all'invio di dimostrazioni poi è anche un riferimento ad altre su cui rivendicava priorità, e che inviò a richiesta di Mersenne, alle quali Roberval (dopo ben 2 anni) rispose dicendo che erano già state trovate da lui, [6].

Da qui sembra seguire che le precedenti comunicazioni su questo rapporto e il valore $\frac{11}{18}$ menzionato, fra altri dati, in [23, p.173] (1 maggio 1644), riguardino un risultato di tentativi di approssimazioni ai baricentri di figure piane (e quindi, per la teoria di Pappus, ai volumi dei loro solidi di rotazione). E, visto il contributo di Nardi, l'unica approssimazione di Torricelli non può che aver riguardato la stima del baricentro della semi-cicloide.

Si conclude che il paralogismo sia stato un problema di calcolo e non di metodo. E dopo le contestazioni di Roberval del gennaio 1646 sul valore $\frac{11}{18}$, Torricelli ricorderà nella lettera a Mersenne del 7 luglio 1646, [23, p.382]: *In illa demonstratione mea ostendebatur a me, dato Centro grauitatis, & mensura alicuius plani (quod satis erat ad intentum meum) ipsius solidum demonstrare.*

Forse ulteriori dettagli sulla controversia potrebbero emergere dalla conoscenza del procedimento realmente seguito da Torricelli, che non si trova nelle sue opere, per ottenere il rapporto $\frac{11}{18}$: lo studio dell'opera "*Scene*" di Antonio Nardi, Manoscritto Gal. 130, Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze, potrebbe essere la chiave alla comprensione del paralogismo: come detto, Nardi e Torricelli molto probabilmente usarono lo stesso metodo.

8 Appendices

A proposito della cicloide, i problemi posti nel concorso possono oggi essere tradotti molto facilmente in problemi elementari di calcolo infinitesimale. Conviene citare i seguenti, non solo a titolo di esempio ma anche perché può essere utile averli presenti a chi voglia cimentarsi a risolverli a mezzo della teoria di Cavalieri, di Roberval o di Torricelli stesso, [2, 30] o [33, p.85].

A: **L'analisi della cicloide in forma moderna.**

1) Equazione parametrica della semi-cicloide (raggio della ruota = 1)

$$x(t) = \pi - t + \sin t,\ y(t) = 1 - \cos t, \quad t \in [0, \pi] \tag{1}$$

si immagina la ruota rotolare da destra a sinistra; mentre la "semi-compagna" (*i.e.* curva interna, detta anche 'socia') ha equazione $x(t) = \pi - t, y(t) =$

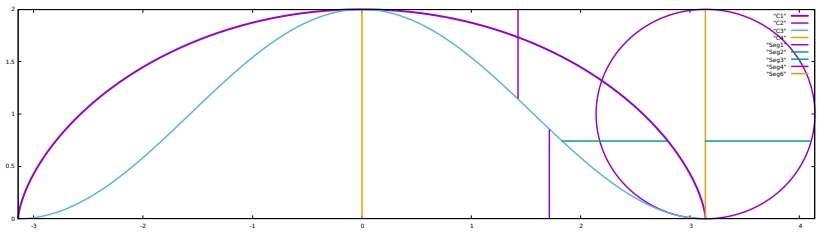

Figura 2: cicloide, compagna, ciclo generatore e indivisibili corrispondenti

$1 - \cos t$. Si noti anche la simmetria della semi-compagna per riflessione attorno all'asse $y = 1$ seguita da riflessione attorno all'asse $x = \frac{\pi}{2}$ (suggerita in figura dai due segmenti verticali): che implica che la semi-compagna divide in 2 l'area (2π) del rettangolo che contiene la semiciloide.

2) Area della regione verticale fra le ascisse $[x(a), x(b)]$ corrispondenti a $t \in [a, b] \subset [0, \pi]$ ossia $x \in [x(a), x(b)]$:[37]

$$\Gamma_{a,b} = \int_a^b y dx = \int_a^b (1 - \cos t)^2 dt \;\Rightarrow\; \Gamma_{0,\pi} = \frac{3}{2}\pi \tag{2}$$

mentre la semi-compagna ha area: $\int_0^\pi (1 - \cos t)dt = \pi$; e i corollari:

3) Area della regione orizzontale $V_{\alpha,\beta}$ con $x > 0, y \in [\alpha, \beta]$

$$V_{\alpha,\beta} = \int_\alpha^\beta x dy = \int_a^b (\pi - t + \sin t) \sin t \, dt \tag{3}$$

4) Lunghezza dell'arco di semi-cicloide con $t \in [a, b]$

$$\lambda_{a,b} = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_a^b 2 \sin \frac{t}{2} \, dt \tag{4}$$

e quindi, se completo, $\lambda_{0,\pi} = 4$.

5) Volumi dei solidi di rotazione dell'intera cicloide attorno alla base, B, e della semi-cicloide attorno all'asse, A:

[37] Roberval 1634, Descartes e Fermat 1638, Torricelli 1643.

$$
\begin{aligned}
B &= \int_{-\pi}^{\pi} \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^{\pi} (1-\cos t)^3\, dt \\
A &= \int_0^{2} \pi x^2 dy = \pi \int_0^{\pi} (\pi - t + \sin t)^2 \sin t\, dt
\end{aligned}
\tag{5}
$$

quindi $B = 5\pi^2$ mentre il volume del cilindro osculante è $8\pi^2$; e $A = \pi(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3})$ mentre il volume del cilindro osculante è $2\pi^3$: i rapporti dei volumi dei solidi ai relativi cilindri sono, rispettivamente, $\frac{5}{8}$ e $(\frac{3}{4} - \frac{4}{3}\frac{1}{\pi^2}) \simeq \frac{11}{18}$.

6) Ordinata y_B del baricentro della regione delimitata dalla intera cicloide (di area 3π), e ascissa x_A del baricentro della semi-cicloide

$$
\begin{aligned}
y_B &= \frac{1}{2\Gamma_{0,\pi}} \int y dx dy = \frac{1}{3\pi} 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1-\cos t)^3 dt = \frac{5}{6} \\
x_A &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t + \sin t)^2 \sin t\, dt
\end{aligned}
\tag{6}
$$

si noti la relazione fra y_B e x_A e, rispettivamente, i solidi di rotazione in 5). etc. Tutte le espressioni possono quindi essere algebricamente ridotte a elementari integrali definiti di polinomi in $t^n \sin^m t$, $0 \leq n, m$; si noti che alcuni integrali sono uguali: le identità riflettono il teorema di Pappus. In questo modo Newton studiò le proprietà della cicloide, [20].

B: Quadratura della parabola secondo Torricelli

Come esempio, e illustrazione del metodo degli indivisibili di Cavalieri, conviene citare, due casi presentati da Torricelli.

Il primo è la quadratura della parabola, [34, p.57]. Considerando il caso di un segmento di parabola ($y = -x^2$) delimitato da una retta ortogonale al diametro della parabola e dalla parabola stessa in fig.3:

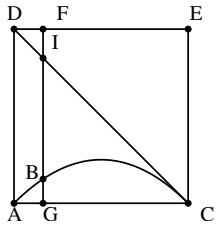

Figura 3: Torricelli: quadratura parabola, metodo degli indivisibili

Si notano le seguenti proporzioni: $DA : IB = DC^2 : IC^2$, *dalla equazione della parabola* $y = -x^2$, e $DC^2 : IC^2 = DA^2 : IG^2$ perché DAC simile IGC; quindi, essendo $DA \equiv FG$:

$$DA : IB = FG^2 : IG^2 \tag{7}$$

Si immagini che la linea FG si muova orizzontalmente da DA a EC: mentre IB 'spazza' il trilineo $ABCD$, e la sua lunghezza $y_t = IB$ varia da DA a 0, allo stesso tempo la linea IG spazza il triangolo DAC e la sua lunghezza $x_t = IG$ varia da DA a 0. Quindi, componendo le proporzioni, la (7) implica:

$$\frac{\sum_t DA}{\sum_t y_t} = \frac{\sum_t FG^2}{\sum_t x_t^2} \tag{8}$$

e denotando:

P =area del segmento di parabola,

Q =area rettangolo AE, $\quad \Theta$ = area trilineo $ABCD$,

Λ =volume cilindro retto con base cerchio di raggio DA e altezza AC,

Γ =volume del cono retto con base cerchio di raggio DA e vertice C

la Eq.(8), moltiplicando a destra numeratore e denominatore per πAC, si legge: $\frac{Q}{\Theta} = \frac{\Lambda}{\Gamma} \equiv \frac{\pi AD^2 \cdot AC}{\pi AD^2 \cdot AC/3}$ ossia $\Theta = \frac{Q}{3}$. Quindi $P = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{3} = \frac{1}{6}Q$. Inoltre dalla definizione della parabola segue che il triangolo isoscele iscritto nel segmento di parabola ha area $T = \frac{Q}{8}$ e dunque $P = \frac{4}{3}T$, come già dai metodi di Archimede e Cavalieri. È una mirabile dimostrazione.

Se si obietta alle somme $\sum_t$ ove t varia con continuità da 0 a AC si deve pensare, come Torricelli, a una somma su infinitesimi: discretizzando la somma in somma su t interi (fra 0 e AC/ε) e, moltiplicando numeratori e denominatori per ε. In tal modo tutte le somme diventano (nel limite $\varepsilon \to 0$) integrali nel senso moderno e il risultato è ovvio: così pensavano Torricelli e Roberval, [7, p.195], mentre Cavalieri non pensava a somme, né (forse) le avrebbe qui scritte: ma non sollevò obiezioni quando Torricelli studiò il problema nella forma semplificata su esposta, [14, 2], [38]Il caso di un segmento parabolico con base non ortogonale al diametro è analogo, [32].

[38]Torricelli commenta: *Alia quoque ratione parabolam quadrabimus, demonstratis prius, quà fieri poterit brevitate, indivisibilium principijs. Declinabimus autem ab immenso Cavalieranae Geometriae oceano, minori audacia radentes terram. Qui volet, haec omnia videre poterit (in fonte dicam, an in pelago ?) circa medium secundi libri Geometriae Indivisibilium Cavalerij.*

Nel metodo di Torricelli si confrontano quantità "non omogenee", quali coppie di segmenti (DA, IB) e quadrati di segmenti (FG^2, IG^2), come descritto. E questo illustra la differenza rispetto al metodo di Roberval, [7, p.195], che evita di confrontare grandezze non omogenee e procede dividendo l'area da quadrare in piccole aree: come dice Roberval stesso nella lettera a Torricelli, [7, p.286], rivendicando una sua possibile priorità su Cavalieri e identificando nella decomposizione di figure in figure omogenee la differenza, che però giudica piccola, rispetto al metodo di Cavalieri (e quindi anche rispetto a Torricelli): *Est tamen inter clarissimi Cavallerii methodum & nostram, exigua quaedam differentia. Ille enim..*[39]

C: Quadratura della cicloide secondo Torricelli

Un secondo esempio è la quadratura della cicloide proposta da Torricelli. Sulla base della Fig.4, si può descrivere il terzo metodo di Torricelli, teorema III in [33, p.90], per il calcolo dell'area della semi-cicloide, rimandando alla ben diversa versione di Roberval al seguente punto D), [7, p.246].

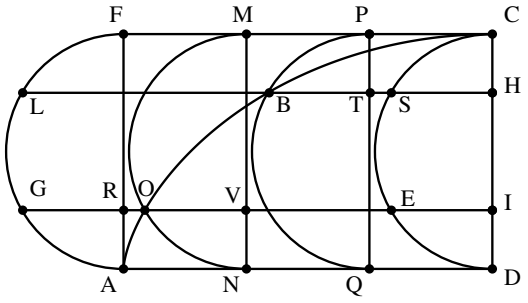

Figura 4: Torricelli: 'III dimostrazione', con metodo degli indivisibili

Si osservano relazioni fra segmenti, archi, semi-cerchi intorno alla semi-cicloide (posto 1 il raggio del cerchio generante):

[39]Questo vuol dire, nel caso di un segmento di parabola di equazione $-L^2 < y < -x^2$, con $x \in [0, L]$ (metà, se $L = 1$, del segmento di parabola considerato in Fig.2), dividere la figura in somma di rettangoli di lati di base nh, $n = 1, 2, 3, \ldots, L/h$ e altezza $((n+1)h)^2 - (nh)^2$, ottenendo che l'area totale è $\sum_1^{L/h} nh \cdot (((n+1)h)^2 - (nh)^2) = h^3 \sum_{n=1}^{L/h} 2n^2 + O = \frac{2}{3}L^3 + O$ ove O diventa nullo quando i rettangoli diventano "indivisibili" ($\lim_{h\to 0}$), cioè è infinitesimo per $h \to 0$, e quindi l'area è $\frac{2}{3}L^3$, procedimento certo molto diverso da quello di Torricelli e anche da quello, che non sarà discusso qui, di Cavalieri: per dettagli sul metodo di Roberval cfr esempio seguente E.

$GO = RV = AN = ON = PB = PC = TH = BS$ perché il semi-cerchio si sposta in orizzontale, *senza strisciare*, quindi alla stessa velocità con cui gira attorno al suo centro.

Quindi come $GO = BS$ anche *omnes lineae* di $FGABCF$ = *omnibus lineis* $ABCEDA$: si immaginano le linee come GO muoversi dal basso in alto spazzando $FGABCF$ il trilineo e le linee come BS muoversi (ad ugual velocità) dall'alto in basso spazzando $ABCEDA$. Quindi le aree di $FGABCF$ e $ABCEDA$ sono uguali (per il principio di Cavalieri).

Pertanto la semi-cicloide divide in parti uguali $CFGADEC$ che ha area del rettangolo $CFADC$ ($= 2\pi$) alla cui metà ($= \pi$) si deve quindi aggiungere l'area del semi-cerchio ($= \frac{1}{2}\pi$) per avere l'area della semi-cicloide ($= \frac{3}{2}\pi$).

Il primo metodo di Torricelli ('teorema I', anche basato sul metodo degli indivisibili) e il secondo metodo "classico" ('teorema II') sono meno semplici. Il metodo di Fermat sulla cicloide è presentato e commentato in dettaglio in [15]. Un metodo di Roberval è esposto nel successivo punto D.

D: Quadratura della cicloide secondo Roberval

In riferimento alla Fig.1, il metodo di Roberval, riportato da Du Verdus, [23, p.184], è più immediato e si basa sull'osservazione che la semi-compagna ha area $Sc = \pi$, perché divide simmetricamente in due il rettangolo (di area 2π) che racchiude la semi-cicloide, e l'area fra semi-compagna e semi-cicloide è uguale alla metà dell'area del ciclo generatore, ossia $Lc = \frac{\pi}{2}$: in formule moderne, invero, $Sc = \int_0^{\pi}(1 - \cos t)dt$ e $Lc = \int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt$.

Il procedimento è una perfetta applicazione e illustrazione del principio di Cavalieri, [14, 2], come anche la quadratura di Torricelli su esposta che, però, è meno elementare in quanto si basa sulla relazione fra il percorso del centro del circolo generatore e l'arco di rotazione del punto fisso sul cerchio. Nell'esposizione di Du Verdus, la Sc si ottiene immaginando la semi-compagna spazzata da un segmento verticale ("indivisibile") di lunghezza η_t $((1 - \cos t))$ che si sposta al variare di t con ascissa $\pi - t$, (Seg1 in figura): Sc è quindi l'area racchiusa dalla semi-compagna. Questa è uguale all'area al di sopra della compagna che al tempo stesso è spazzata dall'indivisibile verticale simmetrico (Seg4). Pertanto le due aree sopra e sotto la semi-compagna sono uguali, per Cavalieri, alla metà dell'area, 2π, del rettangolo che le racchiude: ossia hanno area π. La 'lunella' fra le due curve è spazzata al variare di t dall'indivisibile orizzontale (Seg2) (di lunghezza $\sin t$) che è uguale al secondo indivisibile orizzontale (Seg3) che al tempo stesso spazza il semi-ciclo, e

quindi il semi-ciclo ha la stessa area della lunella, e quindi $\frac{1}{2}\pi$, ancora per Cavalieri. L'area totale della semi-cicloide è allora $\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$, [15]. Si noti che le formule per η_t, λ_t non sono necessarie: per l'argomento appena descritto bastano le definizioni di cicloide e compagna: il resto segue "*ex ipotesi*", come dice Du Verdus.

E: Quadratura della parabola secondo Roberval

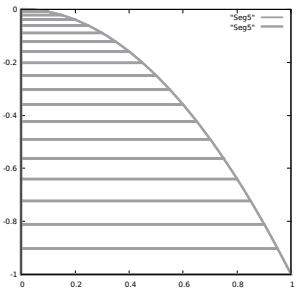

Figura 5: Roberval: parabola, metodo degli indivisibili

Se la quadratura di Roberval della cicloide è conforme al metodo di Cavalieri, la sua quadratura della parabola è invece un esempio tipico di altre quadrature (anche di Fermat, Torricelli, ...) che evolveranno nel moderno calcolo di integrali: in questo caso semplicemente segue quello che si fa quando si approssima l'area esprimendola approssimando un integrale, [30, p.195].

L'asse verticale della semi-parabola (di equazione $y = -x^2$) in fig.4 ha le linee orizzontali ad altezze multiple di una quantità arbitraria h secondo la progressione $1, 2, 4, 9, 16, 25, \ldots, N^2$, mentre le loro lunghezze sono multiple di h^2, secondo la progressione $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, N$.

Il rettangolo (in fig.5 non è disegnata, a destra, la piccola regione trilinea che lo completerebbe) fra l'$n-ma$ riga orizzontale e la successiva ha area che, su n, ha progressione $((n+1)^2 - n^2)n$, in unità h^3, quindi l'area della semi-parabola coperta dai rettangoli è h^3 times $\sum_n ((n+1)^2 - n^2)n = 2\sum_n n^2$ e poichè $\sum_{n=0}^{N} n^2 = \frac{N^3}{3} + O$ segue, per $N = \frac{1}{h}$, se i rettangoli diventano indivisibili e quindi $O \to 0$: area semi-parabola $= \frac{2}{3}$.

Per parabole più generali $y = -x^m$ con m intero si può (ad esempio) usare l'identità combinatoria: $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (n+k) = \frac{1}{(m+1)!} \prod_{k=0}^{m} (N+k)$, che implica $\sum_{n=1}^{N} n^m = \frac{1}{m+1} N^{m+1} + O$. [40]

[40] Come suggerito nella edizione delle lettere di Fermat di P.Tannery, [12,

Dagli esempi elencati si vede come i metodi di quadratura di figure geometriche via gli *indivisibili* siano spesso interpretabili come variazioni sul moderno calcolo di integrali; mentre il metodo di Cavalieri evita ogni collegamento fra indivisibili e infinitesimi, [22, 14, 2]. In proposito Roberval dichiara, cogliendo l'occasione per rivendicare la sua possibile priorità sul metodo degli indivisibili, che il metodo di Cavalieri è poco diverso dal suo, [7, p.286]), vicino, come anche in Torricelli, all'impiego degli infinitesimi.

Certo la versione "moderna" è (elementare e) senno di poi: e lascia immutata la nostra ammirazione per il modo (e l'eleganza) con cui Cavalieri, Roberval, Torricelli (con scuole e colleghi quali Fermat e Descartes) hanno affrontato i problemi senza fare uso alcuno, o solo raramente, di operazioni algebriche, divenute comuni subito dopo, a partire dalla "*Geometria*" di Descartes e poi da Leibniz e Newton, e sostituendole, con disinvoltura, con teoremi di geometria euclidea inglobandoli in personali versioni del metodo degli indivisibili iniziato da Cavalieri, e ispirato dal metodo di esaustione di Archimede: una evoluzione che di li a poco, grazie a Leibniz e Newton, sarebbe maturata nella teoria dell'integrazione via il calcolo infinitesimale.

Nota: La figura Fig.1, che illustra la quadratura di Roberval della cicloide, è un'immagine che può essere vista come un *rebus* la cui soluzione, cioè il valore dell'area, è suggerito dalla didascalia. Roberval (1646,[30, p.286]) scrive in proposito: *..il nostro metodo, da tutti quelli che mi avvenne di vedere fino a questo punto, è di gran lunga diverso e, se non mi compiaccio troppo, di gran lunga li precedette; e fra tutti è semplicssimo, brevissimo, universalissimo ed è adattissimo allo studio dei solidi, come unico spontaneamente prodotto dalla natura, mentre gli altri sembrano prodotti da forza artificiosa.*

Riferimenti bibliografici

[1] C. Adam. Pascal et Descartes: les expériences du vide (1646-1651). *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 25:65–90, 1888.

vol.5,p.143], ove ne cita l'uso da parte di Roberval (e indirettamente fornisce un esempio che conferma come la citata lettera senza data di Roberval a Torricelli, [7, p.284], sia considerata da Tannery come effettivamente inviata, laddove invece non è noto né che Torricelli la abbia ricevuta, né che sia stata inviata, cfr la discussione al precedente Sec.5).

[2] K. Andersen. Cavalieri's method of indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences*, 31:292–367, 1985.

[3] A. Baillet. *La vie de Monsieur Descartes*, volume Vol.1,2. Hortemels (in Gallica.fr bpt6k75559n,bpt6k75560v), Paris, 1691.

[4] H. Bosman. Pascal et les premières pages de "L'histoire de la Roulette". *Archives de Philosophie*, 1:92–112, 1923.

[5] T. d'Aquino. *In libros Aristotelis: De caelo et mundo expositio*, volume II. https://www.corpusthomisticum.org/ccm2.html, 1274.

[6] C. Dati. *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate: Della vera storia della cicloide e della famosissima esperienza dell'argento vivo*. Stella,https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb30302136n, Firenze, 1663.

[7] Messieurs de l'Acaémie Royale des Sciences. *Divers ouvrages de Mathematique et Physique*. Imprimerie Royale (Gallica: bpt6k5493994j), 1693.

[8] C. de Waard. Opere di evangelista torricelli. comptes rendus et analyses. *Bulletin des Sciences Mathématiques, bpt6k486271s in gallica.fr*, XLIV:225–248, 1920.

[9] R. Descartes. *Traité de la Lumière*. Oeuvres de Descartes, ed. Victor Cousin. T. Girard (and Gallica bpt6k5534491g), 1664.

[10] D. Descotes. *Blaise Pascal: Literature et Geometrie*. CERHAC. Presses universitaires Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2001.

[11] Erone and G.B. Aleotti. *Gli artificiosi e curiosi Moti Spiritali di Herone*. in Gallica.bnf.fr, bpt6k54781741.pdf, Bologna, 1647.

[12] P. Fermat. *OEuvres de Fermat*, volume vol. 1-5. Gauthiers-Villars (in Gallica), 1922.

[13] G. Galilei. *Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale*. Barbera (in https://www.museogalileo.it/it/), Firenze, 1930.

[14] E. Giusti. *Bonaventura Cavalieri and the theory of indivisibles*. Unione Matematica Italiana, UMI, Edizioni Cremonese, Urbino, Italy, 1980.

[15] J. Hamer. Indivisibles and the cycloid in the early 17th century. *Lucerna, (https://hdl.handle.net/10355/44904)*, 7:51–71, 2012.

[16] K. Hara. Qui a le premier rectifié la cycloide? *Etudes de langue et litterature françaises*, 10:30–46, 1967.

[17] K. Hara. Pascal et Wallis au sujet de la cycloïde (II). *Gallia*, 10:231–249, 1969.

[18] J. Itard. La lettre de Torricelli à Roberval d'octobre 1643. *Revue d'Histoire des Sciences*, 28:113–124, 1975.

[19] J. Jouslin. Science et baroque: la polémique sur le vide entre Blaise Pascal et Étienne Noël. *"Études Épistémè. Revue de littérature et de civilisation (XVIe–XVIIIe siècles)"*, 9:https://doi.org/10.4000/episteme.2654, 2006.

[20] I. Kleiner. History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48:137–174, 2001.

[21] W. Knowles-Middleton. The Place of Torricelli in the History of the Barometer. *Isis*, 54:11–28, 1963.

[22] L. Lombardo-Radice. *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*, volume 5 of *Classici della scienza*. UTET, Torino, 1966.

[23] G. Loria and G. Vassura. *Opere di Evangelista Torricelli, 4 Vol.* Montanari (e in https://www.hathitrust.org/), Faenza, 1919.

[24] V. Magni. Demonstratio ocularis loci sine locato. *google*, pages 1–25; https://books.google.it/books?id=w4syO59RNZAC&hl=it, 1648.

[25] S. Maronne. D'une Académie l'autre. Mersenne, Roberval et quelques autres. *Dix-septième siècle*, 292:11–30, 2021.

[26] E. Mersenne. *Novarum Observationum Physico-Mathematicarum*. Bertier (in Gallica.fr), Paris, 1647.

[27] B. Pascal. *Oevres Complètes*, volume 3. Hachette 1872 (and Gallica.fr), 1872.

[28] B. Pascal. *Oeuvres Complètes*, volume 1,2, Commentées par M. Le Guern of *Bibliotèque de La Pléiade*. Gallimard, Paris, 1998.

[29] J. Pecquet, P. de Mercenne, J. Mentel, and A. Auzout. *Experimenta nova anatomica*. p.1-130, 1654, https://numelyo.bm-lyon.fr .

[30] P. Roberval. *in Divers ouvrages de M. de Roberval*. Académie royale des sciences (in gallica bpt6k862896), 1693.

[31] L. Rougier. De Torricelli à Pascal. *Philosophia Scientiae*, pages 1–189, 2010.

[32] E. Torricelli. *Opera Geometrica Evangelistae Torricellii.* Académie Royale des Sciences, in gallica.gnf.fr, 1693.

[33] E. Torricelli. *Opera Geometrica Evangelistae Torricellii: Appendix De Cycloide.* Académie Royale des Sciences, in gallica.gnf.fr, 1693.

[34] E. Torricelli. *Opera Geometrica Evangelistae Torricellii: De Dimensione Parabolae, I,II.* Académie Royale des Sciences, in gallica.gnf.fr, 1693.

[35] E. Torricelli. *Opera Geometrica Evangelistae Torricellii: De Motu Gravium, I,II.* Académie Royale des Sciences, in gallica.gnf.fr, 1693.

[36] J. Vincent. *Descartes-Roberval, une relation tumultueuse.* Revue d'histoire des sciences, *51:363–372, 1998.*

Selezione Cronologica

Apollonio	?-262--190	Carlo Dati	1619-1676
Archimede	?-287--212	René Descartes	1596-1650
Aristarco	?-310-?-230	Pierre de Fermat	1602-1665
Aristotele	-384-322	Galileo Galilei	1564-1642
Euclide	?--300	Christiaan Huygens	1629-1695
Erone	?100	Johannes Kepler	1571-1630
Pappo	?290-?350	Gottfried Leibniz	1646-1716
		Jacques Le Pailleur	?-1654
		Valeriano Magni	1586-1661
		Jean-Pierre Médaille	1610-1669
Giovanni B. Aleotti	1546-1636	Marin Mersenne	1588-1648
Tommaso d'Aquino	1225-1274	Antonio Nardi	1598-1648
Adrien Auzout	1622-1691	Isaac Newton	1642-1726
Giovanni Baliani	1582-1666	Etienne Noël	1581-1659
Jean de Beaugrand	1582/84-1640	Blaise Pascal	1623-1662
Isaac Beeckman	1588-1637	Etienne Pascal	1588-1651
Charles de Bovelles	1479-1566	Florin Périer	1605-1672
Robert Boyle	1627-1691	Pierre Petit	1594-1677
Pierre de Carcavi	1600/03-1684	G. Personne Roberval	1602-1675
Benedetto Castelli	1578-1643	Michelangelo Ricci	1619-1682
Bonaventura Cavalieri	1598-1647	Evangelista Torricelli	1608-1647
Armand B. Conti	1629-1666	Giovanni B. Venturi	1746-1822
Nicola Cusano	1401-1464	John Wallis	1616-1703

Giovanni Gallavotti
Dipartimento di Fisica, INFN
Universita' di Roma "La Sapienza"
P.le A. Moro 2
I 00185 Roma, Italia

web: https://www.roma1.infn.it/∼gallavot
email giovanni.gallavotti@roma1.infn.it