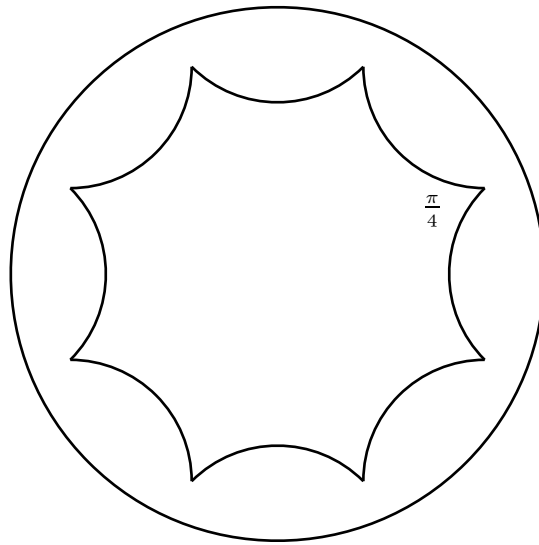


Ipotesi per una introduzione alla
Meccanica dei fluidi

Giovanni Gallavotti



Roma 1996

Giovanni Gallavotti
Dipartimento di Fisica I^a Università di Roma, La Sapienza
P.le A. Moro 2, 00185 Roma, Italia

Copie possono essere ottenute scrivendo a:
CNR-GNFM, via S. Marta 13a, 50139 Firenze, Italia, *tel* 39-55-496912, *fax* 39-55-475915
ovvero su internet alla pagina Mathematical Physics preprints su:
<http://chimera.roma1.infn.it>

#####

In copertina: Ordine e Caos, (libera reinterpretazione ad opera dell' Autore di una ben nota immagine)
Il suo fascino suggerisce al *Credente* una prova dell' esistenza dell' "Essere Perfettissimo" (sebbene sfuggì al, pur gesuita, Saccheri perché la sua Fede fu offuscata dalla passione per Euclide, [Sh]). Suggerisce all' *Artista* il "sublime" (ma l' Escher la ritenne troppo spoglia e volle corromperla aggiungendovi orpelli non necessari). Propone al *Musico* uno strumento ricco di note sì strane e disordinate che ancora nessuno ha osato, o potuto, creare uno spartito che lo utilizzasse selezionandone le meravigliose armonie che certo contiene. Al *Fisico* fornisce il paradigma del Caos nella Meccanica Classica e apre la via a riconoscere il Caos anche nella Meccanica Quantica, [Gu], che ancora qualcuno, che "cerchiato ha il senno di fredda tenebra", vorrebbe invece non caotica e affatto regolare. Al *Matematico* evoca un Gruppo Fuchsiano (o talvolta un ottagono).
Due parole sulla tecnica usata: l' immagine è disegnabile con *la riga e il compasso*, come tutte le figure nobili e a conferma della sua natura divina. Una volta disegnata è stata trascritta in **postscript** per essere comunicata. È a colori (anche se non si vedono): sia *rossa* assolutamente uniforme, il rosso dei tramonti romani nei ricordi d' infanzia, la stella ottagonale centrale e sia *nero*, il nero del vuoto cosmico, il colore della regione del cerchio esterna alla stella.
La sua esecuzione (con riga e compasso) è benefica nei momenti di solitudine.

Introduzione

Si resta colpiti dalla sostanziale identità concettuale dei problemi che si incontrano nello studio teorico dei fenomeni fisici. È assolutamente inaspettata e sorprendente: che si studi la Meccanica Statistica dell' Equilibrio, o la Teoria dei Campi Quantizzati, la fisica dello stato solido, la Stabilità in Meccanica, la Meccanica Celestiale, l' Analisi Armonica, la Teoria della Elasticità, la Relatività Generale o ancora la Meccanica dei Fluidi e il Caos della Turbolenza.

Così quando nel 1988 mi venne assegnata la cattedra di Meccanica dei Fluidi alla Sapienza, non tanto come riconoscimento per il lavoro svolto nel campo ma piuttosto per aggirare l' opposizione di colleghi che mal vedevano che mi fosse attribuita una cattedra di Meccanica, dalla quale avrei potuto avere influenza sulla politica culturale della Fisica Matematica a Roma, non mi preoccupai eccessivamente nonostante la consapevolezza di essere un pó "fuori posto".

Il soggetto è vastissimo e dunque in questo decennio non ho potuto fare altro che aggirarmi alla ricerca di qualcosa che fosse alla portata dei metodi e idee derivanti dalle mie esperienze precedenti.

La prima grande sorpresa fu constatare che la teoria matematica dei moti dei fluidi è in uno stato ancora più primitivo di quanto fossi consapevole. Ciononostante mi pare ancora che una discussione dettagliata dei problemi matematici sia essenziale per chi voglia cimentarsi con la ricerca sui fluidi. Ho quindi dedicato (§11%16) alle teorie di Leray e di Scheffer, Caffarelli, Kohn, Nirenberg sulla equazione di Navier Stokes incompressibile tutto lo spazio necessario ad una loro completa esposizione, tratta dai lavori originali.

Tale analisi è preceduta da una lunga discussione di aspetti fenomenologici che riguardano le equazioni dei fluidi e le loro proprietà con particolare attenzione al significato delle varie approssimazioni.

Perché non si deve dimenticare che le equazioni dei fluidi *non hanno* natura fondamentale, ossia sono in ultima analisi equazioni fenomenologiche ed è necessario aver presente che per questo motivo non si può loro domandare "troppo". Per porre le domande appropriate è necessario dominare gli aspetti fenomenologici ed euristici della teoria. Non ho potuto far di meglio che seguire il volume di Landau e Lifshitz cercando di estrarre da esso un insieme coerente di proprietà senza ovviamente poterlo né volerlo riprodurre interamente (cosa che sarebbe stata comunque inutile) e tralasciando la maggior parte dei temi che quel ricchissimo trattato agile e moderno copre e che comunque il lettore non potrà tralasciare di studiare.

Ho inserito in questo materiale introduttivo (§1%10) vari spunti moderni tratti da lavori di cui sono venuto a conoscenza o per comunicazione di

collegli o per partecipazione a conferenze. Quà e là ci sono alcune idee originali, o che almeno non ho trovato nella letteratura.

La seconda parte del volume è dedicata alla teoria qualitativa e fenomenologica delle soluzioni dell'equazione di Navier Stokes incomprimibile: infatti la mancanza di teoremi di esistenza e unicità di soluzioni non ha avuto praticamente alcuna conseguenza sulla ricerca. Gli ingegneri impavidi scrivono immani programmi che dovrebbero produrre soluzioni delle equazioni: non si preoccupano affatto, quando ne sono coscienti (il che purtroppo non è sempre), che quello che studiano *non sono* le equazioni di Navier Stokes bensì il programma informatico da loro stessi elaborato. *Nessuno* è oggi in grado di scrivere un algoritmo che in un tempo noto *a priori* produca, entro una prefissata approssimazione, come risultato il calcolo di una proprietà qualsiasi (ad esempio la velocità del fluido in un punto dato) di una soluzione dell'equazione di NS con dato iniziale non "piccolissimo" o "specialissimo". Affermazioni in contrario non sono rare, neppure sulla grande stampa: ma sono errate.

Da questo non si deve però dedurre che gli ingegneri o i fisici che producono impressionanti quantità di lavori sulle "soluzioni" delle equazioni di NS siano dedicati a inutile e risibile lavoro. Al contrario è lavoro necessario e altamente qualificato. È però importante cercar di capire in che senso il loro lavoro si possa disporre nel quadro galileiano che vuole che la natura sia scritta in caratteri matematici. A tal questione ho dedicato una parte sostanziale del volume (§17-§27): in questa espongo le idee e i metodi *descrittivi* o *cinematici* che vengono utilizzati nella ricerca corrente (o almeno in quella parte della ricerca corrente che riesco a seguire). Sono idee, nate dai lavori di Lorenz e Ruelle-Takens, in parte basate sulla teoria della stabilità e biforcazione e in parte di assai più largo respiro.

I fenomeni caotici sono assai "di moda": su di essi si è scritto molto perché attraggono l'attenzione anche di chi si diletta di divulgazione scientifica e di filosofia. Ma la loro percezione è spesso distorta perché, pur di rendere interessante per il pubblico non specializzato quanto si scrive, si fanno affermazioni forti ma ambigue. Quali ad esempio "il determinismo è finito": che è un'affermazione che se ha qualche fondamento di verità certamente trascura di sottolineare che nulla cambia per chi ha cara una visione deterministica della realtà fisica (categoria alla quale tutti i colleghi che conosco appartengono) o per chi la ebbe cara (come ad esempio Laplace) quando la "teoria del caos" ancora non era.

Quindi nella discussione delle proprietà caotiche dei moti più semplici dei fluidi non mi occupo affatto delle questioni filosofiche e di interpretazione semantica delle parole che illustrano proprietà oggettive. Anche se l'aspetto di questa parte del volume è poco tecnico in apparenza è in realtà una parte *molto* tecnica e colleziona in una lunga sequenza logica una notevole mole di passi, ciascuno talmente semplice da non richiedere dettagli tecnici.

Mi pare molto importante che chi si interessa di questioni filosofiche legate alla Scienza (e io direi quindi, semplicemente, chiunque si interessi di questioni scientifiche) debba necessariamente dedicare il tempo necessario alla piena comprensione degli strumenti tecnici indispensabili (quali la

Geometria, il Calcolo e la Fisica Newtoniana) indicati già in parte da Galileo. È illusorio pensare di poter apprezzare anche superficialmente la Scienza moderna (cioè la Scienza, perché è fuori del tempo e l'aggettivo si riferisce ad accidenti) senza questi strumenti: la divulgazione è talvolta terribilmente prossima alla mistificazione.

La discussione è finalizzata sia alla descrizione dell'inizio della turbolenza seguendo le idee di Ruelle-Takens sia, e soprattutto, alla discussione del *principio di Ruelle*. È questo un principio che è stato a mio avviso assolutamente sottovalutato, forse per la sua natura piuttosto astrusa o, direi meglio, veramente originale. Ne venni a conoscenza in occasione di un seminario di Ruelle nel 1973: e ricordo ancora quanto fui colpito dall'audacia e novità dell'idea. Fin da allora iniziai a meditare su come tradurla in applicazioni concrete; cosa non facile. Nei paragrafi conclusivi (§31÷§34) espongo alcune recenti proposte di applicazione.

Dedico poi il §28 alla costruzione di distribuzioni invarianti (stazionarie) delle equazioni di NS: esponendo idee euristiche raccolte nella letteratura e che mi paiono di un certo interesse anche se piuttosto lontane da applicazioni sia fisiche che matematiche (o dalla soluzione del problema).

La teoria di Kolmogorov K41 che non può mancare in un moderno testo, per quanto introduttivo, è esposta nel §29; mentre nel §30 descrivo alcuni recenti lavori numerici che a mio avviso hanno portato idee nuove nella teoria dei fluidi (la multifrattalità): è questa una scelta della cui parzialità mi rendo conto; e in parte è solo dovuta ad esigenze di spazio. In parte però è una scelta fatta perché riguarda lavori di ricercatori dell'area romana e che quindi vertono su temi che mi sono più familiari.

Gli ultimi quattro paragrafi contengono varie idee recenti sviluppate proprio mentre svolgevo i corsi di Meccanica dei Fluidi. Si tratta spesso di tematiche recentissime e che forse fra qualche anno non avranno più alcun interesse. Tuttavia confido che il lettore mi perdonerà questa temerarietà ritenendola giustificata a compimento di un lavoro in cui ho cecato di esporre solo risultati classici e ben stabiliti.

Ho fatto attenzione a che il volume fosse autocontenuto: non perché volessi evitare riferimenti alla letteratura (che anzi ci sono, salvo involontarie omissioni), ma per presentare un punto di vista completo e unitario. Così fra i problemi (la maggior parte dei quali è corredata da un dettagliato suggerimento per la soluzione) ho inserito una notevole quantità di risultati che li rendono in un certo senso più interessanti del testo stesso. Ho cercato di porre in forma di problemi a soluzione guidata risultati che potrebbero figurare bene nel testo stesso, perché tratti da altre opere o riassunti il loro contenuto. Chi riterrà di usare questo libro come testo per una introduzione alla Meccanica dei Fluidi dovrebbe cercare di svolgerli tutti in dettaglio e senza ricorrere alla letteratura citata: credo che questo sia essenziale per dominare una materia che è facile solo all'apparenza. *

* Fra i problemi si troveranno alcuni risultati classici (quali ad esempio la teoria delle maree) ma anche 1) la fenomenologia dei continui non omogenei e chimicamente attivi, 2) la formula di Stokes, 3) moto ondoso, 4) la teoria delle equazioni ellittiche in domini regolari e la teoria dell'equazione di Stokes, 5) il moto degli anelli di fumo, 6) la teoria

La disponibilità di calcolatori rende la compilazione, una volta terribile, degli indici analitici facile e automatica. Forse "leggere" gli indici può fornire, quindi, qualche informazione maggiore di quanto tradizionalmente ci si aspetti, anche se temo di non aver fatto un uso davvero soddisfacente di questa possibilità offerta dalla tecnologia moderna.

Infine: perché ho scritto questo volume in italiano? ma per una donchiescottesca protesta contro l'uso di vocaboli inglesi che infestano sempre più la nostra cultura! I direttori di telegiornali, di giornali, gli uomini di governo e di "cultura", presentatori televisivi e giornalisti sportivi, sono lanciati in una squallida gara per la corruzione della lingua; il governo è un *team*, una commissione è un' *authority*, il pubblico una *audience*, e poi c'è il *marketing*, il *prime rate*, l' *import*, l' *export* il partito che fa da *sponsor* per una nomina RAI (mutuando dall'inglese perfino termini di una lingua dichiarata inutile e nell'oblio), la facilità d'uso di un ordinatore diventa il *computer no problem*, il sicario è un *killer* ed è inutile continuare.

Questi signori celano la loro mediocrità, ignoranza e incapacità di comunicare idee (o mancanza delle medesime) dietro parole che pur sanno che molti non capiscono o comprendono solo vagamente: è un'azione violenta e sprezzante, che torna anche loro utile in quanto può servire a mantenere in soggezione chi conviene che resti in tale stato. Ma come non sa (o sai) che c'è il *ticket* da pagare (per una visita medica o per parcheggiare l'auto)? che l' *optional* non è *free* o non sa (o sai) che l' *intercity* richiede un supplemento? e che nel *prime time* non si possono dare spettacoli di un qualche contenuto?

La mia protesta non è dunque contro l'inglese: lingua nobilissima e dotata di una dignità che ormai ci è sconosciuta.

Ringrazio colleghi e studenti per l'aiuto datomi nella correzione di queste note. In particolare il Dr. F. Bonetto e il Dr. G. Gentile: alcune considerazioni emerse in interminabili discussioni con loro hanno influenzato il testo, soprattutto quello degli ultimi paragrafi, evitandomi talvolta errori o imprecisioni.

Roma, Luglio 1996.

di Wolibner-Kato dell'equazione di Eulero a 2 dimensioni, 7) la teoria del potenziale necessaria per la teoria di Leray, 8) le disuguaglianze di Sobolev necessarie alla teoria CKN, 9) varie questioni sulle simulazioni numeriche, 10) qualche dettaglio di teoria della biforcazione, 11) cenni alle frazioni continue e ai flussi geodetici su superfici a curvatura negativa costante, 12) i teoremi ergodici di Birkhoff e Oseledec, 13) la teoria degli esponenti di Lyapunov per i sistemi dinamici iperbolici, 14) questioni di teoria dell'informazione. Credo che fino all'ultimo capitolo, che è dedicato a temi oggetto di ricerca più avanzata, l'unico teorema che uso e di cui non includo l'idea di dimostrazione nel testo o fra i problemi sia il teorema della varietà centrale (perché non sono riuscito a rendere ragionevolmente corta la sua dimostrazione, pur elementare). Molti teoremi sono esplicitamente presentati fra i problemi con la dimostrazione presentata descrivendone le idee in forma succinta o, raramente, in forma euristica. Il ricorso a considerazioni euristiche è stato essenzialmente motivato dal fatto che mi pare che troppo spesso manchi nella letteratura un'illustrazione delle idee, veramente semplici almeno nei casi che le hanno generate, che sono alla base di dimostrazioni a volte apparentemente complesse.

Indice

CAPITOLO I: Generalità sui continui	1
1 Continui	3
2 Equazioni generali e incompressibili	16
3 Il metodo dei riscaldamenti e la valutazione delle approssimazioni	24
4 Alcuni problemi di idrostatica	32
5 Il problema della convezione. Equazioni di Rayleigh	44
6 Campi incompressibili. Potenziale vettore. Decomposizione di un campo generale	54
7 Legge di conservazione della vorticità per l'equazione di Eulero. Potenziali di Clebsch e forma hamiltoniana delle equazioni di Eulero. I fluidi bidimensionali	67
CAPITOLO II: Algoritmi empirici e teoria di Leray	85
8 Fluidodinamica incompressibile di Eulero e Navier-Stokes. Primi algoritmi di soluzione empirica. Metodo dell'attrito ausiliario e confronto con l'equazione del calore	87
9 Un'altra classe di algoritmi empirici. Il metodo spettrale. Il problema di Stokes. Analogia giroscopica.	103
10 Algoritmi vorticosi per fluidi incompressibili di Eulero e Navier-Stokes. Il caso $d = 2$	123
11 Algoritmi vorticosi per fluidi incompressibili di Eulero e Navier-Stokes. Il caso $d = 3$	131
12 Il metodo spettrale e teoremi di esistenza, regolarità e unicità locali per le equazioni di E e NS, $d \geq 2$	145
13 Teoremi di esistenza debole globale per NS. Autoregolamentazione, esistenza, regolarità e unicità per $d = 2$	159
14 Regolarità: risultati parziali per l'equazione di NS a $d = 3$. La teoria di Leray	179
15 La dimensione frattale delle singolarità dell'equazione di Navier Stokes, $d = 3$	199
16 Omogeneità locale e regolarità. La teoria CKN	207
CAPITOLO III: Turbolenza incipiente e caos	229
17 La teoria dei fluidi in mancanza di teoremi di esistenza e unicità per le equazioni della fluidodinamica. I modelli di Rayleigh e di Lorenz. Equazioni di NS troncate. Modelli di Rayleigh e Lorenz	231
18 Inizio della turbolenza. Cenni di teoria della biforcazione	243
19 Scenari del Caos	261
20 Tavole dinamiche	277
21 Ordinamento del Caos. La descrizione quantitativa dei moti caotici, prima della	

turbolenza sviluppata. Spettro continuo	289
22 Ordinamento del Caos. Osservazioni cadenzate. Dati casuali	305
23 Ordinamento del Caos. Sistemi dinamici di vario tipo. Statistica di un insieme attrattore	317
24 Ordinamento del Caos. Basi dinamiche ed esponenti di Lyapunov	329
25 Statistiche SRB. Attrattori ed insiemi attrattori. Dimensione frattale.	347
26 Ordinamento del Caos. Entropia e complessità	364
27 Dinamica simbolica. Modello di Lorenz. Principio di Ruelle	378
CAPITOLO IV: Alta turbolenza	398
28 Turbolenza sviluppata. Integrazione funzionale.	400
29 Fenomenologia della turbolenza sviluppata e leggi di Kolmogorov	410
30 Il modello a strati. Statistiche multifrattali	426
31 Viscosità, reversibilità e dissipazione irreversibile.	435
32 Reversibilità. Assioma C. Ipotesi caotica.	445
33 L' ipotesi caotica, il teorema di fluttuazione e la reciprocità di Onsager	455
34 La struttura dell' attrattore per le equazioni di Navier–Stokes	467
Bibliografia	481
Indice dei nomi	490
Indice analitico	492
Indice delle citazioni	498

Capitolo I

Continui e generalità sulle loro equazioni

Viscosità cinematica di cm^2/sec

Mercurio	0.012
Aria	0.150
Acqua	0.01
Alcool	0.022
Glicerina	6.8
Bronzo	$+\infty$

§1: *Continui.*

Un *continuo omogeneo* e chimicamente inerte in d dimensioni è descritto da:

- (a) Una regione Ω di spazio ($\Omega \subset R^d$), che dà il volume occupato.
- (b) Una funzione $P \rightarrow \rho(P) > 0$ definita su Ω che dà la *densità di massa*.
- (c) Una funzione $P \rightarrow T(P)$ che definisce la *temperatura*.
- (d) Una funzione $P \rightarrow s(P)$ che definisce la *densità di entropia* (per unità di massa).
- (e) Una funzione $P \rightarrow \underline{\delta}(P)$ che definisce lo *spostamento* rispetto ad una configurazione di riferimento.
- (f) Una funzione $P \rightarrow \underline{u}(P)$ che definisce la *velocità*.
- (g) Una *equazione di stato* che lega $T(P), s(P), \rho(P)$.
- (h) Un *tensore degli sforzi* $\underline{\tau}$, denotato anche (τ_{ij}) , fornisce la forza per unità di superficie che la parte di continuo posta a contatto con un elemento di superficie $d\sigma$ di normale \underline{n} dalla parte di \underline{n} esercita sulla parte di continuo a contatto con $d\sigma$ dalla parte opposta a \underline{n} , via la formula:

$$1.1 \quad d\underline{f} = \underline{\tau} \underline{n} d\sigma \quad (\underline{\tau} \underline{n})_i = \sum_{j=1}^d \tau_{ij} n_j \quad (1.1)$$

- (i) Un *tensore di conducibilità termica* $\underline{\kappa}$, che fornisce la quantità di calore che attraversa nella direzione \underline{n} l'elemento di superficie $d\sigma$ di normale \underline{n} nell'unità di tempo via la formula:

$$1.2 \quad dQ = -\underline{\kappa} \underline{n} \underline{\partial} T d\sigma \quad (1.2)$$

- (l) Una *densità di forza di volume* $P \rightarrow \underline{g}(P)$.
- (m) Una relazione che permette di esprimere i tensori degli sforzi e della conducibilità in funzione delle grandezze $\underline{\delta}, \underline{u}, \rho, T, s$.

Le relazioni in (g), (m) si chiamano *relazioni costitutive* del continuo: in una teoria microscopica dei continui devono essere deducibili, in linea di principio, dal modello atomico. Ma nel contesto in cui di solito ci porremo le equazioni costitutive hanno carattere puramente macroscopico e quindi fenomenologico e vanno pensate come parte integrante del modello.

Più in generale si possono considerare fluidi non omogenei, a più componenti chimiche fra le quali possono anche avvenire reazioni chimiche: qui non ci occuperemo di questi sistemi, anche se i fondamenti della loro teoria sono discussi in qualche dettaglio nei problemi alla fine del §1 (c.f.r. problemi [7],[17]).

I continui si dividono in solidi e liquidi. Sono liquidi se la relazione costitutiva permette di esprimere τ in termini delle sole grandezze termodinamiche e, inoltre, della \underline{u} : in altre parole se τ è indipendente dal campo di spostamento $\underline{\delta}$.

Si suppone sempre che *valgano i principi della dinamica e termodinamica*: cioè si suppongono valide un certo numero di relazioni fra le grandezze che descrivono il continuo.

Una notazione assai usata nel seguito sarà $\underline{\tau}$ per denotare un tensore τ_{ij} , $i, j = 1, \dots, d$; e poi $\underline{\tau} \underline{u}$ per denotare il risultato dell'azione del tensore $\underline{\tau}$ sul vettore \underline{u} , ossia il vettore la cui i -ma componente è $\sum_j \tau_{ij} u_j$. Si adotterà spesso anche la *convenzione di somma sugli indici ripetuti*: ossia, ad esempio, $\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j$ si denoterà (quando non si ingeneri confusione) anche semplicemente $\tau_{ij} n_j$.

In tal modo le relazioni fra le grandezze che descrivono il continuo sono le seguenti.

(I) *Conservazione della massa.*

Se Δ è un volumetto che nel tempo t evolve in Δ_t si deve avere:

$$1.3 \quad \int_{\Delta} \rho(P, 0) dP \equiv \int_{\Delta_t} \rho(P, t) dP \quad (1.3)$$

Scegliendo t infinitesimo si vede che la regione Δ_t è costituita dai punti che possono essere scritti:

$$1.4 \quad P' = P + \underline{u}(P)t, \quad P \in \Delta \quad (1.4)$$

e questa relazione può essere pensata come una trasformazione di coordinate $P \rightarrow P'$ che ha determinante jacobiano:

$$1.5 \quad \det \frac{\partial P'_i}{\partial P_j} = \det \left(1 + \frac{\partial u_i}{\partial P_j} t \right) = 1 + t \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial P_i} + 0(t^2) \quad (1.5)$$

per cui:

$$1.6 \quad \begin{aligned} \int_{\Delta_t} \rho(P', t) dP' &= \int_{\Delta} \rho(P + \underline{u}t, t) (1 + t \underline{\partial} \cdot \underline{u}) dP = \\ &= \int_{\Delta} \rho(P) dP + t \int_{\Delta} (\underline{\partial} \rho \cdot \underline{u} + \partial_t \rho + \rho \underline{\partial} \cdot \underline{u}) dP \end{aligned} \quad (1.6)$$

e pertanto si trova, da (1.3):

$$1.7 \quad \partial_t \rho + \underline{\partial} \cdot (\underline{u} \rho) = 0 \quad (1.7)$$

che è l'equazione di continuità.

(II) *Conservazione della quantità di moto (I^a equazione cardinale)*

$$1.8 \quad \frac{d}{dt} \int_{\Delta} \rho \underline{u} dP = \int_{\Delta} \rho \underline{g} dP + \int_{\partial \Delta} \underline{\tau} \underline{n} d\sigma \quad (1.8)$$

Per valutare la derivata si osserva che al tempo ϑ :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_{\vartheta}} \underline{u} \rho(P', \vartheta) dP' &= \int_{\Delta} \rho(P + \underline{u}(P)\vartheta, \vartheta) (1 + \vartheta \underline{\partial} \cdot \underline{u}) \underline{u}(P + \underline{u}(P)\vartheta, \vartheta) \\ 1.9 \quad \int_{\partial\Delta} (\underline{\tau} \underline{n})_i d\sigma &= \int_{\Delta} \sum_j (\partial_j \tau_{ij}) dP \end{aligned} \quad (1.9)$$

e dunque:

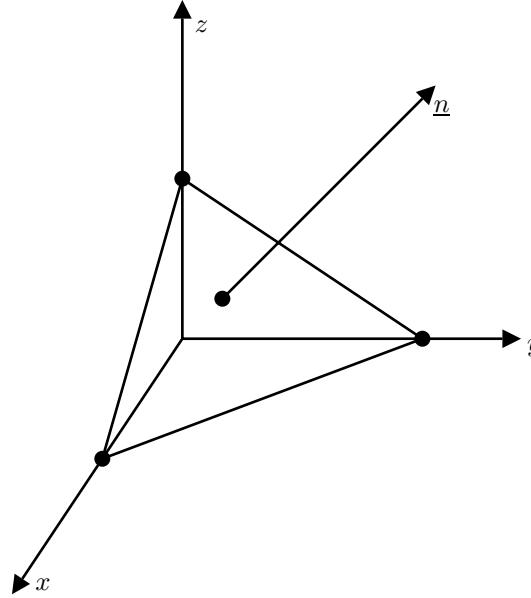
$$1.10 \quad \partial_t(\rho u_i) + \sum_j \partial_j(u_j(\rho u_i)) = \rho g_i + \sum_{j=1}^3 \partial_j \tau_{ij} \quad (1.10)$$

ossia usando (1.7) e usando la convenzione che indici ripetuti denotano somma su di essi:

$$1.11 \quad \dot{u}_j + \underline{u} \cdot \underline{\partial} u_j = g_j + \frac{1}{\rho} \partial_k \tau_{jk} \quad (1.11)$$

(III) Conservazione del momento della quantità di moto

Questa è una proprietà verificata automaticamente in base alla definizione di tensore degli sforzi, (1.1): se si permettesse una legge di sforzo più generale $\underline{\tau}_i(\underline{n})d\sigma$, invece che $\tau_{ij}n_jd\sigma$ con $\underline{\tau}$ simmetrico, si vedrebbe che essa impone che $\tau(\underline{n})_i d\sigma$ deve necessariamente avere la forma $\tau_{ij}n_j d\sigma$, e che $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Invero sia Δ un insieme avente la forma di un tetraedro con tre spigoli sugli assi coordinati e una faccia con normale \underline{n} . Siano $\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2, \underline{\tau}_3$ e $\underline{\tau}_n$ gli sforzi che si esercitano sulle quattro facce.



Il momento della quantità di moto di Δ è $\underline{K} = \int_{\Delta} (P - P_0) \wedge \rho \underline{u} dP \leq 0(\ell^4)$, se ℓ è il diametro di Δ ; pure di $0(\ell^4)$ è il momento delle forze di volume.

Il momento delle tensioni è invece a priori di $0(\ell^3)$: e quindi perché sia invece di $0(\ell^4)$ è necessario che ci sia una relazione fra $\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2, \underline{\tau}_3$ e $\underline{\tau}_n$. Per trovarla si osservi che se la risultante delle forze di tensione non fosse nulla all'ordine dominante, ossia:

$$0 \neq \underline{\tau}(\underline{n})d\sigma - (\underline{\tau}_1 d\sigma_1 + \underline{\tau}_2 d\sigma_2 + \underline{\tau}_3 d\sigma_3) \equiv (\underline{\tau}(\underline{n}) - \underline{\tau}_1 n_1 - \underline{\tau}_2 n_2 - \underline{\tau}_3 n_3)d\sigma \quad (1.12)$$

allora la risultante sarebbe $\underline{c}d\sigma, \underline{c} \neq 0$, e quindi il momento risultante sarebbe $0(\ell^3)$ rispetto a qualche punto P_0 di Δ . Dunque

$$\tau(\underline{n})_j = \tau_{ji}n_i \quad (1.13)$$

[Si può anche dire che questa relazione segue dalla 1^a equazione cardinale: invero se $\underline{c}d\sigma \neq 0$ la risultante delle forze sarebbe $0(\ell^2)$ mentre la derivata della quantità di moto è $0(\ell^3)$].

Inoltre $\tau_{ji} = \tau_{ij}$ come si vede osservando che, all'ordine più basso in ℓ , il momento delle tensioni sulle facce di un cubetto di lato ℓ , rispetto al centro è:

$$\ell^3[(\underline{j} \wedge (\underline{\tau} \underline{j})) + \underline{i} \wedge (\underline{\tau} \underline{i}) + \underline{k} \wedge (\underline{\tau} \underline{k})] \quad (1.14)$$

Se $(\underline{\tau} \underline{j})_i = (\tau_2)_i, (\underline{\tau} \underline{i})_i = \tau_{1i}, (\underline{\tau} \underline{u})_i = \tau_{3i}$ sono le componenti delle tensioni sulle facce di normale $\underline{j}, \underline{i}, \underline{k}$ rispettivamente, e se si impone che la (1.14) sia nulla (divisa per ℓ^3 e nel limite $\ell \rightarrow 0$), si trova:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

$$= \underline{i}(\tau_{23} - \tau_{32}) + \underline{j}(\tau_{13} - \tau_{31}) + \underline{k}(\tau_{21} - \tau_{12})$$

si trova $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ (teorema di Cauchy).

(IV) Conservazione dell' energia

Questa è una legge di conservazione più delicata in quanto coinvolge anche le proprietà termodinamiche del corpo.

Si immagina che ogni elemento Δ di fluido sia un sistema in equilibrio termodinamico e quindi dotato di funzioni di stato energia interna, entropia, temperatura *etc.*

La equazione di stato, caratteristica del continuo, sarà una relazione che esprime l' energia interna ε per unità di massa in termini della densità di massa ρ e della entropia per unità di massa s : $(\rho, s) \rightarrow \varepsilon(\rho, s)$.

Allora il bilancio energetico in un elemento di volume Δ sarà ottenuto esprimendo la variazione (per unità di tempo) dell' energia (cinetica e interna):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta} (\rho \frac{u^2}{2} + \rho \varepsilon) dP \quad (1.16)$$

come somma del lavoro eseguito dalle forze di volume, di quello degli sforzi al bordo e infine del calore che penetra per conduzione dai bordi di Δ . Questa è la somma dei seguenti addendi:

$$\begin{aligned}
 1.17 \quad & \int_{\Delta} \rho \underline{g} \cdot \underline{u} dP + \int_{\partial\Delta} \underline{\tau} \underline{n} \underline{u} d\sigma + \int_{\partial\Delta} \kappa_{ij} (\partial_i T) \cdot n_j = \\
 & = \int_{\Delta} \rho \underline{g} \cdot \underline{u} dP + \int_{\Delta} \partial_i (\tau'_{ij} u_j) dP - \int_{\Delta} \underline{\partial} \cdot (p \underline{u}) dP + \int_{\Delta} \partial_i (\kappa_{ij} \partial_j T) dP
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

ove si è scritto $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij}$ ove p è la pressione e si è supposta valida la legge di Fourier (1.2) per la trasmissione del calore.

Uguagliando le (1.16), (1.17) ed usando la (1.11) (moltiplicata membro a membro per \underline{u} ed integrata su Δ) per eliminare il termine con l'energia cinetica si trova:

$$1.18 \quad \frac{d}{dt} \int_{\Delta} \rho \varepsilon dP = \int_{\Delta} [\underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa} \underline{\partial} T) - p \underline{\partial} \cdot \underline{u}] dP \tag{1.18}$$

e in questa relazione si riconosce che l'ultimo termine a destra è $-p \frac{d|\Delta|}{dt}$ ossia il lavoro compiuto per unità di tempo dalle forze di pressione, mentre il penultimo termine dà la quantità di calore che penetra per conduzione nell'elemento di volume. Il membro di sinistra invece è la variazione per unità di tempo della energia interna. Quindi dal primo principio $dE = dQ - p dV$ vediamo che il primo termine di destra *deve* rappresentare una quantità di calore che entra nell'elemento di volume. Viene interpretata naturalmente come la quantità di calore che viene generata dall'attrito descritto dal tensore $\underline{\tau}'$.

Si noti che $\underline{\tau}'$ non solo contribuisce al bilancio energetico attraverso il calore generato per attrito $\underline{\tau}' \underline{\partial} \underline{u}$ per unità di volume, ma anche per il lavoro meccanico $(\underline{\partial} \underline{\tau}') \underline{u}$ per unità di volume: tali contributi appaiono invero sommati nella (1.17) (nella forma $\underline{\partial} (\underline{\tau}' \underline{u}) = \underline{\tau}' \underline{\partial} \underline{u} + \underline{u} \underline{\partial} \underline{\tau}'$).

Questo dunque conduce ad interpretare $\underline{\tau}'$ come una grandezza associata alle forze di attrito all'interno del fluido, oltre che agli sforzi non normali del fluido.

Perché questa interpretazione sia possibile occorre, naturalmente, che τ'_{ij} dipenda esclusivamente dalle grandezze termodinamiche locali (s, T) e dal gradiente (e eventualmente dalle derivate superiori) della velocità e, inoltre, si annulli con esso. Così dunque supporremo sempre nel seguito $\tau'_{ij} = 0$ se $\underline{\partial} \underline{u} = 0$.

La forma differenziale della (1.18) è:

$$1.19 \quad \partial_t (\rho \varepsilon) + \underline{\partial} \cdot (\rho \varepsilon \underline{u}) \equiv \rho (\partial_t \varepsilon + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \varepsilon) = \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa} \underline{\partial} T) - p \underline{\partial} \cdot \underline{u} \tag{1.19}$$

avendo usato (nella prima identità), l' equazione di continuità.

(V) *II° principio e bilancio dell' entropia*

La (1.19), combinata con il secondo principio della termodinamica $T dS = dE + p d|\Delta|$, e $S = \rho|\Delta|s$, $E = \rho|\Delta|\varepsilon$ e $\frac{d|\Delta|}{dt} = \underline{\partial} \cdot \underline{u}|\Delta|$, può essere riscritta come:

$$1.20 \quad T \rho (\partial_t s + \underline{u} \cdot \underline{\partial} s) = \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial}(\underline{\kappa} \underline{\partial} T) \quad (1.20)$$

che è la forma in cui, nelle applicazioni, spesso viene usata la conservazione dell' energia.

Se si introduce la *corrente di calore* $\underline{J}_q = -\underline{\kappa} \underline{\partial} T$ la (1.19) può essere riscritta anche nella forma:

$$1.21 \quad \rho \frac{ds}{dt} = -\underline{\partial} \cdot \frac{\underline{J}_q}{T} - \underline{J}_q \cdot \frac{\underline{\partial} T}{T^2} + \underline{\tau}' T \cdot \frac{1}{T} \underline{\partial} \underline{u} = -\underline{\partial} \cdot \frac{\underline{J}_q}{T} + \sigma \quad (1.21)$$

ove σ si interpreta come *densità di entropia generata per unità di volume e di tempo*. La σ viene anche scritta come:

$$1.22 \quad \sigma = \sum_j J_j X_j \quad (1.22)$$

ove X_j è un vettore a dodici componenti costituite dalle $-\frac{1}{T^2} \partial_i T$, $\frac{1}{T} \partial_i u_j$ e J_j è costituito dalle J_{qj} , $\underline{\tau}'_{ij}$.

Osservazione: In generale le forze termodinamiche X_j si identificano con parametri che misurano la lontananza dall' equilibrio macroscopico dello stato locale del fluido (come un gradiente di temperatura o di velocità); e le corrispondenti correnti si identificano con i coefficienti J_j che permettono di esprimere il tasso di creazione di entropia come combinazione lineare delle forze X_j , *c.f.r.* (1.22). È chiaro che l' identificazione (o “dualità”) fra le forze termodinamiche e le correnti termodinamiche non è priva di ambiguità e in ogni problema, dato il tasso di creazione di entropia σ , si può in generale rappresentare σ in vari modi nella forma (1.22). Questa ambiguità è analoga a quella dell' identificazione delle coordinate canoniche in meccanica a partire da una data lagrangiana: si ottengono coordinate diverse a secondo di quali siano le variabili da cui si pensa che dipenda la lagrangiana. Il problema sta nel fatto che una nozione vermente precisa e puramente macroscopica di tasso di creazione di entropia *non* è, a tutt' oggi, ben stabilita in sistemi in non equilibrio, eccetto forse che per sistemi molto vicini all' equilibrio. Ma non è questa la sede per entrare in una discussione sui principi della termodinamica del non equilibrio.

Un' ipotesi fondamentale che viene spesso ammessa nella dinamica dei continui è che la relazione fra le *forze termodinamiche* X_j e le *correnti* o *flussi* J_j sia *lineare*, a parametri di stato locali ρ, p, T fissati:

$$1.23 \quad J_j = \sum_k L_{jk} X_k \quad (1.23)$$

almeno se le forze termodinamiche sono “piccole”. Questa relazione viene combinata con le proprietà di invarianza per trasformazioni di Galilei e eventuali altre simmetrie (presenti in fluidi a più componenti e/o chimicamente attivi) e con due principi della termodinamica dei processi irreversibili: le *relazioni di Onsager* e il *principio di Curie* per ottenere importanti restrizioni sui tensori $\underline{\kappa}, \underline{\tau}'$.

Le relazioni di Onsager dicono che la matrice L è simmetrica:

$$1.24 \quad L_{jk} = L_{kj} \quad (1.24)$$

mentre il principio di Curie dice che alcuni fra i coefficienti L_{jk} sono nulli. Se $L_{jk} = 0$ si dice che la corrente J_j *non dipende direttamente dalla* (o *non si accoppia direttamente con la*) forza termodinamica X_k . E il principio di Curie è precisamente che le correnti J_j che hanno carattere vettoriale (ossia sono le componenti di una quantità che si trasforma come un vettore per trasformazioni di Galilei come la \underline{J}_q) non dipendono da forze termodinamiche con diverse proprietà di trasformazione (quali le $\partial_i u_j$ che hanno carattere tensoriale), e più in generale non c'è accoppiamento fra forze termodinamiche e correnti termodinamiche che hanno diverse proprietà di simmetria rispetto a gruppi di simmetria del continuo considerato.

Ad esempio κ_{ij} deve essere una matrice simmetrica e inoltre τ'_{ij} deve essere, oltre che simmetrica (che già segue dalla seconda equazione cardinale), esprimibile in termini delle derivate $\partial_i u_j$ tramite una combinazione di $\partial_i u_j + \partial_j u_i$ e $\delta_{ij} \partial_k u_k$ perchè questi sono gli unici tensori che si possono formare in modo da dipendere linearmente dalle $\partial_i u_j$:

$$1.25 \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ji}, \quad \tau'_{ij} = \eta (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \eta' \partial_k u_k \delta_{ij} \quad (1.25)$$

si veda (2.6), (4.38).

Le relazioni di Onsager sono una conseguenza macroscopica della reversibilità microscopica della dinamica, c.f.r. [DGM] e il principio di Curie pure trova le sue radici nella simmetria delle equazioni microscopiche, [DGM].

Il secondo principio della termodinamica si impone (non senza qualche difficoltà concettuale che non è qui il momento di discutere, c.f.r. problema (17)) richiedendo che $\sigma \geq 0$. Questo si impone richiedendo che il tensore $\underline{\kappa}$ sia definito positivo e che $\underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} \geq 0$ ossia $\eta, \eta' + 2\eta \geq 0$.

Problemi

[1]: Sia $X(\underline{x}, t)$ una generica grandezza e si definisca una *linea di corrente* come una soluzione $t \rightarrow \underline{x}(t)$ dell'equazione:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{u}(\underline{x}, t)$$

ove $\underline{u}(\underline{x}, t)$ è un dato campo di velocità. La *derivata sostanziale* di X è allora definita dalla derivata rispetto a t di $X(\underline{x}(t), t)$ e si scrive:

$$\frac{d}{dt} X(\underline{x}(t), t) = \partial_t X + \underline{u} \cdot \underline{\partial} X$$

Si dimostri che:

$$\rho \frac{d}{dt} X = \partial_t(\rho X) + \underline{\partial}(\rho X \underline{u})$$

(Idea: si usi l'equazione di continuità per ρ).

[2]: Si constati che l'equazione di continuità si può leggere dicendo che la derivata sostanziale di ρ è $-\rho \underline{\partial} \cdot \underline{u}$.

[3]: Si consideri un gas rarefatto monoatomico con atomi di massa m e raggio σ , che occupa il semispazio $z > 0$. Si immagini che il fluido sia dotato di un moto isoterma stratificato con velocità $v(z) = z v'$ nella direzione x . Sia ρ_n la densità numerica (numero di atomi per unità di volume), λ è il cammino libero medio e $\bar{v} = (3kT/m)^{1/2}$ è la velocità media di agitazione termica (ove k è la costante di Boltzmann e T è la temperatura). Si trovi un argomento che giustifichi euristicamente, e trascurando le componenti orizzontali delle velocità, l'affermazione che il numero di particelle che attraversa la superficie ideale di quota $z_0 \gg \lambda$ provenendo da quote $z > z_0$ e senza subire collisioni è, nel tempo $\tau = \lambda/\bar{v}$:

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} dz \int_{-w_z \tau > \lambda} \rho_n dx dy f(\underline{w}) d\underline{w}$$

se $f(\underline{w}) = e^{-\frac{m \underline{w}^2}{2kT}} (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}$ è la distribuzione di Maxwell.

[4]: Nel contesto del problema [3] si deduca che le variazioni dell'impulso e dell'energia cinetica di agitazione termica contenuti nello strato di gas a quota $z \leq z_0$ per unità di tempo e di superficie sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^\lambda dh \int_{\lambda/\tau}^\infty \rho_n dw \frac{e^{-\frac{m w^2}{2kT}}}{(2\pi kT/m)^{1/2}} (2m h v'), \\ \frac{1}{\tau} \int_0^\lambda dh \int_{\lambda/\tau}^\infty \rho_n dw \frac{e^{-\frac{m w^2}{2kT}}}{(2\pi kT/m)^{1/2}} (2 \frac{3}{2} k h \frac{dT}{dz}) \end{aligned}$$

Dedurre da questo che la forza per unità di superficie esercitata dal fluido al di sopra della quota z_0 sulla parte al di sotto di z_0 è $F = \bar{\eta} v'$ con:

$$\bar{\eta} = m \bar{v} \rho_n \lambda \gamma, \quad \gamma = \int_{\sqrt{3}}^\infty e^{-p^2/2} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}}$$

Dedurre anche che la quantità di calore per unità di tempo che attraversa la superficie a quota z_0 è $Q = \kappa \frac{dT}{dz}$ con:

$$\kappa = \frac{3}{2} k \bar{v} \rho_n \lambda \gamma$$

Si dimostri che $\eta = m \frac{\gamma}{\pi \sigma^2} \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. (Idea: si usi la formula (definizione) $\lambda \pi \sigma^2 \rho_n = 1$ per il libero cammino medio in termini del diametro σ degli atomi).

[5]: Nel contesto dei problemi [3,4] si supponga che il tensore degli sforzi del gas sia $\tau'_{ij} = \eta(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ con η costante: si calcoli la forza per unità di superficie che la parte di gas a quota $\geq z_0$ esercita sulla parte di gas a quota inferiore e si deduca che $\eta = \bar{\eta}$; e che quindi vale la *relazione di Clausius Maxwell* fra viscosità, conducibilità termica e calore specifico a volume costante per unità di massa $c_v \equiv \frac{3}{2} R M_A^{-1}$ (ove R è la costante dei gas e M_A è la "massa atomica", (e.g. 4g per l'elio)):

$$\kappa = c_v \eta$$

e si deduca la indipendenza della viscosità η e della conducibilità κ dalla densità e la loro proporzionalità a \sqrt{T} . Si controlli che perfezionando i calcoli in vari modi, ad esempio non trascurando le componenti orizzontali delle velocità, si alterano i risultati solo per fattori numerici indipendenti dalle grandezze fisiche m, ρ, T , e in particolare, la relazione di Clausius Maxwell resta la medesima (nei gas rarefatti).

[6]: Si mostri che in un fluido perfetto ($\tau', \kappa, g = 0$, c.f.r. (1.17)):

$$\partial_t \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) dP = - \int_V \rho \underline{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) dP = \int_{\partial V} \rho \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma$$

ove $w = \varepsilon + p/\rho$. E quindi $\rho \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \underline{v}$ può essere interpretato come *flusso di energia*. (Idea: se $d\sigma$ è un elemento di superficie con normale \underline{n} la quantità di energia che passa per $d\sigma$ nella direzione \underline{n} è $\rho(-\underline{v}^2/2 + \varepsilon) \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma - p \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma$ perchè la prima è la quantità di energia che "esce" attraverso $d\sigma$ per unità di tempo e la seconda è il lavoro che viene effettuato dalla parte di fluido opposta a \underline{n} , per unità di tempo.)

[7] Si supponga che un fluido sia costituito da una miscela di n diversi fluidi. Siano ρ_1, \dots, ρ_n le densità e $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ le velocità rispettive. Allora $\rho = \sum_j \rho_j$ è la "densità totale" e $\underline{u} = \rho^{-1} \sum_j \rho_j \underline{u}_j$ è il "campo di velocità" del fluido. Si faccia vedere che le equazioni di continuità possono scriversi nella forma:

$$\partial_t \rho_k = -\underline{\partial} \cdot (\rho_k \underline{u}_k), \quad \partial_t \rho = -\underline{\partial} \cdot (\rho \underline{u})$$

Porremo $\underline{J} = \rho \underline{u}$ and $\underline{J}_k = \rho_k (\underline{u}_k - \underline{u})$: si verifichi che se $\frac{d}{dt} \stackrel{def}{=} \partial_t + \underline{u} \cdot \underline{\partial}$ allora:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k \underline{\partial} \cdot \underline{u} - \underline{\partial} \cdot \underline{J}_k$$

[8] Nel contesto del problema [7], si supponga che fra le n specie di fluido siano possibili r reazioni chimiche e che, altrimenti, le interazioni fra le particelle siano modellate da cuori duri così che l'energia interna è interamente cinetica. Se l'equazione chimica della r -ma reazione chimica si scrive $\sum_{k=1}^n n_{kj} [k] = 0$, ove n_{jk} sono interi stechiometrici (ad esempio $2[H_2] + [O_2] - 2[H_2O] = 0$ coinvolge tre specie H_2 , O_2 , and H_2O di masse molecolari 2, 16, 18 rispettivamente), si definiscono i *coefficienti stechiometrici* della reazione j le quantità $\nu_{jk} = m_k n_{jk}$ se m_k è la massa molecolare della specie k . Allora: $\sum_{k=1}^n \nu_{jk} = 0$, per la conservazione della massa (*legge di Lavoisier*), $\sum_k \nu_{jk} \underline{u}_k = \underline{0}$ per la conservazione dell'impulso e $\sum_k \nu_{jk} \frac{1}{2} \underline{u}_k^2 = \eta_j$ per la conservazione dell'energia se η_j è l'energia liberata nella j -ma reazione. Sia R_j il numero di reazioni chimiche di tipo j che hanno luogo per unità di volume e di tempo (un numero che può avere entrambi i segni: $R_j > 0$ significa che la reazione procede nella direzione che trasforma molecole con coefficienti stechiometrici negativi in molecole con coefficienti stechiometrici positivi e viceversa per $R_j < 0$). Si faccia vedere che le equazioni di continuità vengono modificate in:

$$\partial_t \rho_k = -\underline{\partial} \cdot (\rho_k \underline{u}_k) + \sum_{j=1}^r R_j \nu_{jk}, \quad \partial_t \rho = -\underline{\partial} \cdot (\rho \underline{u})$$

Inoltre, con le notazioni di [7]:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k \underline{\partial} \cdot \underline{u} - \underline{\partial} \cdot \underline{J}_k + \sum_{j=1}^r R_j \nu_{jk}, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \underline{\partial} \cdot \underline{u}$$

Infine, posto $c_k = \rho_k/\rho$, si ha:

$$\rho \frac{dc_k}{dt} = -\underline{\partial} \cdot \underline{J}_k + \sum_{j=1}^r R_j \nu_{jk}$$

[9] Nei modelli di fluido a più componenti chimicamente attive si verifichi che l'equazione corrispondente alla I^a equazione cardinale (conservazione dell' impulso) è:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\underline{\partial} p + \underline{\partial} \underline{\tau}' + \sum_{k=1}^n \rho_k \underline{g}_k$$

ove p è la somma delle pressioni parziali p_k di ciascuna specie, $\underline{\tau}'$ è la somma degli sforzi

$\underline{\tau}'_k$ su ciascuna specie più il tensore $\sum_k \mathbf{u}_k \underline{J}_k$, e $\underline{g}_k = -\underline{\partial} V_k$ è la forza, con energia potenziale per unità di massa V_k , agente sull' specie k -ma (che potrebbe dipendere dalla specie: si pensi, ad esempio, ad una soluzione ionizzata in un campo elettrico) purchè l' energia potenziale totale non cambi nelle reazioni chimiche (cioè $\sum_k \nu_{jk} V_k = 0$). (*Idea*: Si scriva la I -th equazione cardinale per ciascuna specie k :

$$\partial_t(\rho_k \mathbf{u}_k) + \underline{\partial} \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) = -\underline{\partial} p_k + \underline{\partial} \underline{\tau}'_k + \rho_k \underline{g}_k + \sum_j R_j \nu_{jk} \mathbf{u}_k$$

e si sommi su k considerando la conservazione dell' impulso in [1.1.8].)

[10] Nel contesto di [8], [9] si chiami $\underline{J}_k = (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \rho_k$ la *corrente di diffusione* della k -ma specie, c.f.r. [1.1.7], e si verifichi che l' equazione di conservazione dell' energia è

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \underline{\partial} \cdot \mathbf{u} + \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \mathbf{u} + \sum_k \underline{g}_k \cdot \underline{J}_k - \underline{\partial} \cdot \underline{J}_q$$

ove $\rho \varepsilon \stackrel{def}{=} \sum_k \rho_k (\varepsilon_k + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u})^2)$ and \underline{J}_q è opportunamente definito. (*Idea*: L' energia in un elemento di volume Δ dovuta alla k -ma specie è $\int_{\Delta} \rho_k (\varepsilon_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^2) d\mathbf{x}$ se ε_k è l'energia interna per particella. Supponiamo che non ci sia interazione fra le specie altra che quella che dà luogo alle reazioni chimiche e agli urti elastici fra le sfere dure che modellano le particelle. Allora, posto $\vartheta_k \stackrel{def}{=} (\varepsilon_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^2)$, il bilancio dell' energia per la k -ma specie da

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_k \vartheta_k) + \underline{\partial} \cdot (\rho_k \vartheta_k \mathbf{u}_k) &= -\underline{\partial} \cdot (p_k \mathbf{u}_k) + \underline{\partial} \cdot (\underline{\tau}'_k \mathbf{u}_k) + \\ &+ \rho_k \underline{g}_k \cdot \mathbf{u}_k + \underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa}_k \cdot \underline{\partial} T) + \delta_k \end{aligned}$$

ove $\underline{\kappa}_k \cdot \underline{\partial} T$ è il flusso di calore nella specie k -ma e δ_k è la variazione totale dell'energia

della specie k dovuta alle reazioni chimiche, $\delta_k = \sum_j \nu_{jk} (\eta_{jk} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^2)$, con η_{jk} uguale alla energia di dissociazione della k -ma specie nelle componenti coinvolte nella j -ma reazione, in modo che $\sum_k \delta_k = 0$. Aggiungendo e sottraendo $\underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa} \cdot \underline{\partial} T)$ ove conveniente e sommando su k si trova

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \varepsilon + \rho \frac{1}{2} \mathbf{u}^2) + \underline{\partial} \cdot (\sum_k \rho_k (\varepsilon_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^2) (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + \rho \varepsilon + \rho \frac{1}{2} \mathbf{u}^2) &= \\ = -\underline{\partial} \cdot (p \mathbf{u}) - \underline{\partial} \cdot (\sum_k p_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u})) + \underline{\partial} \cdot (\sum_k \underline{\tau}'_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u})) + \underline{\partial} \cdot (\underline{\tau}' \mathbf{u}) &+ \\ + \sum_k \rho_k \underline{g}_k \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) + (\sum_k \rho_k \underline{g}_k) \cdot \mathbf{u} + \underline{\partial} \cdot (\underline{\kappa} \cdot \underline{\partial} T) \end{aligned}$$

quindi, da [9], [8], si ottiene il risultato con

$$\underline{J}_q \stackrel{def}{=} \sum_k \left((\varepsilon_k + \frac{1}{2} \underline{u}_k^2) \underline{J}_k + \underline{\tau}'_k (\underline{u}_k - \underline{u}) - p_k (\underline{u}_k - \underline{u}) \right) - \underline{\kappa} \underline{\partial} T$$

si veda anche [DGM84].)

[11] Il secondo principio della termodinamica, nel caso di sistemi in cui avvengono reazioni chimiche, prende la forma $TdS = dU + pdV - \sum_k \mu_k d(\rho_k V)$ ove μ_k è il potenziale chimico per unità di massa della specie k -ma. Procedendo come nel punto (V) si mostri che [8],[9],[10] implicano:

$$\rho(\partial_t s + \underline{u} \cdot \underline{\partial} s) = -\frac{1}{T} \underline{\partial} \cdot \underline{J}_q + \frac{1}{T} \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \frac{1}{T} \mu_k \underline{\partial} \cdot \underline{J}_k - \frac{1}{T} \nu_{jk} R_j \mu_k + \frac{1}{T} \underline{g}_k \cdot \underline{J}_k$$

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t s + \underline{u} \cdot \underline{\partial} s) &= -\frac{1}{T} \underline{\partial} \cdot \underline{J}_q + \frac{1}{T} \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_k \left(\mu_k \underline{\partial} \cdot \underline{J}_k - \sum_j \nu_{jk} R_j \mu_k + \underline{g}_k \cdot \underline{J}_k \right) \end{aligned}$$

(*Idea*: Si combinino [10] con la seconda delle [8] oppure, usando l'invarianza di ρV (conservazione della massa) con la terza di [8]).

[12] Si ponga, si veda anche [10]:

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_k \mu_k \nu_{jk}, \quad \underline{J}_s = \frac{1}{T} (\underline{J}_q - \sum_{k=1}^n \mu_k \underline{J}_k) \\ \sigma &= -\underline{J}_q \cdot \frac{\underline{\partial} T}{T^2} - \sum_{k=1}^n (\underline{J}_k \cdot (\underline{\partial} \frac{\mu_k}{T} - \frac{1}{T} \underline{g}_k) + \underline{\tau}' \cdot \frac{1}{T} \underline{\partial} \underline{u} - \sum_{j=1}^r R_j \frac{A_j}{T}) \end{aligned}$$

e si verifichi che l'equazione del bilancio entropico in [11], che generalizza la (1.21), può essere scritta come:

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\underline{\partial} \cdot \underline{J}_s + \sigma$$

e (quindi, a parte qualche problema concettuale sulla univocità delle identificazioni dei vari termini nell'equazione del bilancio) la quantità \underline{J}_s si interpreta come la “*corrente di entropia*” trasportata dai campi di velocità, mentre σ si interpreta come la quantità di entropia generata per unità di volume (dai processi irreversibili che hanno luogo durante il moto dei fluidi). Il secondo principio richiede, se si accetta questa interpretazione, che $\sigma \geq 0$. Se questo appare troppo restrittivo si dovrebbe, però, almeno richiedere che sia $\Gamma = \int \sigma dP \leq 0$.

[13] Si verifichi che, definendo “*forze termodinamiche*” \underline{X} e “*correnti termodinamiche*” o “*flussi*” come:

$$\underline{X} = (-\frac{\partial_i T}{T^2}, -\partial_i \frac{\mu_k}{T} + g_{ki}, \frac{\partial_i u_j}{T}, -\frac{A_j}{T}), \quad \underline{J} = (J_{qi}, J_{ki}, \tau'_{ij}, R_j)$$

l'entropia generata per unità di volume σ , definita in [12], si scrive:

$$\sigma = \sum_j J_j X_j$$

estendendo così al caso di fluidi chimicamente attivi e a più componenti i risultati della teoria dei fluidi omogenei. Si formulino il principio di Curie e le relazioni di Onsager per questi fluidi. (*Idea*: sono "identici").

[14] Si supponga che in un fluido a n componenti la relazione fra le correnti e le forze termodinamiche sia lineare: $J_i = \sum_k L_{ik} X_k$, e che le L_{ik} siano *costanti* e verifichino le relazioni di Onsager. Allora la *produzione di entropia* per unità di tempo $\Gamma \stackrel{def}{=} \int_{\Omega} \sigma dP$ ha derivata rispetto al tempo:

$$\dot{\Gamma} = 2 \int_{\Omega} \sum_j J_j \cdot \partial_t X_j dP = 2 \int_{\Omega} \sum_j \partial_t J_j \cdot X_j dP$$

(*Idea*: $\Gamma = \int \sum_{jk} L_{jk} X_j X_k dP$ si derivi).

[15] Si consideri un sistema in [8] e si verifichi che il numero di equazioni è uguale al numero di incognite, elencando le variabili e le equazioni prescelte. (*Idea*: Ad esempio possiamo descrivere il sistema a mezzo delle densità ρ_k , dei campi di velocità \underline{u}_k e delle energie interne ε_k ; allora le prime delle [8] sono equazioni per le ρ_k , la [9] da un'equazione per le \underline{u}_k and [1.1.10] una per le ε_k . Le equazioni di stato $s_k = s_k(\varepsilon_k, \rho_k)$ e $\mu_k = \mu_k(\varepsilon_k, \rho_k)$ (che non sono indipendenti) danno l'entropia e i potenziali chimici, quindi la temperatura $T = \frac{\partial s_k}{\partial \varepsilon_k}$ (che abbiamo supposto essere la stessa per tutte le specie) e le pressioni parziali; sono anche necessarie le equazioni costitutive esprimenti gli sforzi e, più generalmente, i flussi in termini delle forze (cioè la matrice L) così che per esempio $R_j = \sum_{j'} L_{jj'} \sum_k \nu_{j'k} \mu_k$ ("legge dell'azione di massa").)

[16] Si considerino n fluidi in equilibrio meccanico ($p = \text{cost}$ e $\underline{u} = \underline{0}$), con condizioni al bordo in cui T è costante nel tempo (in ogni punto del bordo) e la corrente diffusiva della specie k -ma è nulla ($\underline{J}_k = \underline{0}$ in ogni punto del bordo). Si supponga che L_{jk} siano costanti e che non ci siano campi di forze di volume esterne ($\underline{g}_k = \underline{0}$). Tenendo conto che $\sum_k \underline{J}_k = \underline{0}$, si verifichi che l'entropia prodotta per unità di tempo e di volume è:

$$\sigma = \underline{J}_q \cdot \underline{\partial} \frac{1}{T} - \sum_{j=1}^r R_j \frac{A_j}{T} - \sum_{k=1}^{n-1} \underline{J}_k \cdot \underline{\partial} \frac{\mu_k - \mu_n}{T}$$

e si verifichi poi che gli stati che rendono la produzione di entropia Γ stazionaria (rispetto alle variazioni delle forze \underline{X}) sono stati statici, ossia descritti da campi indipendenti dal tempo (Prigogine). (*Idea*: le equazioni di Lagrange per il minimo sono $L \underline{X} = \underline{0}$, ossia $\underline{J} = \underline{0}$: quindi $R_j = 0$, $\underline{J}_q = \underline{0}$, $\underline{J}_k = \underline{0}$ e pertanto $\frac{d\rho_k}{dt} = 0$, $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$ per [8],[9],[10].)

[17] Si mostri che gli stati statici (ossia con campi indipendenti dal tempo) del sistema a n fluidi del [14] che minimizzano (in senso stretto) la produzione di entropia e che sono stati di equilibrio meccanico e termico (ossia p, T costanti in funzione del tempo e $\underline{u} = \underline{0}$ e tali che la funzione di Gibbs per unità di massa $g = \varepsilon - Ts + p\rho^{-1} \equiv \sum_k \mu_k c_k$ è in ogni punto minima in senso stretto) sono stati di equilibrio stabile fra gli stati in equilibrio meccanico e termico se i fluidi possono essere considerati come gas perfetti (Prigogine). (*Idea*: Si immagini di perturbare lo stato variando T e c_k di poco mantenendo $\underline{\partial} p, \underline{u} = \underline{0}$; allora il sistema evolve e si ha, per [14]:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= 2 \int_{\Omega} \left(\underline{J}_q \cdot \partial_t \underline{\partial} \frac{1}{T} - \sum_{k=1}^{n-1} \underline{J}_k \cdot \partial_t \underline{\partial} \cdot \frac{\mu_k - \mu_n}{T} - \sum_{j=1}^r R_j \partial_t \frac{A_j}{T} \right) dP = \\ &= 2 \int_{\Omega} \left(- \underline{\partial} \cdot \underline{J}_q \partial_t \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\underline{\partial} \cdot \underline{J}_k - \sum_{j=1}^r R_j \nu_{jk} \right) \partial_t \frac{\mu_k - \mu_n}{T} \right) dP \end{aligned}$$

E ricordando che $\sum_k \nu_{jk} = 0$ e le equazioni di continuità per le concentrazioni c_k (in [8] e nell'idea per il problema [11]):

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= 2 \int_{\Omega} \left(-\underline{\partial} \cdot \underline{J}_q \partial_t \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\underline{\partial} \cdot \underline{J}_k - \sum_{j=1}^r \nu_{jk} R_j \right) \partial_t \frac{\mu_k - \mu_n}{T} \right) dP = \\ &= 2 \int_{\Omega} \left(-\underline{\partial} \cdot \underline{J}_q \partial_t \frac{1}{T} - \sum_{k=1}^{n-1} \rho \frac{dc_k}{dt} \partial_t \frac{\mu_k - \mu_n}{T} \right) dP = 2 \int_{\Omega} \left(-\underline{\partial} \cdot \underline{J}_q - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \rho \frac{dc_k}{dt} (\mu_k - \mu_n) \right) \partial_t \frac{1}{T} - \frac{\rho}{T} \sum_{h,k=1}^{n-1} \left(\partial_{c_h} (\mu_k - \mu_n) \frac{dc_h}{dt} \frac{dc_k}{dt} \right) dP \end{aligned}$$

and per la nostra ipotesi di staticità si ha $\frac{dc_k}{dt} = \partial_t c_k$; si noti che $T^{-1}(\mu_k - \mu_n)$ dipende solo da c_k, c_n per l'ipotesi di gas perfetto (invero in un gas perfetto di massa m_k e temperatura T il potenziale chimico è $\mu_k = k_B T (\log \rho_k - \frac{3}{2} \log(k_B T)^{-1} - \frac{3}{2} \log m_k)$). Ma dalla termodinamica si ha $TdS = dU + pdV - \sum_k \mu_k d(c_k \rho V)$ (si noti che è conveniente introdurre c_k perchè $\rho|\Delta|$ è costante nel tempo, mentre, $\rho_k|\Delta|$ non è tale, per la seconda equazione in [8]).

Ossia $Tds = d\varepsilon + pd\rho^{-1} - \sum_k \mu_k dc_k$, quindi (ricordando che $\underline{u} = \underline{0}$) si ha che $(-\underline{\partial} \cdot \underline{J}_q - \sum_{k=1}^{n-1} \rho \partial_t c_k (\mu_k - \mu_n)) \partial_t \frac{1}{T}$ è uguale, per la equazione nel problema [10] (che in questo caso diventa $\rho \partial_t \varepsilon - \rho \sum_k (\mu_k - \mu_n) \partial_t c_k \equiv \rho C \partial_t T$), al calore generato per unità di volume e C è la capacità termica durante la trasformazione.

La condizione di equilibrio termico è che in un volume Δ la funzione $G = U + p|\Delta| - TS = \sum_k \mu_k \rho_k V$ (quindi, c.f.r. [1.1.11], $dG = -SdT + |\Delta|dp + \sum_k \mu_k d\rho_k |\Delta|$) sia minima a T, p fissati. Pertanto in questo caso $dg = \sum_{k=1}^{n-1} (\mu_k - \mu_n) dc_k$ (ove $g = \varepsilon - Ts + p\rho^{-1}$), e si vede che la forma quadratica $(M\delta c, \delta c) = \sum_{h,k=1}^{n-1} \partial_{c_h} (\mu_k - \mu_n) \delta c_h \delta c_k$ deve essere definita positiva. Quindi

$$\dot{\Gamma} = 2 \int \left(-\frac{\rho C}{T^2} (\partial_t T)^2 - \frac{\rho}{T} (M\partial_t c, \partial_t c) \right) dP \leq 0$$

negli stati ottenuti via una piccola perturbazione di uno stato iniziale che sia una piccola perturbazione di uno stato di equilibrio con Γ minimo.)

[18] I risultati sulle proprietà di minimo di Γ si estendono a casi più generali di quelli trattati in [16] ma non si può in generale fare a meno della condizione che i coefficienti L_{ik} siano costanti e non si può quindi, sulla base di quanto discusso, formulare un principio universale per cui gli stati statici di un sistema di fluidi a molte componenti si ottengono *minimizzando la produzione di entropia* compatibilmente con le condizioni al bordo e le forze agenti (perchè la costanza di L_{jk} è un'ipotesi molto restrittiva in quanto spesso non è verificata neppure approssimativamente, c.f.r. [5]). Se ne può dedurre che allora ci sia qualche problema di fondo nella interpretazione delle equazioni per la termodinamica dei fluidi? ad esempio la definizione di entropia prodotta per unità di massa in [12] e (1.21) è non completamente priva di ambiguità e ha comunque natura fenomenologica. Quindi una eventuale rifondazione della teoria della Termodinamica del non equilibrio dovrà essere basata sui principi primi della Meccanica piuttosto che su una estensione, in un certo senso arbitraria, della termodinamica macroscopica dell'equilibrio. È concepibile che una generalizzazione ai fenomeni di non equilibrio (anche se statici) della Termodinamica classica non sia possibile, almeno non senza profonde revisioni dei concetti fondamentali. Nulla consente di credere, invero, che una così semplice e profonda teoria, quale la Termodinamica dell'equilibrio, sia effettivamente estendibile fuori dai fenomeni di equilibrio eccezion fatta per alcuni casi semplici (anche se molto importanti).

Bibliografia: [LL], [DGM]. I problemi 7 ÷ 17 forniscono una esposizione concisa delle prime 82 pagine di [DGM].

§2 *Le equazioni del moto di un fluido in generale. Caso ideale e caso incompressibile. Equazioni di Eulero, di Navier–Stokes e di Navier–Stokes–Fourier incompressibili.*

Le equazioni del moto di un fluido in un punto P interno alla regione Ω che esso occupa sono dunque, se si immagina che il fluido sia descritto da \underline{u} , T , p :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \partial_t \rho + \underline{\partial} \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \\
 (2) \quad & \rho (\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) = -\underline{\partial} p + \rho \underline{g} + \underline{\partial} \underline{\tau}' \\
 (3) \quad & T \rho (\partial_t s + \underline{u} \cdot \underline{\partial} s) = \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} (\underline{\kappa} \cdot \underline{\partial} T) \\
 (4) \quad & s = s(\rho, \varepsilon), \quad T^{-1} = \partial_\varepsilon s(\rho, \varepsilon), \quad p = -T \rho^2 \partial_\rho s(\rho, \varepsilon) \\
 (5) \quad & \tau'_{ij} = \theta_{ij}(\underline{\partial} \underline{u}, \rho, T), \quad \theta_{ij}(0, \rho, T) \equiv 0 \\
 (6) \quad & \kappa_{ij} = \xi_{ij}(\rho, T)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

e le (4) (equazione di stato), (5), (6) (equazioni costitutive) servono a far sì che le (1), (2), (3) forniscano un sistema di cinque equazioni per le cinque incognite \underline{u} , T , ρ .

Le (5), (6) potrebbero essere più generali, ove si permettesse al tensore degli sforzi di dipendere anche dalle derivate di ordine superiore delle \underline{u} , o a quello di di conducibilità di dipendere anch'esso dalle derivate di \underline{u} . Di solito però non considereremo modelli così generali.

È bene osservare che le (2.1) sono invarianti per cambiamenti di riferimento inerziale: invero se $t \rightarrow \rho(\underline{x}, t)$, $T(\underline{x}, t)$, $\underline{u}(\underline{x}, t)$ è una soluzione delle 1), 2), 3) è chiaro che $t \rightarrow \rho'(\underline{x}', t)$, $T'(\underline{x}', t)$, $\underline{u}'(\underline{x}', t)$, con:

$$\rho'(\underline{x}', t) = \rho(\underline{x}' + \underline{v}t, t), \quad T'(\underline{x}', t) = T(\underline{x}' + \underline{v}t, t), \quad \underline{u}'(\underline{x}', t) = \underline{u}(\underline{x}' + \underline{v}t, t) - \underline{v} \tag{2.2}$$

dà il moto visto da un riferimento inerziale in moto con velocità \underline{v} e coincidente con il precedente riferimento all'istante $t = 0$. Si verifica immediatamente che (2.2) risolve le (2.1): il punto importante è, naturalmente, che la velocità appare solo tramite le sue derivate nelle equazioni costitutive.

È ovvio che questa proprietà di invarianza non potrebbe essere vera se nelle equazioni costitutive la dipendenza della velocità non si manifestasse attraverso le derivate di \underline{u} : è (anche) per questo che non si considerano equazioni costitutive in cui la dipendenza da \underline{u} si manifesta esplicitamente (e non solo attraverso le sue derivate).

Le funzioni $s(\rho, \varepsilon)$ non sono arbitrarie ma devono verificare condizioni imposte dalle leggi della termodinamica e della meccanica statistica: ad esempio $\rho^{-1} s(\rho, \varepsilon)$ deve essere una funzione convessa nei suoi argomenti e monotona crescente in ε e decrescente in ρ .

Esaminiamo ora una classe di casi particolari delle (2.1) in cui la ρ è considerata vincolata a restare costante: sono i casi di fluidi incomprimibili.

Il caso più semplice è quello di fluidi che non sono viscosi ($\tau' = 0$) e che non conducono il calore ($\kappa = 0$):

$$2.3 \quad \tau'_{ij} = 0, \quad \kappa_{ij} = 0. \quad (2.3)$$

In questi casi, essendo ρ costante ovunque, le (2.1) diventano:

$$2.4 \quad \begin{aligned} (1) \quad & \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \\ (2) \quad & \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} \\ (3) \quad & \partial_t s + \underline{u} \cdot \underline{\partial} s = 0 \\ (4) \quad & s = \sigma(T) \end{aligned} \quad (2.4)$$

ove si è scelto di scrivere l' entropia come funzione di T poiché σ non è singolare quando $(\partial p / \partial \rho) = \infty$.

Le (3) dicono $(ds/dt) = 0$: ossia s è costante lungo le linee di corrente di un fluido incomprimibile. Quindi di particolare interesse è il caso di un fluido che all' istante iniziale sia "isoentropico", ossia tale che $s(\underline{x}, 0) = s_0 =$ costante. Questa è infatti una situazione che si conserva e la temperatura sarà in ogni punto data da $T = f(s_0) =$ costante e quindi sparisce dalle equazioni che divengono:

$$2.5 \quad \begin{aligned} & \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \\ & \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} \end{aligned} \quad (2.5)$$

e si hanno così quattro equazioni per le quattro incognite \underline{u}, p , che vengono chiamate *equazioni di Eulero*.

Ci si deve però porre la domanda di come la (2.4) possa avere a che fare con un fluido reale. In tale fluido la densità sarebbe fissata e la entropia sarebbe funzione della sola temperatura: ma allora l' equazione di stato determinerebbe la pressione e (2.4) sarebbe sovradeterminata; ad esempio se all' istante iniziale s e quindi T fossero costanti su tutto il volume, allora resterebbero tali e, quindi, anche p che ne è funzione; e dunque $\underline{\partial} p = \underline{0}$ e si avrebbero quattro equazioni per le tre incognite \underline{u} . Questo significa che la quantità p che appare in (2.4) non può essere ingenuamente identificata con la pressione nel senso fisico della parola (nel caso incomprimibile) e, quindi, l' interpretazione della (2.4) è più delicata di quanto sembri, *c.f.r.* osservazioni seguenti (3.10).

Il caso più semplice dopo quello considerato è quello di un fluido viscoso incomprimibile, non conduttore: in tal caso $\underline{\kappa} = \underline{0}$ ma $\tau'_{ij} \neq 0$. Poiché τ'_{ij} deve annullarsi per $\partial_i u_j = 0$ il modello più semplice è quello dato dall' equazione costitutiva:

$$2.6 \quad \tau'_{ij} = \eta(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \eta' \underline{\partial} \cdot \underline{u} \delta_{ij} \quad \kappa = 0 \quad (2.6)$$

con η, η' scalari e dipendenti solo da ρ e s (e, cioè, non dalle derivate di \underline{u}), che può intendersi come un primo termine di uno sviluppo in serie di potenze in $\underline{\partial u}$ di τ'_{ij} in cui i termini di ordine superiore sono trascurati. Il coefficiente η è una funzione di ρ e s che viene di solito chiamata *viscosità dinamica* mentre a $\nu = \eta/\rho$ si riserva il nome di *viscosità cinematica*. La incomprimibilità si esprime con $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ e quindi, nei casi incomprimibili, il secondo termine può essere omissso.

Un fluido incomprimibile con equazione costitutiva (2.6) e $\nu =$ costante si dice un *fluido incomprimibile di Navier-Stokes* ed è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \\
 (2) \quad & \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{g} \\
 (3) \quad & \rho T (\partial_t s + \underline{u} \cdot \underline{\partial} s) = \frac{\eta}{2} \sum_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \\
 (4) \quad & s = \sigma(T)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

e le prime due equazioni dovrebbero determinare p e \underline{u} mentre la quarta stabilisce un opportuno legame σ fra s e T che consente di calcolare, via la (3) e per integrazione lungo le linee di corrente, s a partire dal suo dato iniziale. Il problema si disaccoppia e le “vere” equazioni sono le prime due, chiamate *equazioni di Navier Stokes*. Il problema interpretativo menzionato dopo la (2.5) sussiste ancora, evidentemente.

Più difficile è la descrizione di un fluido viscoso, termoconduttore e incomprimibile. Se in un tale fluido la densità non dipendesse dalla temperatura allora le equazioni per \underline{u} sarebbero identiche all’equazione di Navier Stokes con densità costante (poichè l’ incomprimibilità significa che la densità non dipende dalla pressione), mentre l’ entropia dovrebbe dipendere dalla sola temperatura: $\sigma(T) = \int c_p dT/T$ e le equazioni (2.1) diverrebbero le equazioni:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \\
 (2) \quad & \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{g} \\
 (3) \quad & \rho c_p (\partial_t T + \underline{u} \cdot \underline{\partial} T) = \frac{\eta}{2} \sum_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 + \kappa \Delta T
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

con $\rho =$ costante. E pertanto il problema *sembra* disaccoppiarsi in quello, indipendente dalla temperatura, di risolvere (1) e (2) e quindi in quello di risolvere la (3) che è l’ equazione di Fourier in presenza di trasporto di materia. Questo disaccoppiamento, però, è una proprietà illusoria, infatti, come vedremo al §5, la seconda e terza equazione sono accoppiate dalle condizioni al contorno del contenitore che possono coinvolgere sia p che T ; e anche i problemi interpretativi menzionati per le equazioni di Eulero e Navier Stokes sono ancora presenti e, come vedremo, in un certo senso più profondi, cfr §5.

Inoltre le condizioni nelle quali si possa ritenere che, con buona approssimazione, la densità è costante mentre la conducibilità termica è non trascurabile sono rare nelle applicazioni ai fluidi.

Ad esempio nei problemi di convezione la variabilità della densità in funzione della temperatura è essenziale: si veda la discussione al §3 successivo e al §5.

Le (2.8), che hanno dunque interesse piuttosto limitato, possono essere chiamate “equazioni di Navier-Stokes-Fourier”, o equazioni NSF.

Considerazioni sul significato fisico della condizione di incomprimibilità.

Poiché nei fluidi reali $(\partial p / \partial \rho)_s < \infty$ ci si deve domandare in quali casi un fluido reale possa essere considerato come incomprimibile.

Per valutare qualitativamente il significato della ipotesi di incomprimibilità e la sua eventuale validità si svolgono considerazioni di *carattere dimensionale*.

L’idea che governa l’analisi è la seguente: si immagina che il fluido abbia un moto regolare e caratterizzato da una “variazione tipica di velocità” δv nel senso che in media nello spazio o nel tempo la velocità fluttua dell’ordine di grandezza di δv rispetto alle velocità medie nello spazio o tempo. Similmente si immagina che sia definito il valore δT “variazione tipica della temperatura” rispetto alla temperatura media e δp “variazione tipica della pressione”, etc. Inoltre si immagina che tali variazioni si manifestino su una scala di lunghezza l o di tempo τ .

In questa situazione quantità come $\underline{\partial u}$, $\partial_t \underline{u}$, $\Delta \underline{u}$, $\underline{\partial T}$, $\partial_t T$, ΔT , $\underline{\partial p}$ si stimano come “tipicamente” dell’ordine di grandezza rispettivo:

$$|\underline{\partial u}| \sim \frac{\delta v}{l}, \quad |\partial_t \underline{u}| \sim \frac{\delta v}{\tau}, \quad |\Delta \underline{u}| \sim \frac{\delta v}{l^2}, \quad |\underline{\partial T}| \sim \frac{\delta T}{l}, \quad |\Delta T| \sim \frac{\delta T}{l^2}, \quad |\underline{\partial p}| \sim \frac{\delta p}{l} \quad (2.9)$$

2.9

che devono essere interpretate come ordine di grandezza massimo.

Poiché si immagina che \underline{u} , ρ , T siano legate dalle equazioni del moto si devono avere relazioni opportune fra le varie quantità in (2.9). Precisamente dovranno esistere istanti in cui un dato termine delle equazioni ha lo stesso ordine di grandezza di un altro dato termine (altrimenti se, ad esempio, fosse sempre più piccolo si potrebbe sempre trascurare e l’equazione sarebbe più semplice).

Così, ad esempio, poichè $\partial_t \underline{u} + \text{altri termini} = -\rho^{-1} \underline{\partial p}$, si vede che in qualche istante e in qualche punto dovrà essere $\tau^{-1} \delta v \sim \rho^{-1} \delta p / l$; e poichè $\underline{u} \cdot \underline{\partial u} + \dots = -\rho^{-1} \underline{\partial p}$ esisterà un istante e un punto in cui $(\delta v)^2 / l \sim \delta p / \rho l$.

Nel caso isoentropico, ovvero se $(\partial \rho / \partial s)_p = -\rho^2 (\partial T / \partial p)_s \equiv \rho^2 \chi_s$ può essere trascurata nel calcolo delle variazioni di densità*, si ha che:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \cong \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\delta p}{\rho} \quad (2.10)$$

2.10

e vediamo che la condizione di validità della ipotesi di incomprimibilità, $\Delta \rho / \rho \ll 1$, può essere ottenuta valutando i valori massimi che $\delta p / \rho$ può

* ove χ_s è il coefficiente di riscaldamento per compressione adiabatica e la identità è dedotta da $\delta w = T \delta s + \rho^{-1} \delta p$, se w è l’entalpia per unità di massa.

acquisire.

(A) *Caso delle equazioni di Eulero*

Ad esempio nel caso delle equazioni di Eulero (2.5), con $\underline{g} = 0$ per semplicità, vediamo che:

$$2.11 \quad \frac{\delta p}{l\rho} \sim \frac{\delta v}{\tau} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\delta p}{l\rho} \sim \frac{(\delta v)^2}{l} \quad (2.11)$$

e quindi la condizione $\Delta\rho/\rho \ll 1$ diviene $\left(\frac{\delta v}{v_s}\right) \frac{l}{\tau v_s} \ll 1$ oppure $\left(\frac{\delta v}{v_s}\right)^2 \ll 1$ ove $v_s^{-2} = (\partial\rho/\partial p)_s$ e v_s ha, come ben noto dalla teoria dell'elasticità, il significato di velocità del suono $v_s \equiv v_{suono}$ nel fluido. Quindi:

$$2.12 \quad \frac{\delta v}{v_{suono}} \ll 1, \quad \frac{l}{\tau v_{suono}} \ll 1 \quad (2.12)$$

Tale relazione si interpreta al modo seguente; il fluido di Eulero può essere considerato "incomprimibile" se le variazioni di velocità sono piccole rispetto alla velocità del suono e se, inoltre, tali variazioni avvengono su una scala di lunghezza piccola rispetto a quella percorsa alla velocità del suono su una scala di tempo in cui si manifestano apprezzabili variazioni di velocità.

(B) *Caso delle equazioni di Navier-Stokes*

Nel caso delle equazioni di NS, ancora con $\underline{g} = 0$, il termine aggiuntivo $\nu \Delta \underline{u}$ nella seconda delle (2.7) aggiunge alle (2.11) un nuovo termine di confronto $\nu \delta v l^{-2}$ che quindi aggiunge alle (2.12) la $\frac{(\delta v)\nu}{v_s^2 l} \ll 1$; ossia:

$$2.13 \quad \frac{\nu}{v_{suono} l} \ll 1 \quad (2.13)$$

Poiché la seconda delle (2.8) coincide con la seconda delle (2.7) ed è l'unica equazione contenente p , si vede che (2.12), (2.13) sono tutte le condizioni di validità della approssimazione di incomprimibilità, nell'ipotesi che il coefficiente di riscaldamento per compressione sia trascurabile.

Se, infine, nelle equazioni considerate, si suppone $\underline{g} \neq 0$ si aggiunge un nuovo termine nella (2) e quindi si vede che δp può anche divenire tale che $\delta p/\rho l \sim g$ e questo conduce alla ulteriore condizione:

$$2.14 \quad \frac{lg}{v_{suono}^2} \ll 1 \quad (2.14)$$

(ossia in presenza di gravità la approssimazione di incomprimibilità richiede che la velocità acquisita da un grave in caduta libera da una altezza uguale alla lunghezza caratteristica di variazione sia piccola rispetto alla velocità del suono); quindi (2.12), (2.13) e (2.14) esprimono le condizioni di incomprimibilità

nei vari casi considerati, *se* il coefficiente di riscaldamento per compressione adiabatica può essere considerato nullo.

(C) *Caso in cui il riscaldamento per compressione non sia trascurabile.*

Se $\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \equiv \rho^2 \chi_s$, c.f.r. (2.10), non è nullo, ossia se il coefficiente di riscaldamento per compressione adiabatica χ_s è non nullo, allora si deve aggiungere alla (2.10) il termine:

$$2.15 \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \frac{\delta s}{\rho} \equiv \rho \chi_s \delta s \quad (2.15)$$

e δs viene valutato nel caso di Navier Stokes via la terza delle (2.7) come:

$$2.16 \quad T \frac{\delta s}{\tau} \simeq \nu \frac{(\delta v)^2}{l^2} \quad \text{ovvero} \quad T \delta s \frac{\delta v}{l} \simeq \nu \frac{(\delta v)^2}{l^2} \quad (2.16)$$

E così si vede che l' incomprimibilità è giustificata, nel caso delle equazioni NS, dalla validità delle (2.12), (2.13), (2.14) e infine:

$$2.17 \quad \rho \chi_s \nu \frac{\delta v^2}{l^2} \frac{\tau}{T} \ll 1 \quad \text{e} \quad \rho \chi_s \nu \frac{(\delta v)}{l T} \ll 1 \quad (2.17)$$

Nel caso, infine, delle equazioni (2.8) occorre ancora aggiungere all' ultima delle (2.16) le $\rho T \frac{\delta s}{\tau} \cong \kappa \delta T l^{-2}$ e $\rho T \frac{\delta v}{l} \delta s \cong \kappa \frac{\delta T}{l^2}$; e quindi (via la (2.15)) si trovano le ulteriori condizioni:

$$2.18 \quad \kappa \frac{\delta T}{T} \frac{\tau \rho \chi_s}{l^2} \ll 1 \quad \text{e} \quad \kappa \frac{\delta T}{T} \frac{\rho \chi_s}{l \delta v} \ll 1 \quad (2.18)$$

che completano l' elenco delle condizioni di incomprimibilità.

Nota al §2:

Ci si può domandare se la nozione di “argomento dimensionale” possa essere resa più precisa da un punto di vista matematico o rigoroso.

È opportuno ricordare, allo scopo, che le funzioni analitiche verificano una notevole proprietà: precisamente se $x \rightarrow f(x)$ è una funzione della variabile x definita per $x \in D$, si dice che f è analitica se per ogni $x_0 \in D$ la serie di Taylor:

$$2.19 \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (2.19)$$

converge per $|x - x_0|$ abbastanza piccolo. Cioè f è analitica se è somma della propria serie di Taylor attorno ad ogni punto.

Ne segue che se f è analitica su D e si suppone che D sia la chiusura di un insieme aperto limitato, allora è possibile trovare un valore $\rho > 0$ tale che la serie di Taylor di f attorno ad *ogni* $x_0 \in D$ ha raggio di convergenza almeno $\rho > 0$. Pertanto si potrà definire $f(x)$ per valori complessi di x : se $|z - x_0| < \rho$ si pone:

$$2.20 \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0) \frac{(z - x_0)^k}{k!} \quad (2.20)$$

e se uno stesso punto z è più prossimo di ρ a due punti x_0 e x'_0 le due formule per $f(z)$ ottenute scegliendo in (2.20) una volta x_0 e un'altra x'_0 devono coincidere, poiché le due funzioni di z così definite dovrebbero accordarsi per z reale comune ai due intervalli di raggio ρ e centri x_0, x'_0 (e quindi per ∞ punti e, dunque, la coincidenza segue dal principio di identità fra funzioni olomorfe).

Quindi dire che una funzione $x \rightarrow f(x)$ è analitica su un dominio chiuso e limitato D è equivalente a dire che è olomorfa in un dominio complesso $D_\rho \equiv \{z | \exists x \in D, |z - x| \leq \rho\} \equiv \{|z - D| < \rho\}$.

Diremo allora che una funzione f definita su un dominio D chiuso e limitato è “regolare su scala ρ ” se è analitica e il raggio di convergenza della sua serie di Taylor attorno ad un punto qualunque è almeno ρ , ovvero equivalentemente se è olomorfa in D_ρ .

Questa nozione di regolarità è particolarmente rilevante per le *stime dimensionali*: infatti se f è regolare su scala ρ in D diremo che la *grandezza tipica* di f è $|f|_\rho = \max_{z \in D_\rho} |f(z)|$ e potremo stimare le derivate di f come:

$$|\partial_x^n f(x)| \leq n! \frac{|f|_\rho}{\rho^n} \quad \forall x \in D \quad (2.21)$$

ossia la derivata n -ma si stima semplicemente dividendo la *grandezza di f* per la lunghezza tipica ρ elevata alla n -ma potenza, proprio come nelle stime dimensionali che vengono empiricamente introdotte in vari argomenti, nella Fisica teorica.

Dunque la *regolarità* su scala ρ e la *grandezza tipica* di una grandezza fisica che dipende da un parametro x hanno un senso matematico chiaro nel caso che f sia analitica e olomorficamente estendibile per una distanza ρ nei complessi; e nel dominio esteso sia limitata da una costante $|f|$ che viene identificata con una grandezza tipica.

Nella analisi precedente un campo regolare $\underline{u}(\underline{x}, t)$ deve essere interpretato come una funzione analitica in ciascuna delle variabili x_j e t prolungabile nel campo complesso, in ciascuna variabile, di l nella x_j e di τ nelle t mantenendosi ivi limitate da δv e così le $s = s(\underline{x}, t)$, $p = p(\underline{x}, t)$ devono essere ugualmente analitiche e prolungabili di l e τ nelle x_j o t , rispettivamente, mantenendosi limitate da δs e δp .

Si vede dunque che l' accettare “stime dimensionali” corrisponde matematicamente ad ammettere precise proprietà di regolarità sulle funzioni in studio.

Qualora tali proprietà non siano vere occorre riesaminare l' argomento dimensionale: e talvolta può risultare grossolanamente errato. Ciò accade quando nel problema appaiono “più scale” assai diverse fra loro.

Ad esempio a volte la funzione $f(x)$ può essere scritta come somma di ∞ funzioni $f_1(x) + f_2(x) + \dots$ con f_i regolare su scala ρ_i e di ordine di grandezza δ_i e $\rho_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. È chiaro che in questo caso si dovrà essere molto cauti nel formulare argomenti dimensionali. ■ Per un esempio esplicito si consideri una successione $f_i(x) \equiv c_i f(x/\rho_i)$ con $\rho_i = 2^{-i}$, $c_i = 2^{-i^2}$ o $c_i = 2^{-ki}$ con k intero.

Infine la (2.21) è una facile conseguenza del teorema di Cauchy:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2\pi i)} \oint \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} \delta z \quad (2.22)$$

ove il contorno può essere scelto come un largo cerchio di centro x contenuto in D_ρ : scegliendo proprio il cerchio di raggio ρ e maggiorando il termine di destra a mezzo dei valori assoluti si trova subito la (2.21).

Problemi: La formula di Stokes.

[1]: Si consideri un fluido viscoso che occupa tutto lo spazio fuori di una sfera di raggio R e si muove all' ∞ con velocità \underline{v}_0 . Si supponga che il moto del fluido sia statico (ossia con campi indipendenti dal tempo) e che la velocità sia così piccola che si possa trascurare il termine di trasporto $\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}$ nella equazione di Navier Stokes, in modo che l' equazione

dl fluido sia: $\underline{0} = -\rho^{-1} \underline{\partial} p + \eta \rho^{-1} \Delta \underline{u}$ e $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$, ossia:

$$\Delta \text{rot } \underline{u} = \underline{0}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0, \quad \underline{u} = \underline{0} \quad \text{se } |\underline{x}| = R$$

Si mostri che la soluzione deve avere la forma:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + f_1(r)\underline{u}_0 + f_2(r)\underline{n} \cdot \underline{u}_0 \underline{n} + f_3(r)\underline{n} \wedge \underline{u}_0$$

con $r \equiv |\underline{x}|$, $\underline{n} \equiv \underline{x}/r$ e $f_j \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Inoltre f_3 deve essere nullo per ragioni di simmetria. (*Idea*: l'equazione è lineare e i soli vettori, linearmente dipendenti da \underline{u}_0 , che possono essere formati a partire da \underline{u}_0 , \underline{x} sono \underline{u}_0 , \underline{x} , $\underline{x} \wedge \underline{u}_0$. Il termine in f_3 non è invariante per parità mentre l'equazione ha soluzione unica.)

[2]: Si scriva $f_j(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n} r^{-n}$ e si mostri che $a_{1,n}$ e $a_{2,n}$ sono diversi da 0 solo per $n = 1, 3$. E quindi:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 - \frac{a}{r} (\underline{u}_0 + \underline{n} \underline{u}_0 \cdot \underline{n}) + \frac{b}{r^3} (-\underline{u}_0 + 3\underline{n} \underline{u}_0 \cdot \underline{n})$$

e si mostri poi che a e b sono univocamente determinati dalla condizione $\underline{u} = \underline{0}$ per $|\underline{x}| = R$ ed hanno il valore:

$$a_{3,n} = 0, \quad a = \frac{3}{4}R, \quad b = \frac{1}{4}R^3$$

(*Idea*: si usi l'unicità della soluzione ricercata).

[3]: Si calcoli il campo di pressione associato al campo di velocità determinato in [2] facendo vedere che $p(\underline{x}) = -\frac{3}{2}\eta \frac{\underline{u}_0 \cdot \underline{n}}{r^2} R$. (*Idea*: $-\partial p + \eta \Delta \underline{u} = \underline{0}$.)

[4]: La forza che si esercita sulla sfera ha, se si sceglie l'asse z parallelo alla forza, componente:

$$F = R^2 \int (-p \cos \vartheta + (\tau'_{zz} \cos \vartheta + \tau'_{zx} \sin \vartheta \cos \varphi + \tau'_{zy} \sin \vartheta \sin \varphi)) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

ove $\tau'_{zj} = \eta(\partial_j u_x + \partial_z u_j)$, e si faccia vedere che questo implica che $F = \eta R v_0 S$ ove S è una costante. Si calcoli S ($S = 6\pi$, formula di Stokes).

[5]: Si discuta sotto quali condizioni l'approssimazione in [1] è accettabile: si faccia vedere che intorno alla sfera le condizioni sono realizzabili in quanto sono $\frac{v_0^2}{R} \ll \frac{\nu v_0}{R^2}$, ossia $v_0 \nu^{-1} R \ll 1$ che si legge dicendo che il numero di Reynolds è piccolo, *c.f.r.* i paragrafi che seguono). Ma queste condizioni non sono valide lontano dalla sfera, perchè ivi divergono $v_0^2 \frac{R}{r^2} \ll \nu v_0 \frac{R}{r^3}$, ossia $v_0 \nu^{-1} r \ll 1$. Quindi a grandi distanze il campo di velocità determinato con la approssimazione di Stokes, [1] e [2], non è più corretto.

Bibliografia: [LL].

§3 Il metodo dei riscalamenti e la valutazione delle approssimazioni.

Il procedimento illustrato nel §2 per valutare gli ordini di grandezza coinvolti nelle approssimazioni di incomprimibilità è semplice ma in un certo senso poco sistematico.

Infatti dire che si trascurano quantità (adimensionali) $\varepsilon \ll 1$ è un' affermazione soddisfacente solo se si è in grado di valutare l' errore e mostrare, come implicitamente assunto nell' analisi, che le correzioni hanno ordine di grandezza ε rispetto ai termini non trascurati.

Questa può essere solo un' affermazione asintotica e quello che si intende realmente, o si dovrebbe intendere, è che sia possibile scrivere la soluzione delle equazioni che si vogliono approssimare come una serie nel parametro ε . Ma dalla discussione si vede che ε appare in varie forme e non è in realtà affatto chiaro cosa voglia veramente dire che "si trascurano termini di ordine ε " soprattutto se ε appare sia come ordine di grandezza di alcune quantità sia come argomento di funzioni (come quando si dice che una funzione varia su scala l e $l/\tau v_{suono} = \varepsilon$ è piccolo (c.f.r. (2.12))).

Per rendere precisa questa idea intuitiva tradurremo in forma più matematica quanto discusso al §2, cercando di costruire, almeno in linea di principio, un algoritmo che consenta di scrivere le equazioni necessarie alla valutazione dell' errore come serie nel parametro (o nei parametri) $\ll 1$.

(1) l' equazione di Eulero incomprimibile.

Consideriamo, ad esempio, il caso A), §2, dell' equazione di Eulero incomprimibile, con $\underline{g} = \underline{0}$ per semplicità. Facciamo l' ipotesi che il sistema sia un gas perfetto, con equazioni di stato e costitutive:

$$3.1 \quad s = c_V \log T - c \log \rho, \quad \tau'_{ij} = 0, \quad \kappa_{ij} = 0 \quad (3.1)$$

che, poichè vale la relazione termodinamica $p = -T\rho^2 (\frac{\partial s}{\partial \rho})_T$, implica $p = c\rho T$ e, inoltre, che la velocità del suono è $v_{suono}^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_s = cT(1 + \frac{c}{c_V})$.¹

Sia $\underline{u}, \underline{\rho}, \underline{s}$ un dato iniziale che abbia la proprietà di verificare la prima delle (2.12). Un tale stato può essere assegnato in termini di tre funzioni $\underline{\bar{w}}(\underline{\xi}), \underline{\bar{r}}(\underline{\xi}), \underline{\bar{\sigma}}(\underline{\xi})$ molto regolari dei propri argomenti $\underline{\xi} \in R^3$ come:

$$3.2 \quad \underline{\bar{u}}(\underline{x}) = \varepsilon v_{suono} \underline{\bar{w}}(\frac{\underline{x}}{l}), \quad \underline{\bar{\rho}}(\underline{x}) = \underline{\bar{r}}(\frac{\underline{x}}{l}), \quad \underline{\bar{s}}(\underline{x}) = \underline{\bar{\sigma}}(\frac{\underline{x}}{l}) \quad (3.2)$$

ove ε è un parametro molto piccolo, in modo da soddisfare la condizione di velocità iniziale $\underline{\bar{u}}$ piccola rispetto a quella del suono; e l è un parametro con la dimensione di una lunghezza. Poichè v_{suono} dipende da T (che

¹ nel caso di un gas perfetto monoatomico $c_V = \frac{3}{2}RM_0^{-1}$, $c = RM_0^{-1}$ con R costante dei gas, e M_0 massa atomica.

dipende da \underline{x}) la definiamo qui come uguale al valore che corrisponde al valore medio di T (calcolato dall'equazione di stato e nella configurazione iniziale). Immagineremo il sistema nello spazio infinito e che le funzioni in (3.2) siano costanti fuori di un insieme limitato, e che la \underline{w} sia nulla fuori di tale insieme.

Ci domandiamo allora se esista una soluzione di (2.1), (3.1) che verifichi le (2.12) anche a tempi positivi, e se questa soluzione sia bene approssimata dalla soluzione di (2.4) con gli stessi dati iniziali, e tanto più quanto più ε è piccolo.

Ci limiteremo allo studio del caso $\bar{r} = \text{costante}, \bar{\sigma} = \text{costante}$, anche se sarà istruttivo scrivere alcune delle equazioni più in generale.

Per porre bene la domanda chiediamo se la (2.1), (3.1) con il dato iniziale (3.2), abbia una soluzione che dipende da t in modo regolare attraverso l'argomento "riscaldato" $\vartheta = \varepsilon t l^{-1} v_{suono}$: in modo che la seconda delle (2.12) sia automaticamente soddisfatta (perchè la scala di tempo τ sarà appunto tale che $\varepsilon \tau v_{suono} l^{-1} \simeq 1$ e quindi $l/(\tau v_{suono}) \simeq \varepsilon \ll 1$). Più formalmente ci domandiamo se esista una soluzione di (2.1), (3.1) tale che:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, t) &= \varepsilon v_{suono} \underline{w}(\underline{x} l^{-1}, \varepsilon t v_{suono} l^{-1}) \\ \rho(\underline{x}, t) &= r(\underline{x} l^{-1}, \varepsilon t v_{suono} l^{-1}) \\ s(\underline{x}, t) &= \sigma(\underline{x} l^{-1}, \varepsilon t v_{suono} l^{-1}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

con $\underline{w}(\underline{x}, \vartheta), r(\underline{x}, \vartheta), \sigma(\underline{x}, \vartheta)$ regolari nei loro argomenti e dipendenti da ε in modo da essere scrivibili come:

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \underline{w}_0 + \varepsilon \underline{w}_1 + \varepsilon^2 \underline{w}_2 + \dots \\ r &= r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots \\ s &= \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Infatti in questo caso vediamo che le condizioni (2.12) continuano ad essere verificate a tempi > 0 e quindi ci aspettiamo, se la discussione del §2 è corretta, che le (3.3) verifichino le equazioni di Eulero incompressibili, in prima approssimazione.

Questa ultima proprietà ha ora un senso preciso. Infatti inserendo le (3.4), (3.3) nelle (2.1), (3.1) e imponendo che le equazioni (2.1), (3.1) siano verificate a tutti gli ordini in ε , si ottengono equazioni per le $\underline{w}_j, r_j, \sigma_j$ che, risolte con i dati iniziali naturali:

$$\begin{aligned} \underline{w}_0|_{\vartheta=0} &= \underline{\bar{w}}, \quad r_0|_{\vartheta=0} = \bar{r} = \text{costante}, \quad \sigma_0|_{\vartheta=0} = \bar{\sigma} \\ \underline{w}_j, r_j, \sigma_j|_{\vartheta=0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

forniscono la "soluzione all'ordine più basso in ε ", data da (3.3) con \underline{w}, r, σ sostituiti da $\underline{w}_0, r_0, \sigma_0$ e le correzioni di ordine superiore. E allora la proprietà che cerchiamo è che le funzioni:

$$\varepsilon v_{suono} \underline{w}_0(\underline{x} l^{-1}, \varepsilon t v_{suono} l^{-1}), \quad r_0 = \text{cost.}, \quad \sigma_0(\underline{x} l^{-1}, \varepsilon t v_{suono} l^{-1}) \quad (3.6)$$

verifichino le equazioni di Eulero incompressibili (2.4). Ossia:

$$\begin{aligned} r_0 &= \text{costante}, & \underline{\partial}_{\underline{\xi}} \cdot \underline{w}_0 &= 0 \\ \partial_{\vartheta} \underline{w}_0 + \underline{w}_0 \cdot \underline{\partial}_{\underline{\xi}} \underline{w}_0 &= -\underline{\partial}_{\underline{\xi}} p', & \partial_{\vartheta} \sigma_0 + \underline{w}_0 \cdot \underline{\partial}_{\underline{\xi}} \sigma_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

se $p'(\underline{\xi}, \vartheta)$ è una opportuna funzione.

E poi le equazioni per gli ordini successivi dovrebbero determinare ricorsivamente $\underline{w}_j, r_j, \sigma_j$ e quindi le correzioni, *in modo sistematico*.

Si verificherebbe così, in un senso preciso, che il moto a bassa velocità del gas perfetto in questione è ben approssimato dalle equazioni di Eulero incompressibili. E, se si trovasse un algoritmo per calcolare le correzioni w_j, r_j, σ_j , avrebbe senso anche valutare gli errori della approssimazione:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, t) &= \varepsilon v_{suono} \underline{w}_0\left(\frac{\underline{x}}{l}, \varepsilon \frac{v_{suono} t}{l}\right), & \rho(\underline{x}, t) &= r_0\left(\frac{\underline{x}}{l}, \varepsilon \frac{v_{suono} t}{l}\right), \\ s(\underline{x}, t) &= \sigma_0\left(\frac{\underline{x}}{l}, \varepsilon \frac{v_{suono} t}{l}\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

delle soluzioni di (2.1), (3.1) a mezzo delle soluzioni della equazione di Eulero incompressibile (2.4), (ossia (3.6) e (3.7)).

Giova sottolineare, ancora, che nella situazione in cui ci troviamo la seconda delle (2.12) è conseguenza della prima perchè dalla (3.8) si vede che la scala di evoluzione temporale è $lv_{suono}^{-1}\varepsilon^{-1}$ (e quindi la seconda delle (2.12) diventa $\varepsilon^2 \ll 1$ che coincide con la prima); e se la proprietà di approssimazione della (3.3) via le (3.4), (3.5) è vera allora la validità della (2.12) all'istante iniziale (garantita, per $\varepsilon \ll 1$ dalla (3.2)) implica la sua validità agli istanti successivi, almeno fino al tempo $t = \tau_0 l \varepsilon^{-1} v_{suono}^{-1}$ se τ_0 è l'istante fino al quale la soluzione della equazione di Eulero (3.6), nelle variabili adimensionali $\underline{\xi}, \vartheta$, con dati iniziali (3.5) ammette una soluzione che si mantiene regolare in $\underline{\xi}, \vartheta$.

Procediamo dunque alla verifica che l'ipotesi che le (2.1) ammettano una soluzione sviluppabile in serie di ε come in (3.4) è *consistente* e conduce effettivamente alle (3.7) all'ordine più basso in ε . Se si riuscirà, almeno formalmente, si sarà ottenuta una verifica qualitativa precisa delle ipotesi di incompressibilità. Una verifica quantitativa passerà, poi, in linea di principio per una analisi della serie (3.4) o per lo studio dei termini trascurati e la eventuale dimostrazione che tendono 0 in modo stimabile esplicitamente, se $\varepsilon \rightarrow 0$.

Notiamo che l'ipotesi \bar{r} costante e $\bar{\sigma} = \text{costante}$ per $\vartheta = 0$, caso cui ci limitiamo, implica che s è costante per tutti i tempi perchè il secondo membro della terza delle (2.1) è nullo. E ne segue quindi che la pressione è una funzione $p = p(\rho)$ della densità (e $p(\rho)$ è l'equazione delle adiabatiche: $p(\rho) = C\rho^{1+c/c_v}$, con C opportuno e indipendente da \underline{x}, t , determinato dalle condizioni iniziali).

Le (3.3), (3.4), (3.5), inserite nelle (2.1) con le ipotesi fatte in connessione con la (3.1) sulle equazioni costitutive e se $\underline{g} = \underline{0}$, (scrivendo solo gli ordini

più bassi in ε), danno:

$$\begin{aligned}
 3.9 \quad & \frac{\varepsilon v_{suono}}{l} (\partial_{\vartheta} r_0 + \underline{\partial}_{\underline{\xi}} \cdot (r_0 \underline{w}_0)) = 0 \\
 & r_0 \frac{\varepsilon^2 v_{suono}^2}{l} (\partial_{\vartheta} \underline{w}_0 + \underline{w}_0 \cdot \underline{\partial}_{\underline{\xi}} \underline{w}_0) + \dots = -\frac{v^2(r)}{l} (\underline{\partial} r_0 + \varepsilon \underline{\partial} r_1 + \varepsilon^2 \underline{\partial} r_2 \dots) \\
 & \frac{\varepsilon v_{suono}}{l} (\partial_{\vartheta} \sigma_0 + \underline{w}_0 \cdot \underline{\partial}_{\underline{\xi}} \sigma_0) = 0
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

ove $v^2(r) = \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r}$ è essenzialmente ancora il quadrato della velocità del suono (ma a densità r e quindi la denotiamo diversamente dalla quantità media v_{suono}^2).

Allora si vede che, perchè la seconda equazione sia possibile, deve essere $\underline{\partial} r_0 = \underline{0}$, ossia le ipotesi sono consistenti solo se r_0 è *costante* in funzione di $\underline{\xi}$. E la prima delle (3.9) dirà che $\underline{\partial} \cdot \underline{w}_0$ è costante in $\underline{\xi}$ e quindi nulla se si suppone che \underline{w}_0 tenda a zero all' infinito per tutti i tempi ϑ ; così pure r_1 deve essere costante in $\underline{\xi}$. Dunque anche $\partial_{\vartheta} r_0 = 0$ e $r_0 = \bar{r}$ resta costante. In tal caso le (3.9) diventano:

$$3.10 \quad r_0 = \bar{r}, \quad \sigma_0 = \bar{\sigma}, \quad \partial_{\vartheta} \underline{w}_0 + \underline{w}_0 \cdot \underline{\partial}_{\underline{\xi}} \underline{w}_0 = -\frac{1}{r_0} \underline{\partial} r_2 \tag{3.10}$$

e, per l' equazione di stato, $T = \text{costante}$ che sono appunto le equazioni di Eulero incompressibili, nelle variabili riscalate, (3.7) nel caso adiabatico.

Si vede anche un' altra interessante proprietà: quella che viene chiamata "pressione" nella equazione di Eulero è in realtà, a meno di una costante, la deviazione dalla densità media al secondo ordine in ε .

In linea di principio potremmo dedurre altre (infinite) equazioni differenziali che dovrebbero permettere di calcolare le correzioni ai vari ordini in ε . Ma tali equazioni sono piuttosto complesse e di scarso interesse dal momento che non se ne conosce una teoria. Dunque quanto detto rischia, pur sempre, di restare ad un livello formale.

Quindi si comprende l' importanza del seguente teorema che considera le (2.1), (3.1) con dati iniziali aventi la forma (3.4) con $\underline{w}_0 \in C^\infty$ e $r_0 = \text{cost}$, $\sigma_0 = \text{cost}$, e con \underline{w}_0 nulla fuori di un insieme limitato. E permette di dire che la soluzione delle (2.1) tende, al tendere di $\varepsilon \rightarrow 0$ alla soluzione della equazione di Eulero incompressibile nel senso seguente. Si consideri la soluzione delle equazioni (3.10), $w_0(\vartheta, \underline{x})$, $\sigma_0(\vartheta, \underline{x})$, r_0 , allora vale il seguente teorema, [Eb]:

Teorema: *La equazione di Eulero (3.10) con i dati iniziali ($a \vartheta = 0$) $\underline{w}_0, r_0, \sigma_0$ sopra menzionati ammette una soluzione di classe C^∞ , che si annulla rapidamente all' infinito con le sue derivate, per tempi $\vartheta \leq \tau_0$, se τ_0 è abbastanza piccolo (ma dipendente dai dati iniziali). E τ_0 può essere scelto in modo che, per i tempi $t < \tau_0 \frac{l}{\varepsilon v_{suono}}$ anche la (2.1), (3.1) con dati iniziali aventi la forma (3.2), ammette una soluzione, di classe C^∞ , $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, t)$, $\rho_\varepsilon(\underline{x}, t)$, $s_\varepsilon(\underline{x}, t) \equiv \bar{\sigma}$. E si ha:*

$$\begin{aligned}
 3.11 \quad & \varepsilon^{-1} |\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, t) - \varepsilon v_{suono} \underline{w}_0(\underline{x} l^{-1}, \varepsilon v_{suono} t l^{-1})| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\
 & |\rho_\varepsilon(\underline{x}, t) - \bar{r}| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

uniformemente per $t < \tau_0 \frac{l}{\varepsilon v_{suono}}$.

Osservazioni:

(1) Si noti che il teorema è formulato senza che si facciano intervenire i termini di ordine superiore della serie (3.9). Pertanto, indipendentemente dalla loro esistenza, è pur sempre rigorosamente vero che, almeno per un tempo t piccolo $t < \frac{1}{\varepsilon} \frac{\tau_0 l}{v_{suono}}$ (ma dell'ordine di ε^{-1} , ossia tanto più lungo quanto "meglio l'ipotesi di incomprimibilità è verificata"), l'equazione di Eulero incomprimibile fornisce una approssimazione effettiva alla soluzione della (2.1), (3.1).

(2) perchè l'affermazione sia non vuota è ovviamente necessario dimostrare che l'equazione di Eulero incomprimibile, con i dati iniziali che si considerano nel teorema, ammette una soluzione, fino ad un tempo $\tau_0 > 0$, che mantiene le caratteristiche di regolarità. Un tale teorema è effettivamente possibile e sarà discusso al §12.

(3) sarebbe interessante far vedere che il tempo τ_0 del teorema è il massimo tempo per cui l'equazione di Eulero incomprimibile ammette soluzioni regolari (con i dati iniziali considerati). Questo sarebbe di particolare interesse nel caso in cui si considerasse un fluido in uno spazio a dimensione d con $d = 2$: caso in cui, come vedremo, l'equazione di Eulero incomprimibile ammette soluzione globale, per tutti i tempi, senza perdere in regolarità (ossia dati iniziali C^∞ restano tali). Purtroppo la dimostrazione del teorema non consente di concludere questo e il tempo τ_0 è di solito più corto del massimo tempo per cui si può dimostrare l'esistenza di soluzioni regolari alla equazione di Eulero.

(2) *L'equazione di Navier Stokes incomprimibile.*

Abbiamo visto al §2 che nel caso dell'equazione di Navier Stokes, per ottenere le condizioni di validità della approssimazione incomprimibile si devono aggiungere alle (2.12) le (2.13), supponendo sempre, per semplicità, anche $\underline{g} = \underline{0}$.

In questo caso si deve aggiungere a secondo membro della seconda delle (3.9) il termine:

$$3.12 \quad \varepsilon \frac{\rho \nu v_{suono}}{l^2} \Delta_{\underline{x}} \underline{w}_0 \quad (3.12)$$

e si vede, procedendo in modo esattamente parallelo al caso precedente dell'equazione di Eulero, che lo schema di incomprimibilità con dati iniziali \bar{r} e \bar{s} costanti (si veda (3.2)) è consistente se:

$$3.13 \quad \frac{\nu}{\varepsilon l v_{suono}} \equiv \nu_0, \quad \text{è indipendente da } \varepsilon \quad (3.13)$$

Ossia la (2.13) richiede ora che la scala di lunghezza su cui variano i campi sia dell'ordine di grandezza di $l = \nu \varepsilon^{-1} v_{suono}^{-1} \nu_0^{-1}$. Come nel caso della equazione di Eulero si può dimostrare il seguente teorema. Si considerino

le equazioni di Navier Stokes adiabatiche:

$$3.14 \quad \begin{aligned} r_0 &= \text{costante}, & s_0 &= \text{costante} \\ \partial_{\vartheta} \underline{w}_0 + \underline{w}_0 \cdot \underline{\partial}_{\underline{\xi}} \underline{w}_0 &= -\frac{1}{r_0} \underline{\partial} p_0 + \nu_0 \Delta \underline{w}_0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

con dati iniziali $\underline{w}_0 \in C^\infty$ e nulla fuori di una regione limitata, $r_0 = \bar{r} = \text{costante}$, $\sigma_0 = \bar{\sigma} = \text{costante}$; e sia $\underline{w}_0(\vartheta, \underline{\xi})$ una soluzione di classe C^∞ (in $\vartheta, \underline{\xi}$). Allora, [KM]:

Teorema: *L'equazione di Navier Stokes (3.14) ammette una soluzione di classe C^∞ per tempi $\vartheta < \tau_0$. Dato $l_0 > 0$ il tempo $\tau_0 > 0$ può essere scelto in modo che la (2.1), con le equazioni costitutive $\kappa_{ij} = 0$ e τ'_{ij} dato dal tensore di Navier Stokes (2.6) ed equazione di stato dei gas perfetti (si veda (3.1)), e con dati iniziali:*

$$3.15 \quad \underline{u}(\underline{x}) = \varepsilon v_{suono} \underline{w}_0\left(\frac{\underline{x}}{l}\right), \quad \rho(\underline{x}) = \bar{r}, \quad s(\underline{x}) = \bar{\sigma}, \quad \text{con } l = \frac{l_0}{\varepsilon} \quad (3.15)$$

ammetta una soluzione di classe C^∞ , che denoteremo $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, t), \rho_\varepsilon(\underline{x}, t)$, e $s_\varepsilon(\underline{x}, t)$, definita per tempi $t < \tau_0 \frac{l_0}{\varepsilon^2 v_{suono}}$. E si ha:

$$3.16 \quad \begin{aligned} \varepsilon^{-1} |\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, t) - \varepsilon v_{suono} \underline{w}_0(\varepsilon \underline{x} l_0^{-1}, \varepsilon^2 v_{suono} t l_0^{-1})| &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\ |\rho_\varepsilon(\underline{x}, t) - \bar{r}| &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad |s_\varepsilon(\underline{x}, t) - \bar{\sigma}| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Osservazioni:

- (1) Si possono proporre, a proposito di questo secondo teorema, osservazioni identiche a quelle che seguono il teorema 1. Si vede anche che nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ l'entropia si conserva: cosa non più ovvia dal momento che il secondo membro della terza delle (2.1) non è più nullo. Ciononostante l'attrito ha effetto sulla equazione per la velocità. Questo è a prima vista sconvolgente, ma si spiega se si tiene conto che \underline{w}_0 è una velocità scalata e una variazione di ordine $O(1)$ dovuta all'attrito (ossia al termine $\nu_0 \Delta \underline{w}_0$) genera una variazione di energia di ordine $O(\varepsilon^2)$ e quindi una quantità di calore e un aumento di entropia (e temperatura) di ordine $O(\varepsilon^2)$ il che non contraddice la terza delle (3.16).
- (2) Si vuol dire che: *su scale di tempo $O(\varepsilon^{-1})$ il sistema segue l'equazione di Eulero incompressibile*; mentre *su scale di tempo $O(\varepsilon^{-2})$ e di spazio $O(\varepsilon^{-1})$ il sistema segue le equazioni di Navier Stokes*.
- (3) Cosa si può dire, allora, se è assegnato un dato iniziale senza alcun parametro libero ε ? ossia quale applicazione concreta possono avere i teoremi appena enunciati, in quanto teoremi di approssimazione con ε fisso e non come teoremi concettuali per illustrare il carattere asintotico della approssimazione di incompressibilità?
- (4) Una proposta è la seguente. Si vedrà, volendo cercare di applicare tali teoremi in un dato caso particolare, se il dato iniziale può essere scritto nella forma (3.4). E poi se ε è piccolo si potrà dire che vale l'equazione di

Eulero incompressibile, (per tempi fino a $O(\varepsilon^{-1})$), e si potrà dare l'errore di approssimazione usando le stime (costruttive nella dimostrazione, non riportata, del teorema) delle differenze in (3.11),(3.16). Al crescere del tempo, oltre $O(\varepsilon^{-1})$, ci aspettiamo che il campo di velocità si "uniformizzi" spazialmente e sia, dopo un tempo molto lungo rispetto a $O(\varepsilon^{-1})$, descritto da una funzione regolare di $\varepsilon^{-1} \underline{x} l_0^{-1}$ per un qualche l_0 che dovrebbe dipendere dai dati iniziali.

- (5) In questa situazione ci si troverà nelle ipotesi del teorema 2 e il sistema evolverà ora secondo l'equazione di Navier Stokes incompressibile, con approssimazione controllata fino a tempi dell'ordine di $O(\varepsilon^{-2})$, e si avvierà all'equilibrio (che è lo stato di quiete perchè non ci sono forze esterne) mantenendo una variabilità su scale di lunghezza dell'ordine $\varepsilon^{-1} l_0$ e di tempo dell'ordine di $\varepsilon^{-2} \nu v_{suono} l_0^{-1}$.
- (6) Questo è uno schema di interpretazione della evoluzione incompressibile (ma è solo una "proposta" perchè non esistono altri teoremi noti che corroborino quanto appena detto) e quello che è poco chiaro in questa proposta è come si raccordino i due regimi e come, dunque, si possa calcolare l_0 che invece, da quanto detto, non solo non è calcolato, ma non si vede neppure come calcolarlo, sia pure approssimativamente, né su quali proprietà fisiche si possa basare una sua stima.

Bibliografia: Questo paragrafo è basato sulle idee del lavoro [EM]; i risultati originali si trovano in [Eb], [KM].

§4 Alcuni problemi di idrostatica.

L' idrostatica studia le soluzioni delle equazioni di Eulero, di Navier-Stokes o di continui più generali, con campi di velocità nulli e con funzioni termodinamiche indipendenti dal tempo.

Tali soluzioni sono molto rare, come illustreremo considerando alcuni modelli.

(1) *Idrostatica in assenza di termoconduzione.*

(A) *Caso isoentropico*

Le equazioni (2.1) sono allora semplicemente:

$$4.1 \quad -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} = \underline{0}, \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, s) \quad (4.1)$$

Ad esempio nel caso di un gas perfetto monoatomico:

$$4.2 \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} e^{(s-s_0)/c_v} \Rightarrow \varepsilon = c_v T, \quad p = \frac{2}{3} \rho c_v T = \rho \frac{RT}{M_A} = \frac{nRT}{v} \quad (4.2)$$

ove ε_0 , ρ_0 , s_0 sono i valori di ε , ρ , s in uno stato termodinamico di riferimento e c_v è il calore specifico a volume costante per unità di massa, cioè $c_v = \frac{3}{2} R/M_A$ se M_A è la massa atomica in unità assoluta (grammi) e R la costante dei gas $R = 8.31 \cdot 10^7 \text{ erg } ^\circ\text{K}^{-1}$. Se il gas fosse biatomico $3/2$ diverrebbe $5/2$ dappertutto. Infine $n = M/M_A$ ove M è la massa del fluido (n = numero di moli) e $v = M/\rho$ = volume specifico del fluido.

Supponiamo \underline{g} conservativa, $\underline{g} = -\underline{\partial} G$. Il caso più semplice è quello isoentropico. In tal caso la relazione che lega ρ a p è semplicemente l'equazione $\rho = R(p)$ delle adiabatiche: $\rho = p^{1/\gamma} \text{ cost}$ con $\gamma = 5/3$ nel caso del gas perfetto monoatomico. Pertanto conviene definire il "potenziale di pressione":

$$4.3 \quad \Phi(p) = \int^p \frac{dp'}{R(p')} \quad (4.3)$$

e quindi la (4.1) viene risolta da:

$$4.4 \quad \Phi(p(\underline{x})) + G(\underline{x}) = \text{costante}, \quad \rho = R(p(\underline{x})) \quad (4.4)$$

che consente di determinare $p(\underline{x})$ in funzione di G quindi $\rho(\underline{x}), \varepsilon(\underline{x})$ etc. (si noti che $\Phi(p)$ è monotona strettamente crescente in p e quindi invertibile localmente). Questo è vero almeno se $G(\underline{x})$ prende valori nell'immagine di Φ ; ossia in $\Phi([0, +\infty))$, a meno di una costante (se no l'equazione non ammette soluzioni idrostatiche).

Si noti che, nel caso isoentropico, se \underline{g} non fosse conservativa non si potrebbe avere una soluzione idrostatica: una forza non conservativa metterebbe necessariamente in moto un fluido. Questo è fisicamente ovvio e anzi resta sostanzialmente vero anche in fluidi non isoentropici (si veda più avanti).

(B) *Caso non isoentropico*

Il caso idrostatico non isoentropico si studia in modo analogo. Stavolta $s = s_0(\underline{x})$ e dunque $\rho = r(p, s_0)$ per cui l'equazione (se \underline{g} è conservativa):

$$-\underline{\partial}p = r(p, s_0(\underline{x}))\underline{\partial}G \quad (4.5)$$

implica che $r(p, s_0(\underline{x}))$ deve essere una funzione $R(G(\underline{x}))$ e quindi $p(\underline{x})$ deve pure essere funzione $\pi(G(\underline{x}))$: allora $s_0(\underline{x})$ deve essere una funzione $\Sigma(G(\underline{x}))$. La conseguenza interessante è dunque che *non sono possibili soluzioni idrostatiche in cui la entropia non sia esprimibile in funzione del potenziale delle forze di volume, se tali forze sono conservative.*

Se \underline{g} non è conservativa si trova che *le soluzioni idrostatiche sono presenti solo se la forza di volume è proporzionale a una forza conservativa.* Si vedano i problemi.

È bene discutere la questione in un caso specifico in cui non ci siano problemi sulla eventuale esistenza delle soluzioni. Poiché la (4.1) è molto restrittiva non ci sono molti casi. E solo i casi particolarmente simmetrici sono facili da trattare.

Consideriamo ad esempio il caso di un fluido che occupa il semispazio $z > 0$ soggetto alla forza di gravità di energia potenziale $G = gz$, e ricerchiamo *soluzioni idrostatiche stratificate*, cioè soluzioni in cui le funzioni termodinamiche dipendono dalla sola z . Denoteremo $s = s_0(z)$, $T = T(z)$, $p = p(z)$, $\varepsilon = \varepsilon(z)$ e $\rho = \rho(z)$, ($\rho = r(p, s)$), tali funzioni. Allora la (4.5) si semplifica e si trova:

$$-\frac{1}{\rho(z)} \frac{dp}{dz} = \frac{dG}{dz}, \quad \rho(z) = r(p(z), s_0(z)) \quad (4.6)$$

che è un'equazione differenziale per $p(z)$, ordinaria, che determina $p(z)$ una volta dati $p(0) = p_0$ e la funzione $s = s_0(z)$.

Più in particolare si consideri il caso di un gas perfetto nel campo di gravità; le (4.6) divengono, se si immagina che sia a priori assegnata la $T = T_0(z)$ invece che l'entropia:

$$-\frac{1}{\rho(z)} \frac{dp}{dz} = g, \quad T = T(z), \quad p = \frac{2}{3} \rho c_v T \quad (4.7)$$

per cui se infine si suppone $T = T_0(1 + \gamma z)$ si trova:

$$\frac{2c_v T}{3p} \frac{dp}{dz} = -g \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{3}{2} \frac{1}{c_v T_0} \frac{g dz}{1 + \gamma z} \quad (4.8)$$

che ha per soluzione:

$$p = (1 + \gamma z)^{-3g/(2c_v T_0 \gamma)} p_0 \quad (4.9)$$

che nel caso isoterma, $\gamma = 0$, diviene la ben nota:

$$4.10 \quad p = p_0 e^{-3gz/(2c_v T_0)} \quad (4.10)$$

mentre nel caso incompressibile la (4.7) ha la altrettanto nota soluzione:

$$4.11 \quad p = p_0 - \rho g z \quad (4.11)$$

Dunque è possibile che un gas, in cui la temperatura non è costante, si trovi in uno stato di “equilibrio idrostatico stratificato”.

(C) *Stabilità degli equilibri*

I gradienti di temperatura e di densità possono generare instabilità nel fluido, per cui potrebbe essere energeticamente conveniente spostare un volumetto di fluido scambiandolo con un altro e traendo vantaggio energetico dal campo esterno o dalle differenze di densità dovute alle differenze di temperatura.

Discutiamo ora le due seguenti questioni sugli equilibri idrostatici stratificati discussi in (B): (1) sotto quali condizioni sono stabili, (2) sotto quali condizioni si può supporre $\rho = \text{costante}$ e quindi usare la (4.11).

Il risultato sarà un notevole criterio di stabilità riguardo allo sviluppo di moti convettivi; *nel caso di un gas perfetto adiabatico*, ossia in cui la conduzione di calore sia trascurabile, si ha stabilità se:

$$4.12 \quad \frac{\partial T}{\partial z} \geq -\frac{g}{c_p} \quad (4.12)$$

La temperatura può diminuire con l'altezza ma non troppo. Se la variazione ΔT fra due piani orizzontali a distanza h è tale che $\Delta T > gh/c_p$ e se il piano superiore è più freddo allora si innescano fenomeni di convezione “spontanei” ossia generati da perturbazioni anche piccolissime.

Per ottenere questo criterio siano $z \rightarrow T(z), s(z), p(z), \rho(z)$ le funzioni termodinamiche in funzione della quota z .

Sia Δ un cubetto ad altezza z contenente gas con volume specifico $v = v(p, z)$. Possiamo immaginare di spostare la massa di gas in Δ trasferendola in un volume Δ' ad altezza $z' = z + \delta z > z$ in modo adiabatico (perché $\kappa = 0$ e quindi non sono possibili scambi di calore per conduzione).

Il nuovo volume occupato dalla massa di gas $M = \Delta v(p, s)^{-1}$ sarà la quantità $\Delta' = \Delta v(p', s)/v(p, s)$ perché il gas dovrà acquisire pressione p' mantenendo entropia s , (perché in assenza di conduzione di calore le trasformazioni subite dagli elementi di fluido sono adiabatiche).

Al tempo stesso la massa di gas originariamente in Δ' dovrà essere spostata in Δ . Poiché tale massa è $M' = \Delta'/v(p', s')$ essa occuperà, alla nuova pressione p , un volume:

$$4.13 \quad \begin{cases} \Delta'' = M' v(p, s') = \Delta' v(p, s')/v(p', s') = \\ = \Delta v(p', s)v(p, s')/v(p, s)v(p', s') = \Delta(1 + O(\delta z^2)) \end{cases} \quad (4.13)$$

perché $s - s'$ e $p - p'$ hanno ordine di grandezza δz : questa relazione è da interpretare dicendo che la massa da spostare da Δ' per far posto a quella proveniente da Δ effettivamente “entra” nel volume Δ lasciato libero (a meno di $O(\delta z^2)$, ovviamente trascurabile). Pertanto la trasformazione in questione sarà favorita energeticamente (nel campo di gravità) se $M = \Delta/v(p, s) < M' = \Delta'/v(p', s') = \Delta v(p', s)/v(p, s)v(p', s')$ ossia se:

$$4.14 \quad \frac{v(p', s)}{v(p', s')} > 1 \quad (4.14)$$

È chiaro che se (4.14) è verificata l'equilibrio è instabile e perturbazioni anche piccole indurranno la permutazione dei due volumetti di gas in questione, generando un campo di velocità $\underline{u} \neq 0$ e instaurando “correnti convettive”.

Per vedere il significato di (4.14), ossia di:

$$4.15 \quad - \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \quad (4.15)$$

si potrà utilizzare la $(\partial v/\partial s)_p \equiv T/c_p (\partial v/\partial T)_p$. In tal modo se, come nella maggior parte delle sostanze, è $(\partial v/\partial T)_p > 0$ la (4.15) diviene $-ds/dz > 0$, per cui (da $G = U + PV - TS \Rightarrow dG = -SdT + VdP$):

$$4.16 \quad \begin{aligned} \frac{\delta s}{\delta z} &= \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{\delta T}{\delta z} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{\delta p}{\delta z} = \frac{c_p}{T} \frac{\delta T}{\delta z} - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{\delta p}{\delta z} = \\ &= \frac{c_p}{T} \frac{\delta T}{\delta z} + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{g}{v} < 0 \Leftrightarrow \frac{\delta T}{\delta z} < -\frac{T}{c_p} \frac{g}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \end{aligned} \quad (4.16)$$

è la condizione di instabilità. Nel caso di un gas perfetto si ha stabilità se vale la (4.12).

Infine in base alla discussione del §2 vediamo che la $\rho = \text{costante}$ è lecita se ci si limita alla considerazione di una porzione di fluido che copre un' altezza H tale che $gH \ll v_{suono}^2$, e una variazione di temperatura δT tale che $(\frac{\partial \rho}{\partial s})_p \frac{\delta s}{\rho} \cong \rho \chi_s \frac{c_p \delta T}{T} \cong \frac{\rho \chi_s v_{suono}^2}{T} \frac{\delta T}{T} \ll 1$.

(2) *Idrostatica in presenza di termoconduzione.*

Anche in questo caso si trova che le soluzioni idrostatiche sono assai speciali e rare. Per non ripetere argomenti e tecniche già visti poniamo un problema leggermente diverso da quelli posti nel §3, trattando un solo semplice esempio.

Chiediamo se un fluido posto in un contenitore Ω e in un campo di forze \underline{g} conservativo, $\underline{g} = -\underline{\partial}G$ possa, almeno in particolari circostanze, fungere da termoconduttore senza necessariamente mettersi in moto. Supporremo perciò che la temperatura sulle pareti sia una funzione assegnata $\xi \rightarrow \vartheta(\underline{\xi})$.

Per un fluido (2.8) si ha:

$$4.17 \quad \begin{aligned} \partial_t \rho &= 0 \\ \underline{\partial} p &= -\rho \underline{\partial} G, \quad T = \tau(v, p) \\ T \rho \partial_t s &= \kappa \Delta T \\ T(\xi) &= \vartheta(\xi), \quad \xi \in \partial \Omega. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La prima equazione dice che $\rho = \rho(\xi)$ e la seconda che ρ deve essere funzione di ξ attraverso G e che p si esprime facilmente in termini di ρ :

$$4.18 \quad \text{se} \quad \rho(\xi) = V(G(\xi))^{-1}, \quad \text{allora} \quad p(\xi) = \pi(t) + W(G(\xi)) \quad (4.18)$$

ove $V(G)$ è un' opportuna funzione e $W(G) = - \int_{G_0}^G V(G')^{-1} dG'$. È chiaro allora che, dovendosi avere $T = \tau(v, p)$ si ha:

$$4.19 \quad T(\xi) = \tau(V(G(\xi)), \pi(t) + W(G(\xi))) \quad (4.19)$$

per ogni $\xi \in \Omega$, e quindi anche per $\xi \in \partial\Omega$. Allora si dovrà avere $\pi(t) = \pi_0 = \text{costante}$. Dunque si possono avere soluzioni idrostatiche solo se la temperatura assegnata sul bordo dipende da ξ via $G(\xi)$. In tal caso anche $T(\xi)$ è funzione di $G(\xi)$ e quindi $s(\xi)$ ha la stessa proprietà.

Inoltre supponendo che $\vartheta(\xi)$ dipenda da ξ via $G(\xi)$ non è detto che esista una soluzione delle:

$$4.20 \quad \partial_t \rho = 0, \quad p = \pi_0 + W(G), \quad \Delta T = 0, \quad T(\xi) = \vartheta(\xi) \text{ su } \partial\Omega \quad (4.20)$$

Invero le due ultime condizioni su T determinano T univocamente (in quanto soluzione di un “problema di Dirichlet”, ovvero $\Delta T = 0$ in Ω , $T = \vartheta$ su $\partial\Omega$); e non è detto che tale T sia una funzione della ξ via $G(\xi)$: e quest'ultima è una condizione molto restrittiva.

Per renderci conto della forza di questa restrizione consideriamo il caso della forza di gravità:

$$4.21 \quad G(\underline{\xi}) = gz, \quad \vartheta(\underline{\xi}) = T_0(z), \quad \underline{\xi} \in \partial\Omega \quad (4.21)$$

In questo caso vediamo che T , ρ , s devono essere funzioni della sola z e quindi la equazione $\Delta T = 0$ diviene $d^2 T/dz^2 = 0$ e cioè per un γ opportuno:

$$4.22 \quad T(z) \equiv \vartheta(z) \equiv T_0(1 + \gamma gz) . \quad (4.22)$$

Vediamo dunque che per avere soluzioni idrostatiche non solo $\vartheta(\xi)$ deve essere funzione della sola z ma anche deve essere una funzione lineare.

Infine, se $G = gz$ e $T = (1 + \gamma gz) T_0$ vediamo che le (4.20) possono essere soddisfatte se $W(G)$ viene scelta come soluzione dell'equazione ottenuta imponendo l'equazione di stato e cioè $T = \tau(v, p)$:

$$4.23 \quad (1 + \gamma G) T_0 = \tau \left(\frac{1}{W'(G)}, p_0 + W(G) \right) \quad (4.23)$$

che è un' equazione differenziale per W che, risolta, fornisce W, V e quindi, ρ e p in funzione di $G = gz$.

Ovviamente resta la conclusione che moti convettivi sono necessariamente generati all' interno di un fluido in un campo conservativo ma non in equilibrio termico, salvo casi specialissimi.

Il solo caso in cui, sotto ipotesi abbastanza generali, si può ottenere termoconduzione statica è in un fluido (2.8) incomprimibile; in questo caso le equazioni sono:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0, & \underline{\partial} p &= -\rho_0 \underline{\partial} G, & \rho_0 c_p \partial_t T &= \kappa \Delta T \\ s &= \sigma(T) \equiv \int^T c_p(T') \frac{dT'}{T'} \end{aligned} \quad (4.24)$$

ove ora s è funzione della sola T e $dS/dT = c_p$ perché:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = 0 \quad (4.25)$$

mentre p va pensata come non più legata a s o T perché:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = - \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = 0 \quad (4.26)$$

Ci si può domandare come si possa conciliare la possibilità di una soluzione di (4.24), in cui T dipende dal tempo, con la impossibilità di una tale soluzione vista nel caso comprimibile. Invero il caso incomprimibile è in un senso opportuno un caso limite del caso comprimibile. In realtà un fluido comprimibile, ma molto vicino ad uno incomprimibile, non può fungere da termoconduttore statico, per quanto visto, e si metterà in moto. Tuttavia il moto sarà tanto più lento quanto più ci si troverà vicini alla incomprimibilità. Dunque la questione della relazione fra (4.24) e (4.20) implica lo studio di un problema non statico e verrà discussa in seguito, (cfr. §5).

(3) *Linee di corrente e teorema di Bernoulli.*

Un moto di un fluido si dice *statico* se i campi di velocità e termodinamici che lo descrivono sono indipendenti dal tempo.

In questi moti ha senso definire le “linee di corrente” come curve geometriche indipendenti dal tempo; sono appunto le soluzioni delle equazioni differenziali:

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{u}(\underline{\xi}) . \quad (4.27)$$

Le linee di corrente giocano un ruolo importante soprattutto nel caso di flussi di Eulero isoentropici. Una semplice ma importante proprietà ad esse associate è il “teorema di Bernoulli”.

Se $\rho = \rho(p)$ è l’equazione delle adiabatichie per il fluido considerato, si definisce come già visto il potenziale di pressione $\Phi(p) = \int^p dp'/\rho(p')$ e quindi, moltiplicando la seconda delle due equazioni di Eulero:

$$\underline{\partial} \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p - \underline{\partial} G \quad (4.28)$$

scalarmente per \underline{u} si riconosce che diviene:

$$4.29 \quad \underline{u} \cdot \underline{\partial} \left[\frac{\underline{u}^2}{2} + \Phi(p) + G \right] = 0 \quad (4.29)$$

Se $X(\xi, t)$ è una funzione allora $\partial_t X + \underline{u} \cdot \underline{\partial} X$ è la derivata dX/dt della funzione $X(\xi(t), t)$ valutata in $(\xi(t), t)$ ove $t \rightarrow \xi(t)$ è un punto che si muove su una linea di corrente. Allora si riconosce che, posto $X(\xi, t) = \frac{\underline{u}^2(\xi)}{2} + \Phi(p(\xi)) + G(\xi)$, la (4.29) dice che X è costante lungo le linee di corrente del moto:

$$4.30 \quad \frac{\underline{u}^2}{2} + \Phi(p) + G = \text{costante} \quad (4.30)$$

Questa equazione esprime il teorema delle forze vive, come la seguente classica derivazione alternativa mostra.

Sia S' un elemento di superficie passante per ξ' e di normale \underline{n}' parallela alla velocità del fluido \underline{u}' in ξ' : si tracci la linea di corrente per ogni punto di S' formando così un “tubo di corrente”, che tagliamo in un punto ξ'' con un elemento di superficie S'' ortogonale alla velocità \underline{u}'' in ξ'' .

Consideriamo il fluido racchiuso nel tubo di flusso al tempo $t = 0$. Al tempo $t + \delta t$ la faccia S' si troverà più avanti di $\underline{u}' \delta t$ mentre l'altra faccia di $\underline{u}'' \delta t$.

La variazione dell'energia cinetica del fluido considerato sarà, per l'ipotesi di staticità, semplicemente:

$$4.31 \quad \frac{1}{2} \underline{u}''^2 \rho'' \underline{u}'' \cdot \underline{n}'' \delta t S'' - \frac{1}{2} \underline{u}'^2 \rho' \underline{u}' \cdot \underline{n}' \delta t S' \quad (4.31)$$

che dovrà uguagliare il lavoro delle forze applicate. Le forze esterne compiono lavoro dato dalla variazione di energia potenziale (cambiata di segno):

$$4.32 \quad G' \rho' S' \underline{u}' \cdot \underline{n}' \delta t - G'' \rho'' S'' \underline{u}'' \cdot \underline{n}'' \delta t \quad (4.32)$$

Mentre il calcolo del lavoro delle forze di pressione è più complesso perché bisogna tener conto che tali forze compiono lavoro non solo sulle facce esterne e le basi del tubo ma anche all'interno. Per calcolare il lavoro delle forze di pressione, dividiamo il tubo con sezioni $S' = S_1, S_2, \dots, S_n = S''$ normali alla velocità e spaziate fra loro in modo che il centro di S_{i+1} si trovi più avanti del centro di S_i di una quantità molto più piccola della quantità $\underline{n}_i \cdot \underline{u}_i \delta t$, se \underline{u}_i e \underline{n}_i sono velocità e normale a S_i . In queste condizioni l'elemento di fluido può essere considerato come rigido e soggetto ad una forza pari alla differenza della pressione sulle sue due facce, moltiplicata per l'area delle medesime. Allora il lavoro può essere calcolato come:

$$4.33 \quad \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - p_{i+1}) S_i \underline{u}_i \underline{n}_i \delta t \quad (4.33)$$

perché le forze di pressione non compiono lavoro sulla faccia laterale del tubo di corrente (perché ad esso ortogonali: si ricordi che il tensore degli sforzi è $-p\delta_{ij}$).

La conservazione della massa impone $\rho_i S_i \underline{u}_i \cdot \underline{n}_i = Q$ e quindi (4.33) diventa:

$$4.34 \quad Q \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i - p_{i+1}}{\rho_i} = -Q \int_{p'}^{p''} \frac{dp}{\rho(p)} = -(\Phi(p'') - \Phi(p'))Q. \quad (4.34)$$

Quindi sommando (4.31), (4.32), (4.34) si trova

$$4.35 \quad \frac{u'^1}{2} + \Phi(p') + G' = \frac{u''^2}{2} + \Phi(p'') + G'' \quad (4.35)$$

Nel caso di moti incomprimibili la (4.35) si semplifica perché:

$$4.36 \quad \Phi(p) = \frac{p}{\rho_0} \quad (\text{caso incomprimibile}) \quad (4.36)$$

Di solito si legge dalla (4.35), (4.36) che aumentando la velocità diminuisce la pressione (caso incomprimibile) o il potenziale di pressione (caso isentropico più generale). Nel caso incomprimibile ad una diminuzione della sezione del tubo corrisponde un aumento della velocità e quindi una diminuzione della pressione. È una proprietà su cui si basano molte pompe aspiranti.

Problemi

[1] La (4.1) mostra che solo campi di forze dotati di un fattore integrante $\mu(\underline{x})$, ossia tali che $\underline{g} = \mu(\underline{x})\underline{\partial}G$ per una opportuna G , possono dare luogo a soluzioni idrostatiche; si mostri che la pressione, in tali soluzioni, dipende da \underline{x} via $G(\underline{x})$ e che anche il prodotto $\rho\mu$ è funzione della G . (*Idea:* Sia $\rho = r(p, s)$ l'equazione di stato e sia $\underline{g} = \mu(\underline{x})\underline{\partial}G$; poichè due funzioni scalari che hanno gradienti proporzionali hanno le stesse superfici di livello la (4.1) implica che: p è una funzione di \underline{x} via G : $p(\underline{x}) = \pi(G(\underline{x}))$ e quindi, di nuovo per la (4.1), $\rho = r(\pi(G(\underline{x})), s_0(\underline{x}))\mu(\underline{x}) = F(G(\underline{x}))$ per una F opportuna).

[2] Nel contesto del problema precedente si faccia vedere che se la densità $s_0(\underline{x})$ è nota allora la pressione è anche calcolabile. Però si noti che in generale sono necessarie condizioni di compatibilità fra $s_0(\underline{x})$, $\mu(\underline{x})$ e l'equazione di stato $\rho = r(p, s)$ affinché l'equazione sia risolvibile. (*Idea:* la pressione deve essere una funzione $\pi(G)$. Allora $\partial p / \partial G \equiv r(\pi(G(\underline{x})), s_0(\underline{x}))\mu(\underline{x}) = \pi'(G(\underline{x}))$ e da questa equazione differenziale si ricava π fissandone il valore in un punto \underline{x}_0 ed integrando l'equazione lungo una curva che da \underline{x}_0 porta a \underline{x} , dopo aver espresso $s_0(\underline{x})$ e \underline{x} in funzione di G lungo questa curva. Il procedimento dipende dalla curva e quindi sono necessarie condizioni di compatibilità.)

[3] Nel contesto dei due problemi precedenti si supponga di prescrivere la distribuzione di entropia $s_0(\underline{x})$. Supposto che la forza \underline{g} di volume sia conservativa con potenziale G , e supposto che $s_0(\underline{x})$ sia funzione del potenziale, $s_0(\underline{x}) = S(G(\underline{x}))$, si mostri che le condizioni di compatibilità di cui al [2] sono soddisfatte ed è possibile una soluzione idrostatica della seconda delle (2.1). (*Idea:* La ρ si può esprimere in termini dell'equazione di stato $\rho = r(p, s)$ e della soluzione $p = \pi(G)$ dell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial G} \pi = r(\pi, S(G)) \quad \pi(G_0) = P_0$$

e la soluzione della equazione idrostatica sarà allora $p(\underline{x}) = \pi(G(\underline{x}))$.

[4] Si constati che queste soluzioni idrostatiche in generale corrisponderanno a stati del fluido in cui la temperatura varia da punto a punto e potranno esistere solo per distribuzioni di temperatura assai speciali, perché in generale la temperatura sarà incompatibile

con una soluzione idrostatica della terza delle (2.1). (*Idea:* Si noti che l'equazione di stato permette di esprimere T in funzione di s, p e non sarà in generale vera la validità della terza delle (2.1), $\underline{\partial \kappa} \underline{\partial T} = 0$, c.f.r. [3]).

[5] Si immagini l'aria come un gas biatomico perfetto di massa molecolare $m_A = 28.8 m_H$, $m_H =$ massa atomo di idrogeno $= 1.6710^{-24}$ g e usando $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg $^\circ K^{-1}$, $g = 9.8 \cdot 10^2$ cm/sec², $c_p = \frac{7}{2} \frac{k}{m_A} = \frac{7}{2} \frac{R}{M_A}$, $R = kN_0$ e $N_0 =$ numero di Avogadro, $R = 8.31 \cdot 10^7$ erg/ $^\circ K$, $N_0 = 6.022 \cdot 10^{23}$). Si calcoli, se la temperatura al suolo è $\bar{T} = 20^\circ C$, quale è il valore T_0 tale che se la temperatura a quota $z = 10^3$ m è $T \geq T_0$ non si instaureranno correnti convettive. (*Idea:* $T_0(z) = \bar{T} + gzc_p^{-1}$, si trova $T_0 > \bar{T} - 9.6^\circ K$ (ossia un gradiente di $0.96 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ K/m$). Se $T < T_0$ l'aria non potrà essere osservata in equilibrio idrostatico stratificato.)

[6] Nella realtà in atmosfera calma e in condizioni di equilibrio il gradiente di temperatura che si osserva è $\sim 0.6 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ K/m$ e quindi la atmosfera calma in condizioni normali è in equilibrio stratificato.

[7] Si esprima la condizione sotto la quale un gas perfetto in equilibrio meccanico nel campo di gravità e a temperatura costante può essere considerato come incompressibile. (*Idea:* dalla discussione del §2 si vede che le variazioni di densità sulla scala l su cui si hanno variazioni sensibili di pressione sono tali che: $\frac{\Delta \rho}{\rho} \simeq \frac{gl}{c^2}$, ove c è la velocità del suono. Nel caso dell'aria si fissi $c \simeq 10^3$ km/h. Si troverà che la scala caratteristica sulla quale le variazioni di densità sono sensibili è $\simeq c^2/g$, ossia $\simeq 10^4$ m. E dunque si può considerare che l'aria in condizioni normali sia incompressibile (ai fini della soluzione dell'equazione idrostatica) su scale di lunghezza dell'ordine del chilometro e quindi si può usare la formula (4.11) per valutare la altezza da una misura di pressione. Per altezze superiori ρ non può più essere considerato costante e per calcolare z in termini di p diviene necessario conoscere anche come varia la temperatura con l'altezza. Almeno per differenze di quota non troppo grandi è possibile valutare l'altezza da misure di pressione, indipendentemente dalla distribuzione di temperatura: è il principio su cui si basano gli altimetri. È chiaro che l'uso di un altimetro "ingenuo", cioè basato sulla formula $p = -\rho g z + \gamma_0$ ovvero su una taratura empirica eseguita in condizioni atmosferiche ideali può condurre ad errori, a volta importanti se le condizioni atmosferiche non sono "ideali".)

[8] Si supponga di studiare un gas in equilibrio in un campo gravitazionale generato da una sfera di massa e raggio dati e, definendo "equilibri stratificati" gli equilibri in cui le grandezze termodinamiche dipendono solo dalla distanza dal centro della sfera si ripeta la discussione di questo paragrafo. Si applichino i risultati all'atmosfera della Terra e a quella di qualche altro pianeta (Marte, ad es.), calcolando quale possa essere il gradiente massimo perché sia possibile un equilibrio stratificato nell'atmosfera di Marte e in quella di Venere. Confrontare il risultato con i gradienti medi alla superficie dei pianeti desunti dai dati astronomici noti. ♣.

[9] Si consideri un gas perfetto con equazione di stato (3.1) (ossia $s = c_v \log T - c \log \rho$ e quindi $p = \rho T c$ e $\varepsilon = \frac{3}{2} c T$, ove $c = R/M_0$, $c_v = \frac{3}{2} c$ se R è la costante dei gas e M_0 è la massa di una grammomole). Si supponga che la viscosità e la conducibilità termica siano date dalle relazioni di Clausius Maxwell ($\eta = c_1 T^{1/2}$, $\kappa = c_2 T^{1/2}$, con c_1, c_2 opportune: c.f.r. [5] del §1). Si supponga che il tensore degli sforzi sia espresso in termini della viscosità da $\tau_{ij} = \eta(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$. Si supponga il gas in un contenitore cubico Ω con temperatura delle pareti fissata $T_0(P)$, $P \in \partial\Omega$. Dimostrare che in generale il gas non può stare in equilibrio (ossia con $\underline{u} = \underline{0}$, $T, p =$ costante). E trovare una distribuzione di temperatura T_0 sulle pareti che non permette configurazioni di equilibrio (meccanico e termico) in presenza della forza di volume dovuta alla gravità. (*Idea:* si mostri che le equazioni sono:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \underline{\partial}(\rho \underline{u}) &= 0 \\ \rho c_v (\partial_t T + \underline{u} \cdot \underline{\partial T}) &= -p \underline{\partial} \cdot \underline{u} + \underline{\partial}(\kappa \underline{\partial T}) \\ \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{\tau}' \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \underline{u} + \underline{g} \end{aligned}$$

$$p = \rho T c, \quad \varepsilon = \frac{3}{2} c T$$

e si mostri che $\underline{u} \equiv \underline{0}$ (conseguenza dell'equilibrio meccanico) implica $\Delta T + \frac{1}{2}(\partial T)^2/T = 0$ (ossia $\Delta T^{3/2} = 0$ e $\partial \log p = \underline{g}/(cT)$) ossia \underline{g} (considerando il rotore dell'ultima espressione ed usando che \underline{g} è conservativo) deve essere parallelo a ∂T , il che in generale è falso. Ad esempio se $T_0(x, y, z) = \vartheta x^{2/3}$ per (x, y, z) su $\partial\Omega$ allora $T(x, y, z) = \vartheta x^{2/3}$ è soluzione della equazione per T ma il suo rotore non è parallelo a \underline{g} .)

[10] Si consideri un pianeta omogeneo sferico T di raggio R ricoperto da un oceano di fluido di profondità $h > 0$ abbastanza grande. Sia L il suo piccino, unico, satellite (pure sferico ed omogeneo). Si denotino con M_T e M_L le rispettive masse e si supponga che l'orbita dei due corpi eterei attorno al loro baricentro sia circolare uniforme e sia ρ la distanza TL dei due corpi eterei: $\rho \gg R \gg h$. Si calcoli la configurazione di equilibrio della superficie del fluido, supposto incompressibile, evincendo la formula di Newton secondo cui l'escursione di marea è $\mu = 3R(\frac{R}{\rho})^3 \frac{M_L}{M_T}$. (*Idea*: se G è il centro di massa, la sua distanza dal centro T è $\rho_B = \frac{M_L}{M_T + M_L} \rho$ e la velocità angolare di rivoluzione dei due enti eterei è ω , tale che $\omega^2 \rho = k(M_L + M_T)\rho^{-2}$, se k è la costante della pesantezza universale. Sia \underline{n} una direzione unitaria uscente da T e si noti che, immaginando colui che osserva come situato nel riferimento rotante attorno a G con velocità angolare ω (in modo che l'asse TL abbia un versore \underline{i} fissato), l'energia potenziale (gravitazionale più centrifuga) nel punto $r\underline{n}$ ha densità proporzionale a:

$$-k \frac{M_T}{r} - k \frac{M_L}{(\rho^2 + r^2 - 2\alpha\rho r)^{1/2}} - \frac{1}{2}\omega^2(\rho_B^2 + r^2 - 2\rho_B r \alpha)$$

se $\alpha \equiv \underline{i} \cdot \underline{n} \equiv \cos \vartheta$. Sviluppisi ora in serie di r/ρ :

$$\begin{aligned} & -k \frac{M_T}{r} - k \frac{M_L}{\rho} \frac{3}{2} \alpha^2 \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{2} k \frac{M_T}{\rho} \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + cost \equiv \\ & \equiv -k \frac{M_T}{\rho} \left(\frac{\rho}{r} + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \frac{M_L}{M_T} \frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2}\right) + cost \end{aligned}$$

perché i termini lineari in r/ρ si elidono in virtù della legge di Keplero ($\omega^2 \rho^3 = k(M_T + M_L)$). E quindi l'equazione della superficie equipotenziale è:

$$\frac{\rho}{r} + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \left(\frac{M_L}{M_T} \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{2}\right) = cost$$

Dunque, posto $r = (1 + \varepsilon)R$, si trova: $\varepsilon = (\frac{R}{\rho})^3 \frac{M_L}{M_T} \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta + cost.$

[11] Sapendo che sulle coste atlantiche del Portogallo o del Brasile l'escursione massima fra la bassa e alta marea è di circa $60cm$ e supponendo che questa sia la escursione di marea di una Terra uniformemente coperta di acqua statica soggetta all'azione della sola Luna si stimi il rapporto fra massa della Luna e massa della Terra. Si supponga $R = 6378 Km$, $\rho = 384.4 \cdot 10^3 Km$.

[12] Si stimi il rapporto fra la marea di Luna e quella di Sole. (*Idea*: $\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_S} = \frac{M_L}{M_S} \left(\frac{\rho_S}{\rho_L}\right)^3 \simeq 2$, supponendo che la massa del Sole sia $M_S = 10^6 M_T$, e che la massa della Luna (approssimata) sia dedotta dal problema [11]).

[13] Tenendo conto del risultato di [12] si ricalcoli la massa della Luna e quindi il rapporto fra la marea di Sole e quella di Luna. (*Idea*: la marea di Luna sarà allora di circa $40cm$ invece dei $60cm$ di [11].)

[14] Sia ω_D la velocità di rotazione diurna del pianeta T e si supponga che la rotazione diurna sia sullo stesso piano dell'orbita del satellite L . Si supponga che il pianeta sia uniformemente ricoperto di un fluido viscoso che aderisce al fondo dell'oceano mentre

alla superficie è disposto in equilibrio con il satellite (ossia la marea è in fase con il satellite e ruota dunque con velocità $\omega_D - \omega$ rispetto alla superficie del pianeta). Sia $\omega_D \gg \omega$ e la profondità dell'oceano sia h ; si supponga, altresì, che la forza di attrito sia η per il gradiente di velocità: dunque il momento delle forze di attrito, rispetto all'asse di rotazione, sarà:

$$A = \int_0^\pi \left[\eta \frac{(\omega_D - \omega) R \sin \vartheta}{h} \right] \cdot [R \sin \vartheta] \cdot [2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta] = \frac{8\pi}{3} \frac{\eta R^4 \omega_D}{h}$$

Si calcoli il rallentamento diurno e annuale del pianeta supponendo che la velocità di rivoluzione annuale sia $\omega_D/365$, e che $\eta = 0.10 \text{ gs}^{-1} \text{ cm}^{-1}$, $R = 6.3 \cdot 10^3 \text{ Km}$, $h = 1 \text{ Km}$, $\omega = 2\pi d^{-1}$ with $d = 27.3 \text{ days}$, $M_T = 5.98 \times 10^{27} \text{ g}$, stimando il tempo in anni necessario affinché il pianeta riduca la sua velocità di rotazione di $\frac{1}{2}$. (*Idea*: il momento d'inerzia del pianeta è $I = \frac{2}{5} M_T R^2$ e quindi $\dot{\omega} = -A/I$, cioè $\omega_D(t) = \omega_D(0)e^{-t/T_0}$, $T_0 = 3M_T h / 20\eta R^2$. Il risultato è $T_0 = 1.5 \cdot 10^7$ anni che significano che (in questo modello di attrito) il giorno sarebbe, ora, iù lungo di circa .55 sec ogni secolo, ossia di circa $0.65 \cdot 10^{-5}\%$ al secolo.)

[15] Si confronti il valore del rallentamento calcolato in [14]) con il valore osservato (desunto dalle tavole dei dati fisici, o dai giornali quotidiani dotati di sensibilità scientifica) e si calcoli la *profondità effettiva* degli oceani terrestri definita come la profondità di un oceano omogeneo che produca il rallentamento osservato (con il meccanismo schematico di attrito descritto).

[16] Se Marte fosse uniformemente coperto da un oceano quanto sarebbe alta la marea di Sole? (*Idea*: $\sim 5.23 \text{ cm}$ perchè il raggio di Marte è $3.394 \cdot 10^8 \text{ cm}$, la sua distanza dal Sole è $227.94 \cdot 10^{11} \text{ cm}$ e la sua massa è $0.64 \cdot 10^{27} \text{ g}$.)

Bibliografia: [LL], [BKM74].

§5 *Il problema della convezione. Equazioni di Rayleigh.*

Studiamo ora più in dettaglio il problema delle (2.1), e delle (2.8), per ricavare un modello "semplice" (ossia più semplice delle (2.1)) dei moti incompressibili in cui si verifichino fenomeni termici non banali. In sostanza ci poniamo il problema di vedere qualche caso concreto in cui la (2.8) si deduce come conseguenza delle (2.1), "esatta in qualche senso asintotico". Vedremo che si perverrà ad una situazione interessante, nota come "regime di Rayleigh" nel problema del moto di un fluido semplice (ad esempio verificante l'equazione di stato dei gas perfetti) incompressibile, ma conduttore di calore, viscoso e posto fra due superfici a temperatura costante.

(A) *Generalità sulla convezione.*

Il primo problema che si incontra nello studio della convezione sta nel ricavare equazioni più semplici di quelle molto generali (2.1), valide in opportune situazioni, e che ancora possano descrivere almeno alcuni dei fenomeni cui si è interessati, ossia moti generati da differenze di densità dovute a variazioni di temperatura. Si cerca cioè un sistema di equazioni che possa giocare il ruolo delle equazioni di NS incompressibili nello studio dei moti di fluidi "puramente meccanici", in cui le variazioni di temperatura ed il trasporto di calore e materia da esse generati sono trascurabili.

L'ipotesi di incompressibilità nella forma semplice $\rho = \text{cost}$ è ovviamente poco interessante in quanto, per definizione, si ha convezione quando le variazioni di densità con la temperatura *non* sono trascurabili.

Ci poniamo il problema di vedere se un fluido fisicamente comprimibile, e per fissare le idee considereremo un gas perfetto, ammetta moti che conservano il volume, ossia tali che $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$, senza pertanto avere densità costante.

In generale, però, la $\underline{\partial} \cdot \underline{u}$ non è una costante del moto e, quindi, appare per lo meno dubbio che esistano soluzioni con questa proprietà. E, invero, troveremo che soluzioni con $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ possono esistere solo in un senso approssimato, se si rinuncia ad avere esattamente verificata l'equazione di stato che è sostituita in un certo senso dalla $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$. Più precisamente troveremo approssimazioni che tramutano le equazioni generali (2.1) in equazioni approssimate ma tali che $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ è identicamente soddisfatta se lo è all'istante iniziale, (pur non essendo necessariamente $\rho = \text{cost}$).

(B) *Le ipotesi fisiche del modello convettivo.*

Considereremo, per concretezza, il caso di un gas perfetto:

$$5.1 \quad s = c_V \log e - c \log \rho \Rightarrow s = c_V \log T - c \log \rho + \text{cost} \quad (4.37)$$

ossia $p = c\rho T$, $e = c_V T$, ove c_V è il calore specifico a volume costante, $c = R/M_{\text{mol}}$ è il rapporto fra la costante R dei gas e la massa molare

e l' energia interna è denotata e per evitare confusione con la quantità adimensionale "piccola" ε introdotta in seguito. Tuttavia l' ipotesi di gas perfetto non è necessaria e la sola variazione nel considerare un fluido più generale è che alcune quantità rimarranno come costanti che non possono essere calcolate a meno che non venga specificata la sostanza in esame.

Supporremo il fluido racchiuso fra due piani orizzontali a quote $z = 0$ e $z = H$, soggetto alla forza di gravità $\underline{g} = (0, 0, -g)$.

Le condizioni al contorno sono fissate dando le "temperature al suolo e in quota", $T = T_0$, se $z = 0$, e $T = T_0 - \delta T$, se $z = H$. Inoltre si supporrà che la velocità sia tangente sui piani $z = 0$ e $z = H$ e che la quantità di moto orizzontale $\int u_j d\underline{x}$, $j = 1, 2$, sia nulla (nel seguito useremo le notazioni $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ come equivalenti).

Studieremo moti in cui la pressione è vicina alla pressione barometrica statica, $p = p_0 - \rho_0 g z$ e in cui la densità è molto vicina a un dato ρ_0 e p_0 è grande rispetto a $\rho_0 g H$.

Supponendo che i coefficienti di viscosità η, η' , c.f.r. (2.6), siano costanti (i problemi del §1 mostrano che questa è un' ipotesi che può essere ragionevole se le variazioni di temperatura sono sufficientemente piccole, si veda in seguito) segue che le equazioni "esatte" sono, se $\nu = \eta/\rho, \nu' = \eta'/\rho$, c.f.r. §1, (2.1):

$$\begin{aligned} \rho T (\partial_t s + \underline{u} \cdot \underline{\partial} s) &= \kappa \Delta T + \frac{\eta}{2} (\underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} \underline{u})^2 + (\eta + \eta') (\underline{\partial} \cdot \underline{u})^2 \\ 5.2 \quad \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= \nu \Delta \underline{u} + (\nu + \nu') \underline{\partial} (\underline{\partial} \cdot \underline{u}) - \frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} \\ \partial_t \rho + \underline{\partial} \cdot (\rho \underline{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

alle quali si aggiunge l' equazione di stato $s = s(e, \rho)$ in (4.37), ossia (equivalentemente) le due relazioni $s = c_V \log T - c \log \rho$, $p = c \rho T$, e naturalmente anche le menzionate condizioni al contorno. Supporremo κ, ν costanti, per semplicità.

È interessante notare che la condizione che l' attrito generi entropia a tasso di creazione positivo è espressa da $\frac{\eta}{2} (\underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} \underline{u})^2 + \eta' (\underline{\partial} \cdot \underline{u})^2 \geq 0$ e cioè $\eta' \geq -2\eta$. Il caso $\eta' + \eta = 0$ è dunque possibile, da questo punto di vista, e quindi è teoricamente interessante.

Si noti che, dati $s_0, \underline{u}_0, \rho_0$ all' istante $t = 0$, possiamo calcolare T_0, p_0 allo stesso istante a mezzo dell' equazione di stato e quindi, via la (4.38), $\underline{\dot{u}}, \dot{s}, \dot{\rho}$ (a $t = 0$): pertanto possiamo calcolare \underline{u}, s, ρ all' istante $dt > 0$. Il moto è quindi formalmente determinato dalle (4.37), (4.38).

Se inoltre a $t = 0$ si ha $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ non è detto che $\underline{\partial} \cdot \underline{\dot{u}} = 0$ all' istante $t = 0$ e, quindi, non è detto che $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ all' istante $dt > 0$.

Ne consegue che la condizione $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ può essere aggiunta solo a patto di eliminare una delle relazioni scalari, ad esempio l' equazione di continuità. E questo può essere consistente solo se le condizioni di incomprimibilità

viste al §2 sono realizzate e se, inoltre, le variazioni di temperatura non causano grandi variazioni di densità.

Se α è il coefficiente di espansione termica a pressione costante ($\alpha \sim T_0^{-1}$ se δT è piccolo, nel nostro gas perfetto), questa ultima condizione significa semplicemente che $\varepsilon \equiv \alpha \delta T \ll 1$. Mentre la condizione di incomprimibilità vista al §2 si formula allo stesso modo dicendo che una variazione tipica v della velocità deve essere piccola rispetto alla velocità v_{suono} del suono.

Una valutazione di v può essere ottenuta osservando che i moti che si sviluppano a partire da uno stato vicino alla quiete sono essenzialmente dovuti alle variazioni di densità dovute alle variazioni di temperatura, le quali generano naturalmente una piccola spinta di Archimede con accelerazione $\alpha \delta T g$.

Allora una velocità tipica in un moto, che almeno inizialmente si discosta poco dalla quiete, è quella acquisita da un grave che cade da un' altezza H con accelerazione $g\alpha\delta T$:

$$v = \sqrt{H g \alpha \delta T} \quad (4.39)$$

e la scala di tempo di questi moti sarà il tempo di caduta, dell' ordine di $\tau_c = H/v$. Faremo inoltre alcune ipotesi semplificative, ossia

(h1) Per semplicità *considereremo solo moti in cui la scala spaziale di variazione della velocità è dell' ordine di H e le scale temporali sono dell' ordine di $\nu^{-1} H^2$ che si supporrà uguale a $\tau_c = H/v$.*

(h2) *Inoltre richiederemo che tutte le velocità abbiano lo stesso ordine di grandezza, altrimenti (cfr. §2) la discussione sulla incomprimibilità sarebbe più complessa, e che ci sia, quindi, "un solo parametro piccolo" ε :*

$$\varepsilon \sim \alpha \delta T \sim \frac{v}{v_{suono}} \sim \frac{\nu H^{-1}}{v_{suono}} \sim \frac{gH}{v_{suono}^2} \quad (4.40)$$

ove $\alpha = -\rho^{-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ e $v_{suono}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \cong (cT)^{-1}$.¹

Si noti che la condizione di instabilità convettiva (4.12) ($\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p}$) diventa, poichè $\frac{dT}{dz} \cong \frac{\delta T}{H}$, $\frac{\alpha \delta T}{gH} v_{suono}^2 > 1$ e quindi le condizioni (4.40) corrispondono a situazioni instabili (anche se "marginalmente" perchè tale parametro è $\simeq 1$) rispetto all' insorgere di moti convettivi, almeno in assenza di termoconduzione, *c.f.r.* (C) in §4.

I moti convettivi a loro volta possono però essere più o meno stabili rispetto a perturbazioni: quest' ultima è un' altra questione, più delicata, che analizzeremo in seguito. La instabilità dei moti convettivi stessi sarà dunque possibile (e addirittura potrà essere forte) in funzione di altri parametri caratteristici: vedremo che infatti moti convettivi insorgono anche se la condizione di stabilità adiabatica (4.40) è verificata ma la quantità $R_{Pr} = \frac{\nu \rho c_p}{\kappa}$ è grande.

¹ in realtà la velocità del suono è definita da $(\partial \rho / \partial p)_s^{-1/2} = \sqrt{c(1 + c_V/c)T} = \sqrt{c_p T}$, e non da \sqrt{cT} , perchè di solito si considerano moti adiabatici: ma le due definizioni danno risultati dello stesso ordine di grandezza nei gas ideali semplici perchè $c_V = 3c/2$.

Allora scrivendo $\rho^{-1}\delta\rho = \rho^{-1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\delta T + \rho^{-1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\delta p$ vediamo che il fluido può essere considerato incomprimibile se, valutando $\rho^{-1}\delta p$ come $|\underline{\dot{u}}| \sim v^2 H^{-1} \sim |\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}|$ e tenendo conto della (4.39):

$$5.5 \quad \alpha\delta T \ll 1, \quad \frac{Hg\alpha\delta T}{v_{suono}^2} \ll 1 \quad (4.41)$$

e nelle ipotesi (4.40) la condizione di incomprimibilità (4.41) sarà semplicemente $\varepsilon \ll 1$.

(h3) Supporremo di essere nella situazione in cui $\sqrt{\frac{gH}{v_{suono}^2}} \equiv \sqrt{\frac{gH}{cT}} \leq \alpha\delta T \equiv \varepsilon$ sono piccoli in modo che la (4.41) sia automaticamente verificata.

Nella ipotesi (4.41), e nella tacita ipotesi che le variazioni di velocità e temperatura dei moti che consideriamo abbiano luogo su scale tipiche di lunghezza dell'ordine di H e di tempo dell'ordine di $\nu^{-1}H^2$, le equazioni del moto si potranno scrivere, posto $T = T_0 + \vartheta - \frac{\delta T}{H}z$:

$$5.6 \quad \begin{aligned} \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 \\ \underline{\dot{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= \nu \Delta \underline{u} + \underline{g} - \frac{1}{\rho} \underline{\partial} p \\ \dot{\vartheta} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \vartheta - \frac{\delta T}{H} u_z &= \chi \Delta \vartheta + \frac{\nu}{2c_p} (\underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} \underline{u})^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

ove si è posto $\chi = \kappa\rho^{-1}c_p^{-1}$; l'equazione di continuità è stata eliminata (e le violazioni saranno "piccole" se (4.41) vale),² e l'ultima equazione è ottenuta dalla prima delle (4.38) notando che, nella approssimazione in cui ci troviamo la trasformazione termodinamica subita dall'elemento di volume generico deve essere pensata come una trasformazione a pressione costante, per cui³ $Tds = c_p dT$.

² invero i termini $\partial_t \rho$ e $\underline{u} \cdot \underline{\partial} \rho$ dell'equazione di continuità hanno (entrambe per la (4.40)) ordine $O(\rho\alpha\delta T \frac{\nu}{H^2})$ mentre il terzo termine $\rho \underline{\partial} \cdot \underline{u}$ ha ordine $O(\rho \frac{\nu}{H})$ e, per la (4.40) (cioè $\nu H \sim \nu$), il rapporto di questi ordini di grandezza è $O(\varepsilon)$. All'ordine più basso l'equazione di continuità è dunque $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$.

³ Una analisi più formale è la seguente. Si pensi s come una funzione di p, T (in un gas perfetto sarebbe $s = c_p \log T + c \log p$, $c_p = c_V + c$); then

$$5.7 \quad Tds = c_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dT \quad (4.43)$$

e possiamo stimare il rapporto \dot{p}/\dot{T} stimando \dot{T} dimensionalmente come $\delta TH^2/\nu$ e \dot{p} osservando che $O(|\underline{\partial} p|) \sim O(\rho \underline{\dot{u}}) \sim O(\rho \frac{\nu \nu}{H^2})$ e quindi le variazioni δp di p hanno grandezza $O(\delta p) \sim O(\frac{\rho \nu \nu}{H})$ e, pertanto, $O(\dot{p}) = O(\frac{\rho \nu \nu^2}{H^3})$. Quindi se confrontiamo \dot{p}/p con \dot{T}/T otteniamo $\rho \nu \nu T / p \delta TH$ che ha grandezza $O(\varepsilon)$ per (4.40): per esempio nel caso del gas perfetto questo è $(\nu/v_{sound}) \cdot (\nu/H v_{sound}) \cdot (1/\alpha\delta T) = O(\varepsilon)$ (consideriamo che il fluido sia fissato, così che i parametri v_{sound}, ρ, ν si devono considerare costanti). Quindi per il calcolo delle variazioni di entropia possiamo supporre $p = \text{constant}$ all'ordine dominante

Supporremo che ν, χ, c_p in (4.42) siano costanti (per semplicità). E sottintenderemo le condizioni al contorno, specificate prima delle (4.38).

(C) *Il modello di Rayleigh.*

Le equazioni (4.42), valide nelle ipotesi (4.41), (4.40) sono ancora molto complesse ed è opportuno notare che le (4.40) consentono ulteriori semplificazioni perchè, ferma restando la situazione (4.40), esistono regimi in cui le equazioni possono contenere ancora termini di ordine di grandezza diverso.

Ad esempio possiamo considerare il caso in cui le (4.40) sono "automaticamente" vere e si suppone che la forza esterna $g \rightarrow 0$ e la altezza $H \rightarrow \infty$, per $\varepsilon \rightarrow 0$. Questo facilita la valutazione dei vari ordini di grandezza in funzione di $\varepsilon = \alpha \delta T$. Si potrà fissare, invero, $g = g_0 \varepsilon^2$ e $H = h_0 \varepsilon^{-1}$ (mantenendo fissi ν, v_{suono}, p_0, T_0): un "regime" che, per ε piccolo, chiameremo *regime di Rayleigh*. In questo regime la velocità tipica sarà $v = (\alpha \delta T g H)^{1/2} = O(\varepsilon)$, perchè $\alpha \delta T g$ si interpreta come la spinta archimedeica dovuta alle variazioni di densità.

In questa situazione, per $\varepsilon \rightarrow 0$ si possono mettere in evidenza ulteriori semplificazioni perchè si vede che molti termini delle ultime due equazioni (4.42) hanno ordine di grandezza in ε che è $O(\varepsilon^3)$; quindi si potranno trascurare tutti i termini che hanno ordine di grandezza $O(\varepsilon^4)$, nel limite in cui $\varepsilon \rightarrow 0$. Infatti:

- (I) il termine $\nu c_p^{-1} (\partial \underline{u})^2$ nella equazione del bilancio dell'energia è trascurabile; ossia si potrà ritenere che la generazione di calore, per attrito, nel fluido sia trascurabile.
- (II) si potranno trascurare quantità di ordine ε^4 nella seconda e nella terza delle (4.42).

Prima di discutere le condizioni di validità delle ipotesi (I) e (II) si osservi che le velocità tipiche, *c.f.r.* (4.39), (4.40), saranno dell'ordine di $v = \sqrt{g H \alpha \delta T} = O(\varepsilon) v_{suono}$ mentre le deviazioni di temperatura e pressione dai valori idrostatici di equilibrio, avranno ordine $\alpha \delta T = \varepsilon$ o v/v_{suono} (ossia ancora $\leq O(\varepsilon)$) rispettivamente, se misurate in forma adimensionale.

Dunque il trascurare termini di ordine $(\alpha \delta T)^4$ consente di mantenere significativamente i termini non lineari in (4.42), che hanno ordine $O(\varepsilon^3)$.

Anzitutto discutiamo la ipotesi (II); osserviamo che per la definizione di

e pertanto $T ds = c_p dT$ (e nel gas perfetto $c_p = c_v + c$). Si noti che l'ipotesi che il gas sia perfetto non è necessaria per l'argomento: è solo posta per calcolare esplicitamente $\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$ che in questo argomento è una costante in quanto proprietà del fluido. Si noti anche, come sarà utile nel seguito, che se $\chi \simeq \nu$ (*c.f.r.* [1.1.5]), il termine $\frac{\eta}{2} (\partial \underline{u} + \partial \underline{u})^2$ ha grandezza $O(\eta v^2 H^{-2}) = O(\rho \nu v^2 H^{-2}) = O((v/v_{sound})^2 (\nu/H v_{sound})^2) = O(\varepsilon^4)$ e pertanto può essere eliminato dalle (4.42). Si veda [EM83].

ϑ , c.f.r. (4.42), si ha:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p \right) &= \frac{1}{\rho^2} (\underline{\partial} \rho \wedge \underline{\partial} p) = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p (\underline{\partial} \vartheta + \frac{\delta T}{H} \underline{g}) \wedge \underline{\partial} p = \\ &= \frac{\alpha \rho c}{\rho^2} \underline{\partial} \vartheta \wedge \rho \underline{g} + O(\varepsilon^4) \equiv \alpha c \underline{\partial} \wedge (\vartheta \underline{g}) + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (4.44)$$

perchè se, come stiamo supponendo, si pensa che $H = h_0 \varepsilon^{-1}$, $g = g_0 \varepsilon^2$, con $\varepsilon = \alpha \delta T$ allora:

(a) nella prima riga, notando $dT = d\vartheta - \frac{\delta T}{H} dz$, $\underline{\partial} z = -\underline{g}/g$, si usa $(\frac{\partial \rho}{\partial T})_p = \frac{\rho}{T} c = \alpha \rho c$ e la parte di $\underline{\partial} \rho$ proporzionale a $(\frac{\partial \rho}{\partial p})_T \underline{\partial} p$ non contribuisce e inoltre perchè

(b) $\underline{\partial} p - \rho \underline{g}$ è di ordine $O(\varepsilon^3)$ (ossia di \underline{u} e quindi del prodotto di νH^{-2} per la velocità tipica $v = O(\varepsilon)$, come notato). Pertanto si può sostituire $\underline{\partial} p$ con $\rho \underline{g}$ a meno di $O(\varepsilon^4)$ e

(c) $\alpha \delta T, \alpha \vartheta \sim O(\varepsilon)$ e quindi $\frac{\alpha \delta T}{\rho} \underline{g} = O(\varepsilon^2)$ e $\frac{\alpha}{\rho} \underline{\partial} \vartheta \wedge \underline{\partial} p = \frac{\alpha}{\rho} \underline{\partial} \vartheta \wedge \underline{g} + O(\varepsilon^4)$

Pertanto (II) implica $\text{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \alpha \underline{g} \vartheta \right) = O(\varepsilon^4)$ e, cioè, per un opportuno p'

$$-\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p = -\alpha \vartheta \underline{g} + \underline{\partial} p' + O((\alpha \delta T)^4) \quad (4.45)$$

(o anche $\underline{g} - \rho^{-1} \underline{\partial} p = -\alpha \vartheta \underline{g} + \underline{\partial} p' + O(\varepsilon^4)$, poiché \underline{g} è conservativa).

Discutiamo ora la (I), mettendone in evidenza il significato fisico con il metodo del §2. Nel regime di Rayleigh il termine che vogliamo trascurare ha ordine di grandezza:

$$\frac{\nu}{c_p} (\underline{\partial} \underline{u})^2 \sim \frac{\nu}{c_p} \frac{H g \alpha \delta T}{H^2} = O(\varepsilon^4) \quad (4.46)$$

e deve quindi avere ordine di grandezza piccolo rispetto agli ordini di grandezza degli altri termini dell' equazione, ossia $\dot{\vartheta}, \underline{u} \cdot \underline{\partial} \vartheta, \frac{\delta T}{H} u_z, \chi \Delta \vartheta$.

E si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &\sim O\left(\frac{\nu \delta T}{H^2}\right), & \frac{\delta T}{H} u_z &\sim O\left(\frac{\delta T}{H} \sqrt{g \alpha \delta T H}\right) \\ \underline{u} \cdot \underline{\partial} \vartheta &\sim O\left(\sqrt{g H \alpha \delta T} \frac{1}{H} \delta T\right), & \chi \Delta \vartheta &\sim O\left(\chi \frac{\delta T}{H^2}\right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

e confrontando (4.46) con (4.47) si trova che le condizioni di incomprimibilità (4.41) e di validità delle ipotesi (I) e (II) si riassumono in:

$$\begin{aligned} \sqrt{g H \alpha \delta T} &\ll v_{suono}, & \varepsilon \equiv \alpha \delta T &\ll 1, \\ c_p \delta T &\gg H g \alpha \delta T, & \frac{\nu}{c_p} \frac{\sqrt{g H \alpha \delta T}}{H \delta T} &\ll 1 \end{aligned} \quad (4.48)$$

supponendo che, come detto sopra, i moti abbiano luogo su scale di lunghezza e di tempo date da H e da $H^2 \nu^{-1}$ rispettivamente.

Si possono soddisfare queste condizioni simultaneamente, scegliendo:

$$5.13 \quad \varepsilon = \alpha \delta T, \quad g = g_0 \varepsilon^2, \quad H = h_0 \varepsilon^{-1}, \quad \frac{g_0 h_0}{c_p T_0} \cong 1, \quad \frac{\nu}{\sqrt{c_p T_0} h_0} \cong 1 \quad (4.49)$$

ove g_0, h_0, T_0 sono fissi e abbiamo usato le: $\alpha \cong T^{-1}$, $v_{suono}^2 \sim c_p T$, purché sia $\varepsilon \ll 1$, (si noti che queste relazioni non sono altro che le (4.40)).

In queste condizioni le equazioni (comprese le condizioni al contorno specificate prima delle (4.38)) si scrivono:

$$5.14 \quad \begin{aligned} \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 \\ \underline{\dot{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= \nu \Delta \underline{u} - \alpha \vartheta \underline{g} - \underline{\partial} p' \\ \underline{\dot{\vartheta}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \vartheta &= \chi \Delta \vartheta + \frac{\delta T}{H} u_z \\ \vartheta(0) = 0 = \vartheta(H), \quad u_z(0) = 0 = u_z(H), \quad \int u_x d\underline{x} = \int u_y d\underline{x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

e non scriviamo l'equazione di stato, nè quella di continuità, perchè s e ρ non appaiono più in (4.50) (e, in ogni caso, l'equazione di stato non potrà essere verificata che a meno di quantità di ordine $O((\alpha \delta T)^2)$). La p' è legata, ma non è uguale, alla pressione p : nelle nostre approssimazioni $p = p_0 - \rho_0 g z + p'$.

Ci dobbiamo attendere, per consistenza, che $\underline{u} = O((\alpha \delta T)) = O(\varepsilon)$ e $\vartheta = O(\varepsilon)$, e che le equazioni abbiano senso a meno di $O((\alpha \delta T)^4)$, essendo ora costituite da termini tutti di $O(\varepsilon^3)$.

Dunque i termini non lineari in (4.50) hanno senso, e dal punto di vista fluidodinamico il sistema ha un *numero di Reynolds* $R = v/v_c$ (ossia $R = \sqrt{\alpha \delta T g H} / (\nu/H)$ perchè $v_c = \nu/H$ è la "velocità geometrica") e fenomeni di instabilità si potranno verificare se R è grande. Si deve notare che nel regime considerato il numero di Reynolds è un parametro "libero" indipendente da ε per la (4.49). In generale il numero di Reynolds di un campo di velocità è definito come il rapporto fra una velocità tipica e la velocità $\frac{\nu}{H}$. Per l'occasione R (o meglio R^2) è detto *numero di Grashof*, invece che di Reynolds, [LL].

In realtà il sistema ha anche un'altra "scala di velocità geometrica": e cioè $H^{-1} \chi$. In genere $\chi \sim \nu$ (come nei gas perfetti è implicato dalla relazione di Clausius Maxwell, cfr problema [5] del §1: $\chi = \frac{c_p}{c_v} \nu$): ma esistono materiali in cui $\nu \chi^{-1} \equiv R_{Pr}$, detto *numero di Prandtl*, è molto grande e quindi la scala di velocità $H^{-1} \chi$ è molto diversa da $H^{-1} \nu$ e i fenomeni di instabilità possono manifestarsi più presto. È interessante la seguente tavola, (c.f.r. [LL], p. 254) dei valori sperimentali di R_{Pr} :

Mercurio	0.044
Aria	0.733
Acqua	6.75
Alcool	16.8

Glicerina 7250.

Il problema della instabilità convettiva, ossia dei valori dei parametri R e R_{Pr} in corrispondenza dei quali la soluzione banale $\underline{u} = \underline{0}$, $\vartheta = 0$ di (4.50) perde stabilità (nel senso della stabilità lineare), è stato studiato da Rayleigh che mostrò, come si vedrà al §17, che la instabilità convettiva è regolata dalla grandezza della combinazione $R^2 R_{Pr}$, detto talvolta *numero di Rayleigh*:

$$5.15 \quad R_{Ray} = \frac{g\alpha \delta T H^3}{\chi\nu} = R^2 R_{Pr} \quad (4.51)$$

e che altri chiamano, invece, *numero di Péclet*, [LL].

Osservazioni:

(1) Si noti che se valgono le (4.40) allora $R \cong 1$: ma questo significa $R = O(1)$, ossia resta fisso per $\varepsilon \rightarrow 0$. Quindi, fisicamente, R_{Ray} grande è in generale connesso sia a R_{Pr} grande sia a R grande. Tuttavia nei gas perfetti $R_{Pr} = 1$, *c.f.r.* [1.1.5].

(2) Ovviamente, poichè il problema permette di definire due numeri adimensionali indipendenti (tranne che nel caso del gas perfetto, come osservato), ci si deve aspettare che ci sia una famiglia a due parametri di fenomeni e non stupisce che per ognuno di essi si possa definire un numero caratteristico avente forma $R^a R_{Pr}^b$: vista la "grande quantità" di coppie (a, b) di numeri reali possibili si vede anche che c'è la possibilità di immortalare il proprio nome, insieme con quello di amici e non, associanciandolo ad un "numero convettivo".

Per impostare razionalmente la questione dei numeri convettivi conviene definire le seguenti grandezze *adimensionali*:

$$5.16 \quad \begin{aligned} \tau &= t\nu H^{-2}, \quad \xi = xH^{-1}, \quad \eta = yH^{-1}, \quad \zeta = zH^{-1}, \\ \vartheta^0 &= \frac{\alpha\vartheta}{\alpha\delta T}, \quad \underline{u}^0 = (\sqrt{gH\alpha\delta T})^{-1} \underline{u} \end{aligned} \quad (4.52)$$

ove le funzioni Vu^0, ϑ^0 sono pensate come funzioni degli argomenti τ, ξ, η, ζ . E si verifica ora che le equazioni di Rayleigh assumono, in queste variabili, la forma seguente:

$$5.17 \quad \begin{aligned} \underline{\dot{u}} + R\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= \Delta \underline{u} - R\vartheta \underline{e} - \underline{\partial} p, & R^2 &= \frac{gH^3\alpha\delta T}{\nu^2} \\ \dot{\vartheta} + R\underline{u} \cdot \underline{\partial} \vartheta &= R_{Pr}^{-1} \Delta \vartheta + Ru_z, & R_{Pr} &= \frac{\nu}{\kappa} \\ \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 \\ u_z(0) &= u_z(1) = 0, & \vartheta(0) &= \vartheta(1) = 0, & \int u_x d\underline{x} &= \int u_y d\underline{x} = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

ove abbiamo eliminato l'indice 0 di adimensionalità in (4.52) e chiamato di nuovo t, x, y, z le coordinate adimensionali τ, ξ, η, ζ in (4.52) e p è opportunamente ridefinito; e $\underline{e} = (0, 0, -1)$. Tali equazioni sono valide nella ipotesi che

valgano le (4.49): e si noti che in tal caso $R = g_0 h_0^3 \nu^{-2}$ e $R_{Pr} = \nu \kappa^{-1}$ possono essere fissati indipendentemente da ε . Questo é importante perché fa vedere che esiste "un regime a due parametri", (i parametri R, R_{Pr}), nel quale le equazioni sono ammissibili, se ε é molto piccolo.

Osservazione: si può anche notare che se δT fosse < 0 , ossia la temperatura crescesse con l' altezza, le equazioni (4.53) e (4.50) cambierebbero unicamente per il segno di ϑ nella prima delle (4.53) o di $\vartheta \underline{g}$ nella seconda delle (4.50). Lo si può vedere ripercorrendo la deduzione, ovvero notando che cambiare il segno di δT equivale a scambiare il ruolo di $z = 0$ e $z = H$. Le equazioni del trasporto del calore fra due piani orizzontali con quello superiore più caldo e quello inferiore più freddo (ove su e giù sono definiti dal verso della forza di gravità) sono dunque, se $\delta T > 0$:

$$\begin{aligned}
 5.18 \quad & \underline{\dot{u}} + R \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = \Delta \underline{u} + R \vartheta \underline{e} - \underline{\partial} p, & R^2 &= \frac{g H^3 \alpha \delta T}{\nu^2} \\
 & \dot{\vartheta} + R \underline{u} \cdot \underline{\partial} \vartheta = R_{Pr}^{-1} \Delta \vartheta + R u_z, & R_{Pr} &= \frac{\nu}{\chi} \\
 & \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \\
 & u_z(0) = u_z(1) = 0, & \vartheta(0) &= \vartheta(1) = 0, & \int u_x d\underline{x} &= \int u_y d\underline{x} = 0
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

che però sono meno interessanti in quanto in esse non si manifesta alcuna instabilità della soluzione termostatica: si veda il §17.

(D) *Esame sistematico con il metodo dei riscaldamenti.*

Ci si può domandare se non esista un modo più sistematico di pervenire alle (4.53). A ripensare quanto discusso si può procedere ancora con il metodo, in realtà molto generale, dei riscaldamenti, usato nel §3.

Si considera una situazione in cui, essendo $\varepsilon \equiv \alpha \delta T$, $\alpha = T^{-1}$, $v_{suono}^2 = c_p T$ si ha:

$$\begin{aligned}
 5.19 \quad & \varepsilon = \alpha \delta T, & \varepsilon' &= \frac{g H}{c T} \cong \varepsilon, & \varepsilon'' &= \frac{\nu}{H v_{suono}} \cong \varepsilon, & \varepsilon &\rightarrow 0 \\
 & R = \frac{g H^3 \alpha \delta T}{\nu^2}, & e \quad R_{Pr} &= \frac{\kappa}{\nu} & \text{fissi}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

che verrà (ancora) chiamato "regime convettivo di Rayleigh" con parametro ε . *Ci si pone automaticamente in questo regime se i parametri vengono scelti come in (4.49).* E si cerca una soluzione delle (4.38) che possa essere scritta come:

$$\begin{aligned}
 5.20 \quad & \underline{u}(\underline{x}, t) = (g H \alpha \delta T)^{1/2} \underline{u}^0(\underline{x} H^{-1}, t \nu H^{-2}) \\
 & T(\underline{x}, t) = T_0 - \frac{\delta T}{H} z + \delta T \vartheta^0(\underline{x} H^{-1}, t \nu H^{-2}) \\
 & \rho(\underline{x}, t) = \rho_0(z H^{-1}) + \varepsilon r^0(\underline{x} H^{-1}, t \nu H^{-2}) \\
 & p = \varepsilon \bar{p}(z H^{-1}) + \varepsilon^2 p^0(\underline{x} H^{-1}, t \nu H^{-2}), & g &= \varepsilon^2 g_0
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

ove $\underline{u}^0(\xi, \tau), \vartheta^0(\xi, \tau), r^0(\xi, \tau)$ possono essere pensate come serie di potenze in ε a coefficienti regolari in ξ, τ : si noti che nelle ipotesi (4.55) i tre parametri $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ sono stimati da ε , che quindi è il nostro unico parametro di sviluppo. E inoltre le funzioni $T_0 - \delta T z H^{-1}$ e $\rho_0(z H^{-1})$ sono la soluzione del “problema statico”, ossia (4.6), con condizioni al contorno $\rho_0(0) = \bar{\rho}$ e T_0 :

$$\rho_0(\zeta) = \bar{\rho}, \quad p_0(\zeta) = p_0(0) + \bar{\rho} g_0 h_0 \zeta \quad (4.57)$$

ottenuta dalle (4.10) applicando l'equazione di stato per esprimere ρ_0 in termini di p (dato dalla (4.10)) e della temperatura $T_0 - \delta T \zeta$.

È ora facile verificare, per sostituzione diretta delle (4.56) nelle (4.38), con $\underline{u}^0 = \underline{u}^1 + \varepsilon \underline{u}^2 + \dots$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon r^1 + \varepsilon r^2 + \dots$, $p^0 = p^2 + \varepsilon p^3 + \dots$ e $\vartheta^0 = \vartheta^1 + \varepsilon \vartheta^2 + \dots$, che gli ordini più bassi $\underline{u}^1, \vartheta^1, \bar{\rho}, p_0$ verificano le (4.53).

Come nella nota ³ si deve osservare che \dot{p} risulta essere di ordine $O(\varepsilon^4)$ in un'equazione in cui tutti i termini hanno lo stesso ordine di grandezza $O(\varepsilon^3)$ in modo che (essendo $p = c\rho T$) $\dot{p} = 0$ a meno di $O(\varepsilon^4)$ e si può sostituire $T\dot{p}$ by $-\rho\dot{T}$ nell'equazione dell'entropia, poichè $p = c\rho T$. Anche qui l'ipotesi di gas perfetto non è essenziale.

E quindi l'ordine più basso di $\underline{u}^0, \vartheta^0, \rho_0$ descrive il regime asintotico in cui le equazioni (4.53) sono esatte. Si dirà quindi che il *regime convettivo di Rayleigh è esatto nel limite* “ $\varepsilon \rightarrow 0$ in modo che valgano le (4.49)”.

È questo un metodo matematicamente chiaro, atto a mettere in evidenza il significato delle approssimazioni ed è la versione per l'equazione di (4.38) (nel contesto del problema del gas fra due piani a temperatura data) della analisi della approssimazione di incompressibilità del §3. Si può dunque sperare nella validità di teoremi del tipo di quelli analizzati nel §3: tuttavia tali teoremi non sono stati dimostrati nel caso presente.

Questo punto di vista è ovviamente più sistematico perché consente, in linea di principio, anche di trovare le correzioni di ordine superiore in ε , che, allo stesso modo, verificheranno opportune equazioni.

Ma di solito per pervenire alla determinazione di un “regime asintoticamente” esatto, in un opportuno limite, è necessario procedere empiricamente come discusso sopra (o nel §2), e solo *a posteriori*, una volta capita la struttura delle equazioni e i parametri adimensionali che entrano naturalmente in esse, si può prefissare il riscaldamento corretto. E qui è opportuno notare che non è escluso che per una stessa equazione si possano trovare vari regimi in cui le soluzioni sono descritte esattamente da equazioni “riscalate” (più semplici di quella di partenza, ma di solito diverse fra loro al variare del regime considerato), ma questo non è il caso nel modello che abbiamo considerato. Un esempio è stato incontrato al §3 in cui il fluido può trovarsi in un regime “di Eulero” o in un altro “di Navier Stokes”.

Problemi

[1]: Si esamini qualche conseguenza di una violazione delle (4.40).

Bibliografia: [LL]: §50, §53, §56; e [EM]: da quest'ultimo lavoro ho tratto le idee di base e i metodi di questo capitolo.

§6 Campi incompressibili. Potenziale vettore. Decomposizione di un campo generale.

È importante avere presenti varie possibilità di rappresentazione di campi di velocità in termini di altri campi vettoriali. Come in elettromagnetismo, può essere importante rappresentare i campi elettrici e magnetici in termini di potenziali (quali il potenziale coulombiano o il potenziale vettore). Infatti talvolta le equazioni delle teorie, espresse in termini di questi campi ausiliari, assumono forme più trasparenti o semplici. In questo paragrafo e nei problemi alla fine di esso vengono discussi alcuni fra i più semplici teoremi di rappresentazione di campi vettoriali di interesse in fluidodinamica (e elettromagnetismo).

(A) Campi incompressibili in tutto lo spazio come rotori di un potenziale vettore.

Se si restringe l'indagine a fluidi incompressibili l'equazione di continuità richiederà che:

$$6.1 \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6.1)$$

Supponiamo \underline{u} di classe C^∞ su $\Omega = R^3$ e a decrescita rapida: cioè per ogni $p, q \geq 0$ sia $|\xi|^q \underline{\partial}^p \underline{u}(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0$.¹ Allora esiste un campo vettoriale \underline{A} tale che:

$$6.2 \quad \text{rot } \underline{A} = \underline{u}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{A} = 0 \quad (6.2)$$

La costruzione di \underline{A} è elementare a partire dalla trasformata di Fourier di \underline{u} :

$$6.3 \quad \underline{u}(\underline{\xi}) = \int \underline{\hat{u}}(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{\xi}} d\underline{k} \quad (6.3)$$

Invero la (6.1) significa $\underline{k} \cdot \underline{\hat{u}}(\underline{k}) = 0$ ossia $\underline{\hat{u}}(\underline{k}) = i\underline{k} \wedge \underline{a}(\underline{k})$ ove $\underline{a}(\underline{k})$ è un vettore opportuno ortogonale a \underline{k} e unico. Quindi:

$$6.4 \quad \underline{u}(\underline{\xi}) = \int i\underline{k} \wedge \underline{a}(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{\xi}} d\underline{k} = \text{rot} \int \underline{a}(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{\xi}} d\underline{k} = \text{rot } \underline{A}(\underline{\xi}) \quad (6.4)$$

Però il campo \underline{A} in generale, pur essendo di classe C^∞ , non avrà decrescita rapida: questo lo si evince dal fatto che per $\underline{k} \rightarrow \underline{0}$ la espressione di $\underline{a}(\underline{k})$ in termini di $\underline{\hat{u}}(\underline{k})$ in generale non sarà differenziabile in \underline{k} .

Infatti da $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ segue che $\underline{\hat{u}}(\underline{0}) = \underline{0}$.² E questo implica solo che $\underline{u}(\underline{k})$ è di ordine \underline{k} per $\underline{k} \rightarrow \underline{0}$: mentre per avere che $\underline{a}(\underline{k}) = i\underline{k} \wedge \underline{\hat{u}}(\underline{k}) / \underline{k}^2$ sia regolare

¹ qui e in seguito denoteremo con il simbolo $\underline{\partial}^p$, o simili, una generica derivata di ordine p rispetto alle coordinate \underline{x} .

² Perchè $\underline{\hat{u}}(\underline{k})$ è di classe C^∞ in \underline{k} per la decrescita di \underline{u} e delle sue derivate per $\xi \rightarrow \infty$ e dunque $\underline{0} \equiv \underline{\hat{u}}(\underline{0}) = \underline{\hat{u}}(\underline{0}) + O(\underline{k})$ e dunque $\underline{k} \cdot \underline{\hat{u}}(\underline{k}) = \underline{k} \cdot \underline{\hat{u}}(\underline{0}) + O(\underline{k}^2)$ ed essendo \underline{k} arbitrario deve essere $\underline{\hat{u}}(\underline{0}) = \underline{0}$.

in $\underline{k} = \underline{0}$ si dovrebbe richiedere che $\underline{k} \wedge \underline{\hat{u}}(\underline{k})$ abbia la forma di prodotto di \underline{k}^2 per una funzione regolare di \underline{k} .

L'annullarsi di $\underline{\hat{u}}(\underline{0})$ implica solo che $\underline{a}(\underline{k})$ è limitato per $\underline{k} \rightarrow 0$, ma in generale ha limite dipendente dalla direzione lungo la quale si fa tendere \underline{k} a $\underline{0}$ (e quindi non è differenziabile in \underline{k} in $\underline{0}$). Pertanto $\underline{a}(\underline{k})$ è limitato e tende velocemente a zero per $\underline{k} \rightarrow \infty$, ma non è ovunque differenziabile in \underline{k} e quindi la trasformata di Fourier $\underline{A}(\xi)$ sarà C^∞ ma non tenderà a zero velocemente per $\xi \rightarrow \infty$.

Quanto sopra si deduce direttamente anche dalla formula che non coinvolge le trasformate di Fourier:

$$\underline{A}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{d\eta}{|\xi - \eta|} \operatorname{rot} \underline{u}(\eta) \quad (6.5)$$

ossia $\underline{A} = -\Delta^{-1} \operatorname{rot} \underline{u}$, ben nota dall'elettromagnetismo (\underline{A} ha l'interpretazione di campo magnetico generato da una corrente \underline{u}).

(B) Un campo incomprimibile definito in un volume finito convesso Ω è ancora un rotore.

Poiché spesso occorre considerare campi vettoriali rappresentanti la velocità \underline{u} di un fluido in un contenitore Ω finito, ci domandiamo se dato $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$ sia possibile trovare $\underline{A} \in C^\infty(\Omega)$ in modo che:

$$\underline{u} = \operatorname{rot} \underline{A} \quad \operatorname{div} \underline{A} = 0 \quad (6.6)$$

Un campo \underline{A} verificante (6.6) e in $C^\infty(\Omega)$ si chiama *potenziale vettore* per \underline{u} .

Evidentemente per mostrare che un campo \underline{A} esiste basterà far vedere che \underline{u} può essere esteso fuori di Ω ad una funzione $C^\infty(R^3)$ che è nulla fuori di un dominio limitato $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ ed ivi ha divergenza nulla.

Ritornando al problema posto in (A) la difficoltà è che *l'esistenza di tale estensione non è evidente*. E se Ω ha “buchi” non è in generale vera (si veda problema [12] per un esempio). E nelle righe che seguono se ne costruisce una, esplicitamente, considerando domini Ω convessi per i quali la costruzione geometrica che segue è possibile. Il teorema si estende al caso di domini assai più generali (domini regolari connessi i cui punti di frontiera possano essere connessi all' ∞ da una curva continua che non ha altri punti in Ω , ossia domini “privi di buchi”: cfr. problemi 11%14).

Per mostrare che una estensione di \underline{u} fuori di Ω esiste, occorre comprendere meglio la struttura dei campi a divergenza nulla. Consideriamo il caso in cui Ω è convesso in senso stretto con frontiera analitica (si veda problema [8]) per il caso generale).

Si considerino le componenti u_2 e u_3 di \underline{u} : le estenderemo a funzioni omonime definite su tutto R^3 e ivi C^∞ nulle fuori di una sfera $\tilde{\Omega}$ di raggio abbastanza grande contenente Ω al suo interno. Allo scopo consideriamo il cilindro di tutte le rette parallele all'asse 1 che tagliano Ω : esse definiranno una linea λ chiusa su $\partial\Omega$ e regolare.

Sia Σ una superficie di classe C^∞ che contiene λ e che interseca trasversalmente (ossia con angolo non nullo) ogni retta parallela all'asse 1. Si considera la u_1 su $\Sigma \cap \Omega$ e la si estende ad una funzione definita su tutto Σ e ivi C^∞ e nulla fuori della sfera $\tilde{\Omega}$.

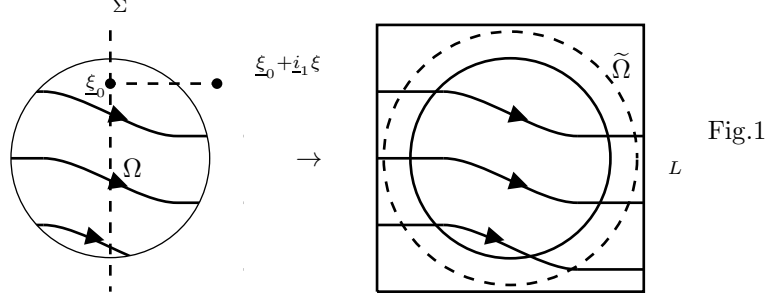


Fig.1

Ogni punto di R^3 potrà scriversi $\xi_0 + i_1 \xi$ con $\xi_0 \in \Sigma$ e $\xi \in R$ e lo denoteremo (ξ_0, ξ) . Definiremo poi:

$$6.7 \quad u_1(\xi_0 + i_1 \xi) = u_1(\xi_0) + \int_0^\xi - \sum_{j=2}^3 \partial_j u_j(\xi_0 + i_1 \xi') d\xi' \quad (6.7)$$

e si ottiene così un campo di velocità \underline{u} a divergenza nulla che è definito in R^3 e estende il campo dato in Ω .

Per costruzione questo campo è identicamente nullo fuori di un cilindro parallelo all'asse i_1 e contenente Ω . Inoltre muovendosi lungo l'asse i_1 e a distanza abbastanza grande da Ω lo si trova costante e parallelo all'asse 1 stesso:

$$6.8 \quad \underline{u}(\xi_0 + \xi i_1) = \begin{cases} V_+(\xi_0) i_1 & \xi > 0 \text{ grande} \\ V_-(\xi_0) i_1 & -\xi > 0 \text{ grande} \end{cases} \quad (6.8)$$

ove $V_\pm(\xi_0) = u_1(\xi_0) + \int_0^{\pm\infty} - \sum_{j=2}^3 \partial_j u_j d\xi'$, c.f.r. (6.7). Supponiamo che “grande” significhi $|\xi| > L_0$ e fissiamo $L > L_0$.

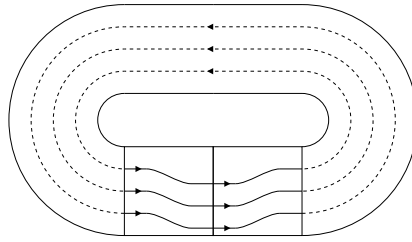


Fig.2

Poniamo ora:

$$6.9 \quad \begin{aligned} \underline{u}'_j(\xi_0 + (L + \xi) i_1) &= -u_j(\xi_0 + (L - \xi) i_1) & j = 2, 3 \\ \underline{u}'_1(\xi_0 + (L + \xi) i_1) &= +u_1(\xi_0 + (L - \xi) i_1) & 0 < \xi < 2L \end{aligned} \quad (6.9)$$

È chiaro che \underline{u}' estende \underline{u} da $\tilde{\Omega}$ a R^3 e che per $\xi \rightarrow \pm\infty$ ha per ogni livello $\xi_0 \in \Sigma$, lo stesso limite $V_-(\xi_0) i_1$; inoltre $\partial \cdot \underline{u}' = 0$.

Consideriamo ora un cilindro Γ parallelo a \underline{i}_1 , tale che $\tilde{\Omega} \subset \Gamma$, con base limitata circolare ortogonale a \underline{i}_1 . Continuiamo le rette del cilindro parallele all'asse \underline{i}_1 in un fascio di classe C^∞ in modo che ciascuna di esse si richiuda su se stessa, (*c.f.r.* Fig.2).

Nel tubo chiuso $\tilde{\Gamma}$ consideriamo un campo vettoriale $\tilde{\underline{u}}$ definito in modo da essere tangente alle curve, appena costruite, che definiscono $\tilde{\Gamma}$. Il campo $\tilde{\underline{u}}$ sarà uguale a $V_-(\underline{\xi}_0)\underline{i}_1$, al “punto di attacco” di $\tilde{\Gamma}/\Gamma$ alla curva che ha coordinata trasversale $\underline{\xi}_0$.

Si continua poi $\tilde{\underline{u}}$ in $\tilde{\Gamma}$, fuori di Γ , in modo che il flusso di $\tilde{\underline{u}}$ su una superficie trasversale alle curve in questione resti costante a parità di sezione normale di tali superfici.

Il campo \underline{u} è evidentemente di classe C^∞ , nullo fuori di $\tilde{\Gamma}$ e ovunque a divergenza nulla.

Allora possiamo rappresentare $\tilde{\underline{u}}$, pensato come campo su R^3 , e scriverlo come:

$$6.10 \quad \tilde{\underline{u}} = \text{rot } \underline{A}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{A} = 0. \quad (6.10)$$

ove \underline{A} è un campo opportuno e di classe C^∞ (cfr A). Questo fa vedere che la restrizione di \underline{A} ad Ω ha le proprietà volute per un potenziale vettore di \underline{u} .

(C) *Ambiguità dei potenziali vettori di campi incompressibili.*

È chiaro che, trovato un campo \underline{A} , se ne possono trovare infiniti altri: basta alterare \underline{A} per un campo gradiente.

Ci domandiamo: dato $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$, con $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ e dato un potenziale vettore \underline{A}_0 per \underline{u} quale è l'ambiguità per \underline{A} ? Supporremo ancora il dominio Ω semplicemente connesso.

Se \underline{A} e \underline{A}_0 sono due potenziali vettori per \underline{u} allora $\underline{A} - \underline{A}_0$ è tale che $\underline{\partial} \cdot (\underline{A} - \underline{A}_0) = 0$ e $\text{rot} (\underline{A} - \underline{A}_0) = \underline{0}$: cioè esiste $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tale che:

$$6.11 \quad \underline{A} = \underline{A}_0 + \underline{\partial}\varphi, \quad \Delta\varphi = 0. \quad (6.11)$$

Vediamo dunque che \underline{A} è determinato a meno del gradiente di una funzione armonica φ .

Se inoltre richiedessimo che $\underline{A} \cdot \underline{n} = 0$ su $\partial\Omega$ allora dato \underline{A}_0 , potenziale vettore, e posto φ = soluzione del problema di Neumann:

$$6.12 \quad \Delta\varphi = 0, \quad \underline{\partial}_n \varphi = -\underline{A}_0 \cdot \underline{n} \quad (6.12)$$

vedremmo che esisterebbe un unico potenziale vettore \underline{A} tale che:

$$6.13 \quad \underline{u} = \text{rot } \underline{A}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{A} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \underline{A} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \quad (6.13)$$

e più in generale si possono immaginare altre proprietà (come condizioni al bordo o altro) atte a identificare un potenziale vettore di un campo incompressibile fra i tanti possibili.

(D) *Un campo vettoriale generico regolare in Ω è la somma di un rotore e di un gradiente.*

Sia ora $\underline{\xi} \rightarrow \underline{w}(\underline{\xi})$ un campo vettoriale generale definito su R^3 e ivi di classe C^∞ e rapidamente decrescente all'∞. Se $\underline{\hat{w}}(\underline{k})$ è la sua trasformata di Fourier, si potrà scrivere, e in un solo modo, per $\underline{k} \neq 0$:

$$6.14 \quad \underline{\hat{w}}(\underline{k}) = i\underline{k} \wedge \underline{a}(\underline{k}) + \underline{k} f(\underline{k}) \quad \text{con} \quad \underline{a}(\underline{k}) \cdot \underline{k} = 0 \quad (6.14)$$

con $\underline{a}(\underline{k})$, $f(\underline{k})$ rapidamente decrescenti e di classe C^∞ per $\underline{k} \neq 0$. Quindi:

$$6.15 \quad \underline{w} = \text{rot } \underline{A} + \underline{\partial} \varphi \quad (6.15)$$

Ossia ogni campo vettoriale si può scrivere come somma di un campo solenoidale e di un campo gradiente. Si noti che, come nel caso (A), i potenziali avranno in generale un decadimento lento (normalmente come $O(|\underline{\xi}|^{-2})$) per $\underline{\xi} \rightarrow \infty$.

Lo stesso risultato vale allora per rappresentare un campo $\underline{w} \in C^\infty(\Omega)$ con Ω regione finita. Basta estendere \underline{w} a $C^\infty(R^3)$ e applicare le (6.14), (6.15).

E) Lo spazio $X_{\text{rot}}(\Omega)$ ed il suo complemento in $L_2(\Omega)$.

Lo spazio $L_2(\Omega)$ ammette una notevole decomposizione in somma diretta di due spazi ortogonali (“i rotori e i gradienti”). Questa non è una estensione delle decomposizioni finora discusse: infatti si vedrà che anche un campo $\underline{u} = \text{rot } \underline{X}$ puramente solenoidale avrà una decomposizione non banale (ossia con una componente non nulla di gradiente), a meno che non sia anche tangente al bordo di Ω . Nell'ultimo caso la decomposizione che stiamo per illustrare coinciderà con le precedenti.

Si consideri lo spazio $X_{\text{rot}} \subset L_2(\Omega)$ definito come:

$$6.16 \quad \begin{aligned} X_{\text{rot}} = \{ & \text{chiusura in } L_2(\Omega) \text{ dei campi } \underline{u} \text{ a divergenza nulla, } C^\infty(\Omega) \\ & \text{e nulli in un intorno della frontiera} \} \equiv \overline{X_{\text{rot}}^0} \end{aligned} \quad (6.16)$$

ove X_{rot}^0 è appunto l'insieme dei campi C^∞ , a divergenza nulla e nulli in un intorno della $\partial\Omega$.

È chiaro che X_{rot} è da pensarsi, in un senso da approfondire, come l'insieme dei campi vettoriali \underline{u} a divergenza nulla e con qualche componente nulla sulla frontiera di $\partial\Omega$. La “poca chiarezza” sta, ad esempio, nel fatto che se $\underline{u} \in X_{\text{rot}}$ allora \underline{u} è in $L_2(\Omega)$ ma non è necessariamente derivabile³ per cui la divergenza di \underline{u} , $\underline{\partial} \cdot \underline{u}$, è solo nulla in un “senso debole”; precisamente:

$$6.17 \quad \int_{\Omega} \underline{u} \cdot \underline{\partial} f \, d\xi \equiv 0, \quad \forall f \in C^\infty(\Omega) \quad (6.17)$$

(come si vede approssimando \underline{u} con $\underline{u}_n \in X_{\text{rot}}^0$ nella norma di $L_2(\Omega)$, per cui $\int_{\Omega} \underline{u} \cdot \underline{\partial} f \, d\xi = \lim_n \int_{\Omega} \underline{u}_n \cdot \underline{\partial} f \, d\xi = -\lim_n \int_{\Omega} \underline{\partial} \cdot \underline{u}_n f \, d\xi = 0$, perché

³ perchè l'operazione di chiusura in L_2 può generare funzioni non regolari

$\underline{u}_n \cdot \underline{n} \equiv 0$ su $\partial\Omega$). E la (6.17) fa vedere che se $\underline{u} \in X_{\text{rot}} \cap C^\infty(\Omega)$ allora:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \underline{\partial} \cdot \underline{u} f d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n} f d\sigma = 0 \Rightarrow \\ 6.18 \quad & \Rightarrow \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \text{ in } \Omega, \quad \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \text{ in } \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.18)$$

per l'arbitrarietà di f .

Convieni a questo punto definire, per semplificare il linguaggio, la seguente nozione:

Definizione: data una funzione $f \in L_2(\Omega)$ si dice che f ha in $L_2(\Omega)$ una “derivata generalizzata” F_j rispetto a x_j , o una “derivata $\partial_j f = F_j$ nel senso della teoria delle distribuzioni”, se esiste una funzione $F_j \in L_2(\Omega)$ per cui si possa scrivere:

$$6.19 \quad \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \partial_j \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} F_j(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (6.19)$$

ove $C_0^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni φ di classe C^∞ e che si annullano in un intorno della frontiera $\partial\Omega$ di Ω .

Analogamente si possono definire la *divergenza* nel senso delle distribuzioni di un campo $\underline{u} \in L_2(\Omega)$, il *rotore*, e le derivate di ordine superiore.

Dunque le funzioni regolari in X_{rot} si annullano sulla $\partial\Omega$ solo nel senso che $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$. Le altre verificano la (6.18) e quindi hanno $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ nel senso delle distribuzioni e $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ su $\partial\Omega$ in un senso debole (espresso esattamente, appunto, dalla (6.18)).

Lo spazio dei campi $\underline{f} \in L_2(\Omega)$ nel complemento ortogonale di X_{rot} ha pure una interessante descrizione; se $\underline{f} \in X_{\text{rot}}^\perp$, si avrà per ogni campo \underline{A} di classe C^∞ e nullo nell'intorno di $\partial\Omega$:

$$6.20 \quad 0 \equiv \int \underline{f} \cdot \text{rot } \underline{A} d\xi \Rightarrow \text{rot } \underline{f} = 0 \text{ nel senso delle distribuzioni} \quad (6.20)$$

e allora si vede (cfr. problemi 16%19) che \underline{f} può scriversi come $\underline{f} = \underline{\partial}\varphi$ con φ funzione in $L_2(\Omega)$ con gradiente (nel senso delle distribuzioni) in $L_2(\Omega)$.

La conclusione è che *il più generale campo vettoriale in $L_2(\Omega)$ si può scrivere come:*

$$6.21 \quad \underline{u} = \underline{u} + \underline{\partial}\varphi \quad \text{con } \underline{u} \in X_{\text{rot}}, \varphi \in L_2(\Omega) \text{ e con gradiente in } L_2(\Omega) \quad (6.21)$$

e tale decomposizione è unica (perchè X_{rot} e X_{rot}^\perp sono una decomposizione di uno spazio di Hilbert in due spazi ortogonali complementari). Inoltre le funzioni in X_{rot} si debbono pensare come campi vettoriali a divergenza nulla (nel senso delle distribuzioni) e tangenti a $\partial\Omega$ (nel senso della (6.18), a meno che \underline{u} sia continua su Ω , nel qual caso \underline{u} è realmente tangente su $\partial\Omega$).

Si dice che *un campo vettoriale $L_2(\Omega)$ si scrive in un solo modo come somma di un campo solenoidale tangente al bordo e di un campo gradiente.*

F) La decomposizione “gradiente-solenoide” di un campo regolare.

Si osservi poi che un campo vettoriale $\underline{w} \in C^\infty(\Omega)$ si scrive naturalmente nella forma:

$$6.22 \quad \underline{w} = \underline{u} + \underline{\partial}\varphi \quad \text{con} \quad \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega \quad \text{e} \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{su} \quad \Omega \quad (6.22)$$

e tale decomposizione è “regolare”, ossia si possono trovare $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, unici in tale classe di regolarità (se si prescinde da una costante additiva arbitraria in φ). Infatti si dovrà avere che φ verifica:

$$6.23 \quad \begin{aligned} \partial_n \varphi &= \underline{n} \cdot \underline{w} & \text{su} \quad \partial\Omega \\ \Delta \varphi &= \underline{\partial} \cdot \underline{w} & \text{su} \quad \Omega \end{aligned} \quad (6.23)$$

e questa equazione determina $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ a meno di una costante additiva. Si noti che la (6.23) è un problema di Neumann e quindi perchè sia risolubile occorre che sia verificata la condizione di compatibilità espressa dal teorema di Gauss dell’elettrostatica: $\int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{w} \, d\sigma = \int_\Omega \underline{\partial} \cdot \underline{w} \, dx$. Questa condizione è verificata automaticamente, per il teorema di integrazione di Stokes. La regolarità in classe $C^\infty(\Omega)$ della soluzione del problema di Neumann con dati al bordo di classe $C^\infty(\partial\Omega)$ è una delle proprietà fondamentali della teoria delle equazioni ellittiche e la si trova discussa nei trattati di Analisi, (c.f.r. ad es. [So]).

Ovviamente $\underline{u} = \underline{w} - \underline{\partial}\varphi \in C^\infty(\Omega)$ verifica le (6.22). Dunque la decomposizione (6.22) esiste ed è unica (a meno di una costante additiva in φ), e quindi il senso in cui $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ è in realtà proprio, in questi casi.

Problemi e complementi.

[1] si mostri l’impossibilità, in generale, di risolvere la (6.22) con $\underline{u} = 0$ su $\partial\Omega$. (Idea: si consideri un campo \underline{w} avente la forma:

$$\begin{aligned} w_1(x, y, z) &= -\partial_y f(x, y)\chi(z) \\ w_2(x, y, z) &= \partial_x f(x, y)\chi(z), & x, y \in \mathbb{R}^2 \\ w_3(x, y, z) &= g(x, y)\chi(z), & z \in [0, +\infty) \end{aligned}$$

ove $\chi(z) \equiv 1$ per $|z| \leq z_0$ e $\chi(z) \equiv 0$ per $|z| > z_1 > z_0$, e $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Allora le (6.22) divengono:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = g(xy)\chi'(z), \\ \partial_z \varphi = g(xy), & z = 0 \\ \partial_x \varphi = -\partial_y f, \\ \partial_y \varphi = \partial_x f, & z = 0 \end{cases} \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$$

ma la prima coppia di equazioni determina φ a meno di una costante e quindi le altre due equazioni saranno false per opportune scelte della funzione arbitraria f .)

[2] si faccia vedere l’incompatibilità di (6.22), con $\underline{u} = \underline{0}$ su $\partial\Omega$ in un esempio con Ω limitato. (Idea: si consideri Ω = sfera di raggio R e si usino coordinate polari imitando

il precedente esempio facendo giocare a ρ il ruolo di z (con $\rho \geq 0$, $\rho \leq R$) e a (θ, φ) il ruolo di (x, y) .)

[3] se $\vartheta(x)$ è una funzione di classe C^∞ che vale 1 per $x \in (-\infty, +1)$ e 0 per $x \in [+2, +\infty)$, si consideri la funzione:

$$x \Rightarrow f(x) = \vartheta(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} x^k e^{-xc_k^2} \quad (!)$$

e si mostri che è di classe C^∞ in $x \in [0, +\infty)$ qualunque sia la successione c_k . Inoltre:

$$f^{(0)}(0) = c_0, \quad f^{(p)}(0) = c_p + \text{polinomio finito in } c_0, \dots, c_{p-1}, \quad \forall p > 0$$

Si mostri anche che $e^{-xc_h^2}$ potrebbe essere sostituito da $e^{-x|c_h|^\alpha}$ con $\alpha > 0$ arbitrario.

[4] usando [3] si faccia vedere che, data una successione arbitraria $f^{(j)}$, esiste una funzione $f \in C^\infty([0, +\infty))$ tale che $f^{(j)}(0) = f^{(j)}$, $\forall j$. E inoltre posto: $F_j = \sum_{k=0}^j |f^{(k)}|$ esiste un polinomio $L_j(x)$, esplicitamente calcolabile, tale che:

$$\|f\|_{C^{(j)}([0, +\infty))} \leq L_j(F_j) \quad (**)$$

ove: $\|\cdot\|_{C^{(j)}(a,b)} = \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ 0 \leq k \leq j}} \left| \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|$ è la “metrica C^j ” sulle funzioni su $[a, b]$.

[5] Si verifichi che la (*) e la (**) implicano l’esistenza di un’estensione f^a di f da $[-\infty, 0]$ a $[-\infty, a]$, con $a > 0$, continua nel “senso C^∞ ” (ossia tale che se f_n è una successione per cui $\|f_n\|_{C^j(-\infty, 0]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ per ogni j allora anche $\|f_n^a\|_{C^j(-\infty, a]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ per ogni j).

[6] Si faccia vedere che la costruzione precedente può essere generalizzata per mostrare l’estendibilità di una funzione C^∞ nel semispazio $z \leq 0$, e ivi a decrescita rapida con tutte le sue derivate, ad una funzione C^∞ su tutto lo spazio e nulla per $z > \varepsilon$ per un ε prefissato. L’estensione può essere fatta in modo da essere continua nel senso C^∞ (cfr 5). (Idea: basta considerare il caso in cui $f(\underline{x}, z)$ è periodica in \underline{x} con periodo arbitrario L . In questo caso la f si scrive: $f(\underline{x}, z) = \sum_{\underline{\omega}} e^{i\underline{\omega} \cdot \underline{x}} f_{\underline{\omega}}(z)$ ove $\underline{\omega} = 2\pi L^{-1}(n_1, n_2)$ con \underline{n} vettore bidimensionale a componenti intere; e si può usare la teoria dell’estensione unidimensionale precedente per estendere i coefficienti di Fourier. E poi:

$$f_{\underline{\omega}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(\underline{\omega})}{k!} z^k e^{-zc_k(\underline{\omega})^2 e^{|\underline{\omega}|}}, \quad \text{per } z \geq 0$$

ove si noti l’inserimento di $e^{|\underline{\omega}|}$ all’esponente, che serve a controllare le derivate rispetto alle \underline{x} , che introducono “solo” potenze di componenti di $\underline{\omega}$ nella serie.)

[7] Si faccia vedere che esiste una famiglia di punti \underline{x}_j e di funzioni $\chi_j^r(\underline{x})$ di classe C^∞ e nulle fuori di una sfera di raggio r e centro \underline{x}_j tali che: $\sum_j \chi_j^r(\underline{x}) \equiv 1$ e inoltre tali funzioni possono essere scelte in modo da essere identiche a meno di traslazioni, ossia tali che $\chi_j^r(\underline{x}) = \chi^r(\underline{x} - \underline{x}_j)$ per una χ^r opportuna. (Idea: si consideri una pavimentazione di R^3 in cubi semiaperti di lato $r/4$ e siano \underline{x}_j i centri di tali cubetti; sia $f_j(\underline{x})$ la funzione caratteristica del cubo di centro \underline{x}_j . Evidentemente $\sum_j f_j(\underline{x}) \equiv 1$; sia ora $\gamma(\underline{x}) \geq 0$ una funzione di classe C^∞ nulla fuori di una sferetta di raggio $r/4$ e con integrale $\int \gamma(\underline{x}) d\underline{x} = 1$. Si ponga: $\chi_j^r(\underline{x}) = \int \gamma(\underline{x} - \underline{y}) f_j(\underline{y}) d\underline{y}$ e si verifichi che queste funzioni hanno tutte le proprietà desiderate.)

[8] Si usino i problemi precedenti per far vedere che una funzione f , di classe C^∞ in un dominio Ω limitato con frontiera di classe C^∞ , si può estendere ad una funzione di classe

C^∞ su tutto lo spazio e nulla a distanza $\varepsilon > 0$ da Ω , con ε prefissato arbitrariamente, e in modo continuo nella metrica di C^p (per ogni $p \geq 0$). (*Idea:* usando la partizione dell'identità del problema precedente si riduca il problema a quello dell'estensione di una funzione su Ω nulla fuori di un piccolo intorno di un punto di frontiera; e poi si riduca il problema dell'estensione di questa funzione a quello dell'estensione di una funzione di classe C^∞ definita in un semispazio, proposto sopra.)

[9] Si mostri che esistono successioni $\{a_k\}, \{b_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, tali che per ogni $n = 0, 1, \dots$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |b_k|^n < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^n = 1, \quad -b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$$

(Idea (da [See]): si fissi $b_k = -2^k$ e si determinino i numeri X_k^N imponendo:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_k^N b_k^n = 1 \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

che può essere risolto via la regola di Cramer e le note proprietà delle matrici M (e determinanti) di Vandermonde ($M_{nk} = b_k^n$). In tal modo si trova $X_k^N = A_k B_{k,N}$ ove:

$$A_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{2^j + 1}{2^j - 2^k}, \quad B_{k,N} = \prod_{j=k+1}^{N-1} \frac{2^j + 1}{2^j - 2^k}$$

ove $A_0 = 1$, $B_{N-1,N} = 1$; e allora si verifichi che: $|A_k| \leq 2^{-(k^2-2k)/2}$, $B_{k,N} \leq e^4$. Inoltre $B_{k,N}$ cresce e quindi esiste il limite $\lim_{N \rightarrow \infty} B_{k,N} = B_k$, $1 \leq B_k \leq e^4$. E posto $a_k = B_k A_k$ si vede che le successioni a, b così costruite hanno le proprietà volute!).

[10] Sia f è una funzione definita in un semispazio $x \in R^d \times [-\infty, 0]$ e ivi C^∞ ; dimostrare che se a_k, b_k denotano le successioni del problema [9], posto:

$$f^0(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(b_k t) f(x, b_k t) \quad t > 0 \quad \text{e} \quad f^0(x, t) = f(x, t) \quad t \leq 0$$

con $\Phi \in C^\infty(R)$, $\Phi(t) \equiv 1$ per $|t| \leq 1$, e $\Phi(t) \equiv 0$ per $|t| \geq 2$, allora f^0 estende f a tutto R^{d+1} in modo lineare e continuo nella metrica di C^p (per ogni $p \geq 0$).

[11] Si consideri un dominio $\Omega \subset R^3$ regolare e si supponga che su una sfera S contenente Ω sia possibile definire un campo vettoriale $\underline{u} \neq \underline{0}$ di classe C^∞ tale che: 1) \underline{u} è ortogonale a ∂S , 2) ogni linea di flusso di \underline{u} attraversa Ω in un tratto connesso (eventualmente ridotto a un punto o all'insieme vuoto), 3) esiste una superficie Σ regolare tale che le linee di flusso di \underline{u} sono trasversali a $\Sigma \cap \Omega$ e ogni punto di Ω si trova su una di tali linee che interseca $\Sigma \cap \Omega$. Si dirà, brevemente, che Ω ha la proprietà della sezione. Si mostri che se $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$ e $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ allora esiste $\underline{A} \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\underline{u} = \text{rot } \underline{A}$. (*Idea:* la proprietà della sezione è quanto basta a ripetere l'argomento di (B).)

[12] Si dimostri che se $\Omega \subset R^3$ non è semplicemente connesso per superfici nel senso che non ogni superficie regolare chiusa contenuta in Ω può essere deformata, pur restando in Ω , con continuità in un punto allora non è in generale vero che un campo solenoidale $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$ è un rotore di un campo $\underline{A} \in C^\infty(\Omega)$. (*Idea:* sia $\Omega =$ regione compresa fra due sfere di raggi $0 < R_1 < R_2$, concentriche, si consideri il campo radiale $\underline{u} = \frac{\underline{r}}{r^3}$ generato dal potenziale coulombiano. Se fosse $\underline{u} = \text{rot } \underline{A}$ con $\underline{A} \in C^\infty(\Omega)$ si potrebbe estendere \underline{A} a tutto lo spazio lasciandolo C^∞ , e in particolare sarebbe esteso all'interno della sfera più piccola. Ma allora $0 \equiv \int_{|\underline{r}| < R_1} \underline{\partial} \cdot \underline{u} \equiv \int_{|\underline{r}| = R_1} \underline{u} \cdot \underline{n} = 4\pi$! Si osservi la generalità di questo esempio.)

[13] Sia $\Omega \subset R^3$ regolare e connesso. Si consideri lo strato di spessore ε attorno a $\partial\Omega$. È possibile stabilire, in un insieme regolare Ω_ε con frontiera a distanza $> \varepsilon/2$ da quella di

Ω , un atlante di coordinate ortogonali (x_1, x_2, x_3) tali che $\partial\Omega$ abbia equazione $x_3 = 0$ in ogni carta e che la direzione 3 coincida, in ogni punto di $\partial\Omega$, con la normale esterna a $\partial\Omega$ e coincida, in ogni punto di $\partial\Omega_\varepsilon$, con la normale esterna a $\partial\Omega_\varepsilon$. Usando questo sistema di coordinate si mostri che si può estendere un campo \underline{u} in $C^\infty(\Omega)$ e ivi solenoidale ad un campo solenoidale in $C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e parallelo, in un intorno di $\partial\Omega_\varepsilon$ alla direzione 3 del sistema di coordinate in una (qualsiasi) carta. Tale estensione può essere ottenuta estendendo u_1, u_2 arbitrariamente a funzioni di $C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ nulle in un intorno di $\partial\Omega_\varepsilon$ e poi ponendo:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2, 0) + \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{x_3} d\xi \left(-\partial_1(h_2 h_3 u_1) - \partial_2(h_1 h_3 u_2) \right)$$

se $h_1 dx_1^2 + h_2 dx_2^2 + h_3 dx_3^2$ è la metrica del sistema di coordinate considerato e se le funzioni nell'integrando sono calcolate nel punto (x_1, x_2, ξ) , mentre quelle fuori sono calcolate in (x_1, x_2, x_3) . (*Idea:* si osservi che la divergenza di un campo vettoriale di componenti u_1, u_2, u_3 in un sistema di coordinate ortogonali è esprimibile via:

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\partial_1(h_2 h_3 u_1) + \partial_2(h_1 h_3 u_2) + \partial_3(h_1 h_2 u_3) \right)$$

in termini della metrica.)

[14] Un dominio regolare semplicemente connesso $\Omega \subset R^3$ contenuto in una sfera S ha la “proprietà della normale” se è possibile definire un campo di vettori unitari di classe $C^\infty(\overline{S}/\Omega)$ che estende i vettori normali esterni a $\partial\Omega$ all'intero dominio \overline{S}/Ω terminando, sulla frontiera ∂S , nei vettori normali esterni a ∂S . Si noti che una condizione necessaria e sufficiente perchè Ω abbia questa proprietà è che ogni punto di $\partial\Omega$ sia connettibile all' ∞ a mezzo di una curva continua che non ha altri punti in Ω . E si osservi poi che condizione necessaria e sufficiente per questa ultima proprietà è che Ω sia semplicemente connesso per superfici.

[15] Se il dominio regolare connesso $\Omega \subset R^3$ ha la proprietà della normale (o di semplice connessione per superfici) allora ogni campo \underline{u} , in $C^\infty(\Omega)$ e solenoidale, è il rotore di un campo $\underline{A} \in C^\infty(\Omega)$. (*Idea:* il problema [13] riconduce al caso in cui \underline{u} sia ortogonale a $\partial\Omega$ e nelle vicinanze di $\partial\Omega$ si mantenga parallelo alla normale a $\partial\Omega$; il problema [14] invece consente poi di estendere \underline{u} da Ω a S : basta definire \underline{u} come parallelo al campo vettoriale che connette le normali esterne a $\partial\Omega$ a quelle di ∂S e di componente tale da conservare il volume (cfr l'analogia estensione discussa al punto (B)). Quindi il problema è ricondotto al caso “standard” in cui \underline{u} è in $C^\infty(S)$ e termina su ∂S normalmente a ∂S . Quest'ultimo è un caso particolare del caso trattato in (B).)

[16] Sia $\Omega \subset R^3$ una regione regolare semplicemente connessa interna ad un cubo Q_1 . Sia $Q = \cup_{j=1}^8 Q_j$ il cubo di lato L doppio del precedente e unione di 8 immagini di Q_1 ; si supponga che il centro di Q sia l'origine. Siano Ω_j , $j = 1, \dots, 8$, le “copie” di Ω negli otto cubi ($\Omega_1 \equiv \Omega$). Associamo ad ogni Q_j un segno $\sigma_j = \pm 1$ in modo che il segno di Q_1 sia + ed il segno di ogni cubo sia opposto a quello dei cubi adiacenti (ossia con una faccia in comune). Se $f \in L_2(\Omega)$ si consideri l'estensione f^e di f a $L_2(Q)$ definita ponendo $f = 0$ in Q_1/Ω e poi $f^e(x') = \sigma_j f^e(x)$ se $x' \in Q_j$ è immagine di $x \in Q_1$. Si consideri Q come un toro (ossia se ne identifichino i lati opposti) cosicchè ha senso definire la trasformata di Fourier di una funzione in $L_2(Q)$. Si dimostri che la trasformata di Fourier di f^e è una funzione $\hat{f}^e(\underline{k})$ (con $\underline{k} = \frac{2\pi}{L}\underline{n}$ per \underline{n} vettore a componenti intere) tale che $\hat{f}^e(\underline{k}) = 0$ se $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ ha una componente nulla (ossia se $k_1 k_2 k_3 = 0$). Si deduca poi che dato $p \geq 0$ e $j = 1, 2, 3$ esiste $F^{(p,j)} \in L_2(\Omega)$ tale che:

$$f = \partial_{x_j}^p F^{(p,j)}, \quad \|F^{(p,j)}\|_{L_2(\Omega)} \leq 8 \left(\frac{L}{2\pi} \right) \|f\|_{L_2(\Omega)} \quad (!)$$

ove le derivate sono nel senso delle distribuzioni in $L_2(\Omega)$. Se $f \in C_0^\infty(\Omega)$ allora $F^{(p,j)}$ può essere scelto come restrizione di una funzione in $C^\infty(Q)$. (*Idea:* si definisca $\bar{F}^{(p,j)} \in$

$L_2(Q)$ a mezzo della trasformata di Fourier di f^e : $\hat{F}^{(p,j)}(\underline{k}) = (ik_j)^{-p} \hat{f}^e(\underline{k})$ se $k_1 k_2 k_3 \neq 0$ e $\hat{F}^{(p,j)}(\underline{k}) = 0$ altrimenti. Poi si restringa la trasformata di Fourier $\hat{F}^{(p,j)}(\underline{x})$ a Ω e si verifichino le proprietà volute.)

[17] Sia $\gamma_n(\underline{x}) = e^{(\underline{x}^2 - n^{-2})^{-1}} c_n$ per $|\underline{x}| < 1/n$ e sia $\gamma_n = 0$ altrimenti. La costante c_n è tale che $\int \gamma_n \equiv 1$, ($c_n \propto n^3$). Sia $\underline{f} \in L_2(\Omega)$ e $\text{rot } \underline{f} = \underline{0}$ nel senso che per ogni $\underline{A} \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha $\int_\Omega \underline{f} \cdot \text{rot } \underline{A} = \underline{0}$. Si dimostri, (con le notazioni del problema [16] e se $*$ denota il prodotto di convoluzione nel dominio Q considerato come toro):

$$\text{i) } \int_Q \underline{f}^e \cdot \text{rot } \underline{A}^e = \underline{0}$$

$$\text{ii) se } n \text{ è abbastanza grande: } \int_Q \gamma_n * \underline{f}^e \cdot \text{rot } \underline{A}^e \equiv 8 \int_\Omega \gamma_n * \underline{f}^e \cdot \text{rot } \underline{A}^e \equiv \underline{0}$$

(abbastanza grande significa che $\frac{1}{n}$ è inferiore alla distanza fra $\partial\Omega$ ed il supporto di \underline{A})

$$\text{iii) } \text{rot } (\gamma_n * \underline{f}^e) = \underline{0}, \quad \text{in } \Omega$$

$$\text{iv) } \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n * \underline{f} = \underline{f}, \quad \text{in } L_2(\Omega).$$

[18] Nel contesto dei problemi [16],[17], sia $\vartheta(\underline{x}) \geq 0$ una funzione di classe C^∞ a supporto all' interno di $\cup_{j=1}^8 \Omega_j$ e tale che $\int_{\Omega_j} \vartheta d\underline{x} \equiv 1$. Si ponga, se $\underline{x} \in \Omega_j$:

$$\varphi_n(\underline{x}) = \int_{Q_j} d\underline{x}_0 \vartheta(\underline{x}_0) \int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}} \gamma_n * \underline{f}^e(\underline{\xi}) \cdot d\underline{\xi}$$

ove la curva da \underline{x}_0 a \underline{x} è arbitraria purchè contenuta in Ω_j , e si ponga $\varphi_n \equiv 0$ altrimenti (ossia se $\underline{x} \notin \Omega_j$). Allora:

$$\underline{\partial} \varphi_n = \gamma_n * \underline{f}^e \quad \text{in } \cup_j \Omega_j, \quad \|\varphi_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 8 \frac{L}{2\pi} \|\underline{f}\|_{L_2(\Omega)}$$

(Idea: poichè $\int_{Q_j} \vartheta = 1$ la prima relazione è ovvia dalla definizione. Per la seconda sia $b \in C_0^\infty(\Omega)$ e si osservi:

$$\int_\Omega \varphi_n b = \frac{1}{8} \int_Q \varphi_n^e b^e = \frac{1}{8} \int_Q \varphi_n^e \partial_1 B^e = -\frac{1}{8} \int_Q \gamma_n * f_1^e B^e$$

ove B è tale che $b \equiv \partial_1 B$, cfr. (!) nel problema [16]. E quindi:

$$|\int \varphi_n b| \leq \frac{L}{16\pi} \sum_{\underline{k}} \hat{\gamma}_n(\underline{k}) \hat{f}_n^e(\underline{k}) \hat{B}^e(\underline{k})$$

Ma $|\hat{\gamma}_n(\underline{k})| \leq 1$ e $\hat{\gamma}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. E allora:

$$|\int \varphi_n b| \leq \frac{L}{16\pi} \|\underline{f}^e\|_{L_2(Q)} 8 \|b\|_{L_2(\Omega)} = \frac{8L}{2\pi} \|\underline{f}\|_{L_2(\Omega)} \|b\|_{L_2(\Omega)}$$

che mostra che $\|\varphi_n\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{8L}{2\pi} \|\underline{f}\|_{L_2(\Omega)}$

[19] Sia φ_n la successione definita in [18] e $\varphi \in L_2(\Omega)$ definita da $\varphi = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}$ nel senso debole di $L_2(\Omega)$, per una opportuna sottosuccessione n_k (il che è possibile perchè il problema (17) mostra che la successione φ_n è limitata in $L_2(\Omega)$). Si mostri che φ è derivabile nel senso delle distribuzioni con derivata in $L_2(\Omega)$ e $\underline{\partial} \varphi = \underline{f}$ (e quindi la φ non dipende dalla sottosuccessione e $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ in senso debole). (Idea: sia $b \in C_0^\infty(\Omega)$ e si osservi che $\varphi_n \in C^\infty(Q)$ e:

$$\int_\Omega \varphi \partial_j b = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \varphi_n \partial_j b \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_\Omega \partial_j \varphi_n b = - \int_\Omega f_j b$$

perchè $\partial_j \varphi_n \equiv \gamma_n * f_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_j$ (cfr problema (17).)

(20) Si consideri il campo vettoriale definito nel cilindro: $0 \leq x \leq L$, $y^2 + z^2 \leq R^2$ da:

$$u_1 = v, \quad u_2 = -\omega z, \quad u_3 = \omega y$$

fissando L tale che $\omega v^{-1} L / (2\pi)$ è irrazionale. Si estenda il campo \underline{u} a $y^2 + z^2 \leq 4R^2$ rendendo v, ω funzioni di $y^2 + z^2 \equiv r^2$ e di classe C^∞ e che si annullano in un intorno del bordo esterno del cilindro (ove $y^2 + z^2 = 4R^2$). Si mostri che il campo in questione ha divergenza nulla nel cilindro. Si continui poi il campo in modo che le sue linee di flusso escano dalla faccia destra del cilindro (ove $x = L$) e rientrino nella faccia sinistra (ove $x = 0$) nel punto corrispondente alle stesse coordinate y, z , definendo \underline{u} fuori dal cilindro in modo che il flusso generato sia incomprimibile (usando la tecnica di continuazione discussa in (B)). Si dimostri che le linee di flusso di \underline{u} che escono in L nei punti di coordinate y, z tali che $y^2 + z^2 < R^2$ mantengono questa proprietà “ad ogni giro” ma non si chiudono mai. Dunque *le linee di flusso di un campo solenoidale confinato non sono necessariamente chiuse.*

Bibliografia: [So], Sect. 5,6; [CF], Sec. 1; [See].

.

§7 Legge di conservazione della vorticità per l' equazione di Eulero. Potenziali di Clebsch e forma hamiltoniana delle equazioni di Eulero. I fluidi bidimensionali.

(A) Il teorema di Thomson:

Una proprietà di grandissima importanza per i fluidi di Eulero è la legge di conservazione della vorticità. Questa legge è alla base della comprensione (assai imperfetta a tutt' oggi) della evoluzione di strutture vorticosi del tipo degli "anelli di fumo".

Consideriamo un fluido isoentropico di Eulero, non necessariamente incompressibile, e quindi con un legame fra densità ρ e pressione p dato da $\rho = R(p)$ in modo che sia definito il potenziale di pressione $\Phi(p)$, tale che $\partial\Phi = \rho^{-1}\partial p$. Supponiamo anche che la forza esterna \underline{g} sia conservativa: $\underline{g} = -\partial G$.

Sia γ un contorno che seguiamo nel tempo, $t \rightarrow \gamma(t)$, $\gamma(0) = \gamma$, nel contorno in cui γ evolve se i suoi punti seguono la corrente che passa per essi all' istante iniziale.

In formule il contorno $\gamma(t)$ ha equazioni parametriche $s \rightarrow \underline{\rho}(s, t)$ che si esprimono in termini delle equazioni $s \rightarrow \underline{\rho}(s)$ di $\gamma = \gamma(0)$ dicendo che $\underline{\rho}(s, t)$ è il valore della soluzione, all'istante t , dell' equazione:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \underline{u}(\xi, t) \\ \xi(0) = \underline{\rho}(s) \end{cases} \quad (7.1)$$

(non si confonda il vettore $\underline{\rho}$ con la densità ρ). Vale allora il *teorema di Thomson*:

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \underline{u}(\underline{\rho}, t) \cdot d\underline{\rho} = 0 \quad (7.2)$$

ossia la "vorticità" di un contorno si conserva lungo le linee di flusso.

La dimostrazione della (7.2) è semplice; la equazione di $\gamma(t)$ è:

$$s \rightarrow \underline{\rho}(s) + \underline{u}(\underline{\rho}(s), 0)t = \underline{\rho}' \quad (7.3)$$

per cui, a meno di $O(t^2)$:

$$d\underline{\rho}' = d\underline{\rho} + t \partial_t \underline{u}(\underline{\rho}, 0) d\underline{\rho} + O(t^2) \quad (7.4)$$

e, a meno di $O(t^2)$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(t)} \underline{u}(\underline{\rho}', t) \cdot d\underline{\rho}' &= \int_{\gamma} (\underline{u}(\underline{\rho}, 0) + t \underline{u}(\underline{\rho}, 0) \cdot \partial_t \underline{u}(\underline{\rho}, 0) + t \partial_t \underline{u}(\underline{\rho}, 0)) \cdot \\ &\cdot (d\underline{\rho} + t \partial_t \underline{u}(\underline{\rho}, 0)) \cdot d\underline{\rho} = \int_{\gamma} \underline{u} \cdot d\underline{\rho} + t \int_{\gamma} (\underline{u} \cdot \partial_t \underline{u} d\underline{\rho} + \partial_t \underline{u} d\underline{\rho} + \underline{u} \cdot \partial_t \underline{u} d\underline{\rho}) = \\ &= \int_{\gamma} \underline{u} \cdot d\underline{\rho} + t \int_{\gamma} (-\partial(\Phi + G) + \frac{\underline{u}^2}{2}) d\underline{\rho} = \int_{\gamma} \underline{u} \cdot d\underline{\rho} \end{aligned} \quad (7.5)$$

che mostra la (7.2). Se \underline{g} non è conservativa il secondo membro della (7.2) diviene $\int_{\gamma} \underline{g} \cdot d\underline{\rho}$.

(B) *Flussi irrotazionali isoentropici:*

Una immediata conseguenza è che, se per $t = 0$ $\text{rot } \underline{u} = 0$ e la forza esterna \underline{g} è conservativa, allora $\text{rot } \underline{u}$ deve restare nulla in tutti gli istanti successivi: invero se γ è un contorno infinitesimo su cui si appoggia una superficie $d\sigma$ di normale \underline{n} si avrà:

$$7.6 \quad \int_{\gamma} \underline{u} \cdot d\underline{\rho} \equiv \text{rot } \underline{u} \cdot \underline{n} d\sigma \quad (7.6)$$

e allora l'arbitrarietà di $d\sigma$ e \underline{n} e l'invarianza della vorticità dicono appunto che $\text{rot } \underline{u} \equiv 0$ a tutti i tempi $t > 0$.

Per questo motivo, nel caso di flussi isoentropici o più in generale tali che la densità è una funzione della pressione, possono esistere flussi “irrotazionali” o “potenziali” e sono anzi molto interessanti per la loro semplicità che permette di descriverli (in domini semplicemente connessi) in termini di una funzione $\varphi(\xi, t)$ scalare, “potenziale di velocità” come $\underline{u} = \underline{\partial}\varphi$.

Una semplice proprietà di questi flussi è che, eventualmente alterando la funzione potenziale φ per una opportuna funzione del solo tempo, si deve avere:

$$7.7 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\underline{u}^2}{2} + \Phi(p) + G = 0 \quad (7.7)$$

ove G è l'energia potenziale del campo delle forze di volume (supposto conservativo) e $\Phi(p)$ è il potenziale di pressione. Ad esempio nel caso di fluido incompressibile in campo di gravità si avrà $\Phi(p) + G = \frac{1}{\rho}p + gz$.

Infatti dalla equazione della quantità di moto:

$$7.8 \quad \underline{\partial}\partial_t\varphi + \underline{u} \cdot \underline{\partial}\underline{u} + \underline{\partial}(\Phi + G) = 0 \quad (7.8)$$

ma $\underline{u} \cdot \underline{\partial}\underline{u} = \frac{1}{2}\underline{\partial}u^2 - \underline{u} \wedge (\text{rot } \underline{u})$ e quindi la (7.8) esprime che il gradiente della (7.7) è nullo e cioè il membro di sinistra può essere solo una funzione del tempo che, cambiando φ per una funzione additiva del solo tempo, può essere posta uguale a zero.

Si noti la relazione fra la (7.8) ed il teorema di Bernoulli, c.f.r. (4.30): se il moto è statico (ossia \underline{u} è indipendente dal tempo) allora φ può essere scelto indipendente dal tempo e la (7.8) dice che:

$$7.9 \quad \frac{\underline{u}^2}{2} + \Phi(p) + G = \text{costante} \quad (7.9)$$

Quindi la quantità di sinistra in (7.9) che nei flussi statici è *costante lungo le linee di corrente* è, nei flussi statici irrotazionali, *costante in tutto il fluido*.

È però importante aver presente che i flussi irrotazionali *regolari* (ossia di classe C^∞) non sono possibili in fluidi incomprimibili ideali in contenitori finiti anche se semplicemente connessi. Semplicemente perchè in questi casi il campo di velocità sarebbe un campo gradiente $\underline{u} = \underline{\partial}\varphi$, ove φ è un' opportuna funzione scalare *armonica*. Al bordo del contenitore la velocità dovrà essere tangente e quindi la derivata normale di φ deve essere nulla. Dalla unicità delle soluzioni del problema di Neumann si vede che l' unica funzione armonica φ il cui gradiente ha questa proprietà è la funzione costante corrispondente al campo di velocità $\underline{u} = \underline{0}$.

Dunque moti irrotazionali incomprimibili saranno possibili, eventualmente, in domini infiniti o saranno campi singolari in qualche punto. Sono anche possibili in fluidi che hanno una superficie libera, ossia che occupano una regione che dipende dal tempo, casi in cui la condizione al bordo sul pelo libero *non* è di Meumann, si veda (F).

(C) *Equazione euleriana della vorticità in generale e i fluidi bidimensionali*

Quanto detto finora è, strettamente parlando, valido solo se $d = 3$: in $d = 2$ non ha senso infatti il rot \underline{u} .

Però è possibile sempre immaginare che un fluido bidimensionale sia in realtà un fluido tridimensionale osservato sul piano $z = 0$. Basterà allo scopo definire il campo di velocità $\underline{u}(x, y, z) \equiv (\underline{u}(x, y), 0)$ per ogni z e i campi termodinamici semplicemente come definiti ovunque e indipendenti da z . Chiameremo questo fluido "l' estensione 3-dimensionale" di un fluido bidimensionale.

Si vede subito che le estensioni tridimensionali di soluzioni di equazioni di Eulero, NS e NSF bidimensionali soddisfano le corrispondenti equazioni tridimensionali. E quindi valgono per esse le considerazioni sulla vorticità sopra svolte.

Il rotore del campo bidimensionale $\underline{u} = (u_1, u_2)$ pensato esteso a tre dimensioni è il rotore di $(u_1, u_2, 0)$ e quindi è il vettore:

$$(0, 0, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) \quad (7.10)$$

Quindi si dice spesso che *nei fluidi bidimensionali il rotore del campo di velocità $\underline{u} = (u_1, u_2)$ è uno scalare ζ* :

$$\zeta = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \quad (7.11)$$

Si noti anche che un campo \underline{u} bidimensionale a divergenza nulla, che a $d = 3$ si rappresenta con $\underline{u} = \text{rot } \underline{A}$, a $d = 2$ si rappresenta invece come:

$$\underline{u} = \underline{\partial}^\perp A, \quad A \text{ scalare}, \quad \underline{\partial}^\perp = (\partial_2, -\partial_1) \quad (7.12)$$

Questo lo si può vedere ripercorrendo gli argomenti usati nel precedente paragrafo sulle rappresentazioni dei campi di velocità.

Volendo porre in forma più analitica alcune delle proprietà discusse sopra si può osservare che la vorticità evolve secondo un' equazione ottenuta

applicando l' operatore rotore alla equazione della quantità di moto: $\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\underline{\partial}(\Phi + G)$. Si trova, usando $\frac{1}{2} \underline{\partial} \underline{u}^2 = \underline{u} \wedge \text{rot } \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}$ e ponendo $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$, l' *equazione euleriana della vorticità*:

$$\begin{aligned} \partial_t \text{rot } \underline{u} - \text{rot } (\underline{u} \wedge \text{rot } \underline{u}) &= \underline{0}, & \text{ossia :} \\ \partial_t \underline{\omega} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{\omega} &= \underline{\omega} \cdot \underline{\partial} \underline{u} \end{aligned} \quad (7.13)$$

ove si è fatto uso dell' identità $\text{rot } (\underline{a} \wedge \underline{b}) = \underline{b} \cdot \underline{\partial} \underline{a} - \underline{a} \cdot \underline{\partial} \underline{b}$ se $\underline{\partial} \cdot \underline{a} = \underline{\partial} \cdot \underline{b} = 0$. Ciò mostra ancora come $\text{rot } \underline{u} = \underline{0}$ sia possibile, se vera all' istante $t = 0$, ossia mostra la possibilità di flussi “irrotazionali”.

Nel caso $d = 2$ incomprimibile la (7.13) si semplifica notevolmente, la vorticità essendo ora scalare, e diviene, *c.f.r.* (7.10), (7.11):

$$\partial_t \zeta + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \zeta = 0 \quad (7.14)$$

che, appunto, dice che la vorticità si conserva lungo le linee di corrente.

Questo dá luogo, nel caso $d = 2$, e per un fluido isoentropico di Eulero chiuso in un volume Ω con condizioni al contorno $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ (cioè chiuso in un volume Ω indipendente dal tempo) alla esistenza di un integrale primo:

$$E(\zeta) = \int_{\Omega} \zeta(\xi)^2 d\xi \quad (7.15)$$

detto *enstrofia*. Anzi qualunque funzione f genera, via la:

$$F(\zeta) = \int_{\Omega} f(\zeta(\xi)) d\xi \quad (7.16)$$

un integrale primo per le equazioni di Eulero isoentropiche.

È chiaro che invece che equazioni isoentropiche si possono considerare equazioni in cui il legame fra p e ρ è fissato: l'unica proprietà davvero usata è stata che $\rho^{-1} \underline{\partial} p = \underline{\partial} \Phi$ per qualche Φ .

In particolare quanto detto sopra si applica anche ai flussi incomprimibili.

(D): *forma hamiltoniana delle equazioni di Eulero incomprimibili, e potenziali di Clebsch. Campi di velocità normali.*

Per mettere in risalto la struttura hamiltoniana delle equazioni di Eulero si introducono i “potenziali di Clebsch”, denotati (p, q) , *c.f.r.* [La], §167, p. 248, come funzioni in $C^\infty(R^3)$ e si costruisce il campo di velocità incomprimibile:

$$\underline{u} \stackrel{def}{=} q \underline{\partial} p - \underline{\partial} \gamma, \quad \gamma \stackrel{def}{=} \Delta^{-1} \underline{\partial} \cdot (q \underline{\partial} p) \quad (7.17)$$

Si definisce poscia:

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \int \underline{u}^2 d\underline{x} \equiv \frac{1}{2} \int (q \underline{\partial} p - \underline{\partial} \Delta^{-1} \underline{\partial} (q \underline{\partial} p))^2 d\underline{x} \quad (7.18)$$

e, denotando con $\delta F / \delta f(x)$ la *derivata funzionale* di una generica funzione F di f , si calcolano le equazioni del moto hamiltoniane:

$$7.19 \quad \dot{p} = -\frac{\delta H}{\delta q(x)} = -\underline{u} \cdot \underline{\partial} p, \quad \dot{q} = \frac{\delta H}{\delta p(x)} = -\underline{u} \cdot \underline{\partial} q \quad (7.19)$$

che si vedono subito se, nel calcolare le derivate funzionali, si usa che \underline{u} ha divergenza nulla e quindi γ “non contribuisce” all’ equazione funzionale.¹ Calcoliamo ora $\dot{\underline{u}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{u}} &= \dot{q} \underline{\partial} p + q \underline{\partial} \dot{p} - \underline{\partial} \dot{\gamma} = \\ &= -\underline{u} \cdot (\underline{\partial} q)(\underline{\partial} p) - q \underline{\partial} (\underline{u} \cdot \underline{\partial} p) - \underline{\partial} \dot{\gamma} = \\ &= -\underline{u} \cdot \underline{\partial} (q \underline{\partial} p) + \underline{u} \cdot (q \underline{\partial} \underline{\partial} p) - q(\underline{\partial} \underline{u}) \cdot \underline{\partial} p - q \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{\partial} p - \underline{\partial} \dot{\gamma} \\ 7.20 \quad &= -\underline{u} \cdot \underline{\partial} (q \underline{\partial} p - \underline{\partial} \gamma) - \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{\partial} \gamma - \frac{1}{2} \underline{\partial} \underline{u}^2 - (\underline{\partial} \underline{u}) \cdot (\underline{\partial} \gamma) - \underline{\partial} \dot{\gamma} = \quad (7.20) \\ &= -\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{\partial} \gamma - \frac{1}{2} \underline{\partial} \underline{u}^2 - \underline{\partial} (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \gamma) + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{\partial} \gamma - \underline{\partial} \dot{\gamma} \\ &= -\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} - \underline{\partial} \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \gamma + \dot{\gamma} \right) \end{aligned}$$

Così si vede che \underline{u} , definita in (7.17) verifica la equazione di Eulero incomprimibile e la pressione π si scrive:

$$7.21 \quad \frac{1}{\rho} \pi = \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \gamma + \dot{\gamma}, \quad \text{con} \quad \gamma = \Delta^{-1} \underline{\partial} \cdot (q \underline{\partial} p) \quad \text{e} \quad (7.21)$$

$$\dot{\gamma} = \Delta^{-1} \underline{\partial} \cdot (- (\underline{u} \cdot \underline{\partial} q) \underline{\partial} p - q \underline{\partial} (\underline{u} \cdot \underline{\partial} p))$$

In conclusione le equazioni di Eulero incomprimibili possono essere rappresentate in forma hamiltoniana e i potenziali di Clebsch sono le coordinate canoniche coniugate.

Vediamo ora quale sia la generalità della rappresentazione (7.17). L’ osservazione chiave è che, se \underline{u} è dato da (7.17) allora $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$ è dato da:

$$7.22 \quad \underline{\omega} \equiv \text{rot } \underline{u} = \underline{\partial} q \wedge \underline{\partial} p \quad (7.22)$$

che mostra che le linee di flusso di $\underline{\omega}$ sono perpendicolari sia a $\underline{\partial} p$ che a $\underline{\partial} q$ e quindi sono le intersezioni delle superfici di livello di q e p . Questo suggerisce la seguente proposizione:

Proposizione: un campo di velocità incomprimibile mai nullo in una regione Ω semplicemente connessa ammette una rappresentazione in termini di

¹ invero $\dot{p}(\underline{x}) = - \int \underline{u}(\underline{y}) \cdot (\delta(\underline{x} - \underline{y}) \underline{\partial}_{\underline{y}} p(\underline{y}) - \underline{\partial}_{\underline{y}} \frac{\delta \gamma}{\delta q(\underline{x})}) d\underline{y} \equiv -\underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{\partial} p(\underline{x})$ e, similmente, $\dot{q}(\underline{x}) = \int \underline{u}(\underline{y}) \cdot q(\underline{y}) \underline{\partial}_{\underline{y}} (\delta(\underline{x} - \underline{y}) - \frac{\delta \gamma}{\delta p(\underline{x})}) \equiv -\underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{\partial} q(\underline{x})$.

potenziali di Clebsch se e solo se esistono due funzioni regolari α, β tali che le linee di flusso della vorticità, all' interno di Ω , possono essere scritte nella forma: $\alpha(x, y, z) = a, \beta(x, y, z) = b$ al variare delle costanti a e b in un dominio D .

Osservazioni:

- (1) un "dominio" è qui un insieme in cui ogni punto è punto di accumulazione di punti interni.
- (2) la proposizione in questione vale qualsiasi sia Ω : quindi, in particolare, per regioni Ω molto piccole in cui $\underline{\omega} \neq \underline{0}$: in tali regioni le linee di vorticità sono essenzialmente parallele e quindi soddisfano banalmente alle ipotesi del teorema. Ne segue che *localmente* è sempre possibile rappresentare un campo di velocità a mezzo di potenziali p, q, γ di Clebsch (e la rappresentazione non è affatto univoca, come vedremo).

dim: la osservazione in (7.22) mostra la necessità. Viceversa se (α, β) sono due funzioni le cui superfici di livello si intersecano in linee di flusso di $\underline{\omega}$ si dovrà avere:

$$7.23 \quad \underline{\omega} = \lambda \underline{\partial} \alpha \wedge \underline{\partial} \beta \quad (7.23)$$

per una opportuna λ , *funzione di* α, β . La (7.23), infatti, esprime semplicemente che le linee con tangente $\underline{\omega}$ sono parallele alle intersezioni delle superfici di livello; inoltre λ è *costante* lungo la curva individuata da valori fissati di α e β perchè $\underline{\omega}$ ha divergenza nulla e quindi $\underline{\partial} \cdot \underline{\omega} = \underline{\partial} \lambda \cdot \underline{\partial} \alpha \wedge \underline{\partial} \beta = 0$ e cioè λ ha derivata nulla nella direzione di $\underline{\omega}$.²

Quindi se (q, p) vengono definiti in funzione di α, β in modo che:

$$7.24 \quad \frac{\partial(q, p)}{\partial(\alpha, \beta)} \equiv \partial_\alpha q \partial_\beta p - \partial_\beta q \partial_\alpha p = \lambda(\alpha, \beta) \quad (7.24)$$

otteniamo due potenziali (q, p) che, pensati come funzioni di (x, y, z) (via la dipendenza di (α, β) da (x, y, z)) sono per definizione tali che $\text{rot}(q \underline{\partial} p - p \underline{\partial} q) \equiv \text{rot}(q \underline{\partial} p) - \underline{\omega} = \underline{0}$: ossia esiste γ tale che $\underline{u} = q \underline{\partial} p - p \underline{\partial} q$, per la semplice connessione di Ω .

Ma la (7.24) è sempre facilmente risolvibile, ed in molti modi; ad esempio si può fissare $p = \beta$ e dedurre:

$$7.25 \quad p = \beta, \quad q = \int_{\alpha_0(\beta)}^{\alpha} \lambda(\alpha', \beta) d\alpha' \quad (7.25)$$

ove $\alpha_0(\beta)$ è una funzione arbitraria (ma ovviamente tale che esista almeno un punto $(a, b) \in D$ tale che $a = \alpha_0(b)$) che ci danno p, q come funzioni di α, β e quindi tramite queste in funzione di (x, y, z) .

È facile vedere che esistono campi di velocità la cui vorticità *non può essere* globalmente descritta in termini di potenziali q, p . Un semplice

² Si può anche vederlo notando che il flusso di $\underline{\omega}$ sulla base del cilindro di linee di flusso di $\underline{\omega}$ con base fra le superfici su cui α varia di $d\alpha$ e β di $d\beta$ è $\lambda d\alpha d\beta$ e quindi λ deve essere costante in questo cilindro perchè $\underline{\omega}$ ha divergenza nulla.

esempio è fornito dal campo di velocità costruito nel problema [20] del §6, pensato però come campo di vorticità di un opportuno campo di velocità. Poichè le linee di flusso riempiono densamente una superficie bidimensionale (la superficie cilindrica $0 \leq x \leq L$ e $y^2 + z^2 = r^2$, se $r < R$), è chiaro che le linee di flusso distinte su questa superficie non possono essere intersezioni di due superfici di livello regolari. Inoltre l' esempio del problema [20], §6, può essere modificato in modo che le linee di flusso riempiano densamente addirittura una regione tridimensionale (cfr. problemi).

Si pone allora la seguente definizione:

Definizione: la classe dei campi di velocità incomprimibili definiti in un contenitore Ω che ammettono una rappresentazione di Clebsch, (7.17), in termini di due potenziali q, p di classe C^∞ (e del terzo potenziale γ , che però è in generale determinato risolvendo un problema di Neumann in Ω), si dice la classe dei campi solenoidali normali in Ω .

Un' analisi del problema [20], §6, mostra che è “ragionevole” che “i campi normali di velocità siano densi nello spazio di tutti i campi solenoidali”, ove denso va inteso in un senso da determinarsi.

La classe dei campi normali va pensata intuitivamente come costituita dai campi le cui linee di vorticità sono o chiuse o partono e arrivano alla frontiera di Ω (ossia all' ∞ nel caso che Ω sia tutto lo spazio), ovvero siano sempre (chiuse nel caso di condizioni al bordo periodiche in una regione parallelepipedica).

L' interesse della nozione di campo normale di velocità non sta tanto nella densità di tali campi in tutti i campi (e cioè nella approssimabilità di qualsiasi campo solenoidale con un campo a linee di flusso chiuse o che tendono all' ∞) bensì sta nella proprietà di invarianza di questi campi. Se il campo iniziale è normale allora si evolve per l' equazione di Eulero in un campo di velocità ancora normale e, per di più, le equazioni di evoluzione per tali campi hanno forma hamiltoniana, ammesso naturalmente che la soluzione in questione sia regolare, ossia almeno di classe C^2 (perchè tutte le operazioni di derivazione considerate su $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$ siano lecite) e si annulli all' ∞ abbastanza velocemente. È questo il contenuto dell' analisi appena svolta (Clebsch-Stuart).

Ovviamente sarà interessante porre il problema della scrittura in forma hamiltoniana delle equazioni di evoluzione di un campo di velocità più generale di quelli normali. Una tale rappresentazione è in realtà possibile: ma ha il difetto di porre le equazioni in forma hamiltoniana in uno spazio delle fasi che descrive moti molto più generali di quelli incomprimibili. I moti incomprimibili (euleriani) appaiono come una classe invariante di moti immersi in uno spazio delle fasi in cui ha luogo una evoluzione hamiltoniana abbastanza strana che, sulla classe dei moti incomprimibili, si riduce alla evoluzione euleriana.

L' interesse della rappresentazione hamiltoniana di Clebsch-Stuart sta nel fatto che, pur descrivendo solo i moti di una famiglia “densa” di campi di velocità, li descrive con coordinate *globalmente* definite p, q ed indipendenti fra loro. Invece nelle rappresentazioni hamiltoniane alternative per il moto

incomprimibile generale le coordinate canoniche non sono indipendenti fra loro se si vuole con esse descrivere il moto di un campo euleriano, ma devono sussistere fra di esse alcune relazioni (che hanno appunto la funzione di consentirne la interpretazione di coordinate descriventi un campo di velocità incomprimibile). Si vedano i problemi per una analisi di una tale rappresentazione.

(E): *Forma lagrangiana delle equazioni di Eulero incompressibili. Forma hamiltoniana sul gruppo dei diffeomorfismi*

I potenziali di Clebsch, pur interessanti perchè ad esempio fanno vedere che anche le equazioni di Eulero a 3 dimensioni hanno infinite costanti del moto (sono le quantità della forma (7.16) con ζ sostituito da p o q). Tuttavia il loro significato meccanico non è chiarissimo e ciò ne rende difficoltoso l'impiego.

Possiamo chiederci se siano possibili rappresentazioni più facilmente interpretabili. Invero un fluido è descritto in modo naturale in termini delle variabili $\underline{\delta}(\underline{x})$ che danno lo spostamento delle particelle di fluido rispetto ad una configurazione di riferimento in cui esse occupano posizione \underline{x} con densità uniforme ρ_0 .

Viene allora spontaneo definire un fluido perfetto *incoerente* come il sistema meccanico di lagrangiana:

$$7.26 \quad \mathcal{L}(\underline{\delta}, \dot{\underline{\delta}}) = \int \frac{\rho_0}{2} \dot{\underline{\delta}}^2(\underline{x}) d^3 \underline{x} \quad (7.26)$$

con equazioni di moto determinate dal principio d' azione. Ossia: $\rho_0 \frac{d}{dt} \dot{\underline{\delta}} = \underline{0}$, che sono le equazioni di moto di un fluido totalmente incoerente.

Il fluido ideale incompressibile dovrebbe poter esser definito, formalmente e alternativamente rispetto al punto di vista del §1, come un fluido incoerente cui venga imposto il vincolo ideale di incompressibilità.

Denotando $\frac{\delta F}{\delta f(x)}$ la derivata funzionale di un generico funzionale F di f , si osserva che il determinante della matrice jacobiana $J = \frac{\partial \delta}{\partial \underline{x}}$ della trasformazione $\underline{x} \rightarrow \underline{\delta}(\underline{x})$ è $\det J = \underline{\partial} \delta_1 \wedge \underline{\partial} \delta_2 \cdot \underline{\partial} \delta_3$. Allora il principio di azione applicato alla lagrangiana (7.26) con il vincolo che $\det J = 1$ conduce immediatamente all' equazione:

$$7.27 \quad \rho_0 \frac{d}{dt} \dot{\underline{\delta}}_k = \frac{\delta}{\delta \delta_k(\underline{x})} \int Q(\underline{x}) \det J(\underline{\delta}) \equiv -\varepsilon_{kij} (\underline{\partial} \delta_i \wedge \underline{\partial} \delta_j) \cdot \underline{\partial} Q \quad (7.27)$$

ove Q è il moltiplicatore di Lagrange necessario per imporre il vincolo e da determinare in base al requisito che $\det J = 1$.

Ricordando le formule di inversione delle matrici la (7.27) si riscrive:

$$7.28 \quad \rho_0 \frac{d}{dt} \dot{\underline{\delta}} = -(\det J) J^{-1} \underline{\partial} Q \equiv -\det J \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial \underline{\delta}} \underline{\partial} Q \quad (7.28)$$

Se $\underline{\delta} = \underline{\delta}(\underline{x})$, posto $\underline{u}(\underline{\delta}) = \dot{\underline{\delta}}(\underline{x})$, $\rho = \rho_0 / \det J$ e $p(\underline{\delta}) = Q(\underline{x})$ e cambiando variabile da \underline{x} a $\underline{\delta}$ in (7.28) troviamo:

$$7.29 \quad \frac{d}{dt} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p \quad (7.29)$$

in cui ora la variabile spaziale indipendente è $\underline{\delta}$ che, essendo muta, può essere ribattezzata \underline{x} portando quindi, effettivamente, alle equazioni di

Eulero incomprimibili perchè p dovrà essere determinato imponendo l' incomprimibilità che nelle nuove variabili è $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$, purchè il dato iniziale \underline{u} abbia effettivamente $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$. Cioè $p = -\Delta^{-1} \underline{\partial}(\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u})$.

Naturalmente $\dot{\underline{\delta}}(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{\delta}(\underline{x}))$ è l' equazione di evoluzione per $\underline{\delta}$ che però *si disaccoppia* dalla (7.29) nel senso che nella (7.29) non appare più $\underline{\delta}$ perchè è una variabile muta che può ugualmente essere chiamata \underline{x} .

Dalla forma lagrangiana delle equazioni del moto si può passare alla forma hamiltoniana. Basterà considerare la lagrangiana:

$$7.30 \quad \mathcal{L}_i(\dot{\underline{\delta}}, \underline{\delta}) = \int \frac{\rho_0}{2} \dot{\underline{\delta}}(\underline{x})^2 d^3 \underline{x} - \int [\Delta^{-1} \underline{\partial}(\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u})] (\det J(\underline{\delta}) - 1) d\underline{x} \quad (7.30)$$

ove $J(\underline{\delta}) = \partial \underline{\delta} / \partial \underline{x}$ e inoltre l' espressione in parentesi quadra va calcolata *pensando \underline{u} come funzione di $\underline{\delta}$* (ossia $\underline{u} = \dot{\underline{\delta}}(\underline{x}(\underline{\delta}))$ con $\underline{x}(\underline{\delta})$ funzione inversa di $\underline{\delta}(\underline{x})$) e *immaginando che gli operatori di derivazione e Δ operino sulle variabili $\underline{\delta}$ come variabili indipendenti che alla fine vanno poste uguali a $\underline{\delta}(\underline{x})$.*

In altre parole si riconosce nella parentesi quadra il valore del moltiplicatore Q prima introdotto, il che rende le affermazioni appena fatte conseguenza formale della forma lagrangiana delle equazioni di Eulero sopra dedotta.

Le equazioni che risultano per $\underline{p}(\underline{x}) = \frac{\delta \mathcal{L}_i}{\delta \dot{\underline{\delta}}(\underline{x})}$ e $\underline{q}(\underline{x}) = \underline{\delta}(\underline{x})$ sono equazioni hamiltoniane per le quali, in conseguenza di quanto sopra, dati iniziali “incomprimibili”, ossia con \underline{u} a divergenza nulla e $\det J = 1$ evolvono in dati con \underline{u} a divergenza nulla e $\det J = 1$. Dunque Le equazioni di Eulero descrivono una classe particolare di moti di un sistema hamiltoniano che genera l' evoluzione della famiglia delle trasformazioni $\underline{x} \rightarrow \underline{\delta}(\underline{x})$ di R^3 in se: precisamente la classe dei moti ideali incomprimibili.

Si noti che, come segue dalla (7.30), sui dati “incomprimibili” si avrà $\underline{p}(\underline{x}) = \rho_0 \dot{\underline{\delta}}(\underline{x}) = \rho_0 \underline{u}(\underline{\delta}(\underline{x}))$ e, ovviamente, $\underline{q}(\underline{x}) = \underline{\delta}(\underline{x})$, mentre se il dato \underline{u} non è incomprimibile l' evoluzione generata da (7.30) *non è* l' evoluzione euleriana: cioè le equazioni del moto di (7.30) sono corrette (ossia sono equivalenti alle equazioni di Eulero) solo sui moti incomprimibili.

Procedendo formalmente (su una strada che è un problema aperto percorrere in modo matematicamente rigoroso) si può infine verificare che la “superficie” \mathcal{S} delle trasformazioni incomprimibili di R^3 è tale che la restrizione allo spazio delle fasi \mathcal{S} di questi moti hamiltoniani è una famiglia di moti su $\mathcal{S} \times \mathcal{T}(\mathcal{S})$ (cioè allo spazio delle coppie di punti $\underline{\delta} \in \mathcal{S}$ e dei vettori cotangenti $\dot{\underline{\delta}}$ ad esso) anch' essi hamiltoniani. Si vede anche dalla (7.30) che la hamiltoniana sarà quadratica in \underline{p} (perchè la (7.30) è quadratica nelle $\dot{\underline{\delta}}$ e, *sulla superficie \mathcal{S}* , $\underline{p} = \rho_0 \dot{\underline{\delta}}(\underline{\delta})$) ossia $H(\underline{p}, \underline{q}) = \frac{1}{2}(\underline{p}, G(\underline{q})\underline{p})$ con G opportuno operatore sullo spazio delle trasformazioni incomprimibili.

La superficie \mathcal{S} può infine essere evidentemente vista come un *gruppo di trasformazioni* (il gruppo dei diffeomorfismi di R^3 in se che conservano il volume) e Arnold ha mostrato che la G ha allora l' interpretazione di metrica sul gruppo \mathcal{S} invariante (a sinistra), e quindi i moti euleriani possono essere pensati come moti geodetici su \mathcal{S} , [A].

(F): forma hamiltoniana delle equazioni di Eulero in moto potenziale; esempio del caso bidimensionale. ■

È difficile trovare applicazioni concrete dei potenziali di Clebsch, o anche della interpretazione lagrangiana o hamiltoniana data in (E) alle equazioni di Eulero. Ciononostante in casi particolari la natura hamiltoniana delle equazioni di Eulero emerge in altre forme e a volte può essere assai utile dal punto di vista applicativo.

Inoltre esiste una classe vasta ed importante che non può evidentemente essere studiata a mezzo di potenziali di Clebsch: sono i flussi irrotazionali (ossia “potenziali”) incomprimibili in domini con “frontiera libera” che rappresentano moti di fluidi a contatto con un gas e sottoposti alla forza di gravità.

Diamo come esempio una notevolissima applicazione ai moti bidimensionali. E precisamente alla teoria delle onde non vorticose (ossia in moto potenziale) in $d = 2$. ■

Si considera il piano x, z e su di esso un fluido la cui superficie libera ha equazione $z = \zeta(x)$. Sia \underline{u} un campo di velocità che descrive il moto del fluido che supporremo ideale e incomprimibile. Il sistema evolve via le equazioni di Eulero e in un campo di forza (conservativo) diretto verso $z < 0$ e costante di intensità g : “gravità”.

La prima relazione che cercheremo è la *condizione al bordo* sul pelo libero del fluido. È chiaro che se $\underline{u}(x, \zeta(x, t), t) = \underline{u}$ è la velocità di un punto che all'istante t è in $(x, \zeta(x, t)) = (x, \zeta)$ allora all'istante $t + dt$ il punto si troverà in $(x + u_x dt, \zeta + u_z dt)$ e quindi affinché il fluido resti connesso occorre che questo punto coincida con $\zeta(x + u_x dt, t + dt)$, a meno di $O(dt^2)$.

Quindi si trova la condizione al bordo in $(x, \zeta(x, t))$:

$$7.31 \quad -\partial_x \zeta u_x + u_z = \partial_t \zeta \quad \longleftrightarrow \quad \underline{n} \cdot \underline{\partial} \varphi(x, \zeta(x, t)) = \frac{\dot{\zeta}(x)}{(1 + \zeta'(x)^2)^{1/2}} \quad (7.31)$$

$\underline{n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (-\zeta'(x), 1)/(1 + \zeta'(x)^2)^{1/2}$ è la normale esterna al dominio degli (x, z) con $z < \zeta(x)$, che va corredata di una condizione di costanza della pressione sul pelo libero, che sceglieremo come $p = 0$, imponendo dunque che la $\partial_t \varphi + g\zeta + \frac{1}{2}(\underline{\partial} \varphi)^2 = 0$, c.f.r. (7.7).

Poniamo ora le equazioni in forma hamiltoniana: basta osservare che essendo il moto ideale le equazioni del moto devono seguire dal principio d'azione. Restringeremo l'analisi ai soli moti dotati di periodicità orizzontale su una lunghezza L , un'ipotesi di semplicità. Dunque il dominio D in cui considereremo il fluido è $D = \{(x, z) | x \in [0, L], z \in (-\infty, \zeta(x))\}$. In D il campo di velocità sarà $\underline{u} = \underline{\partial} \varphi$ con φ soluzione di entrambe le equazioni

(“problemi di Dirichlet e di Neumann”, rispettivamente):

$$7.32 \quad \begin{aligned} \Delta\varphi = 0 \quad & \text{in } D, & \Delta\varphi = 0 \quad & \text{in } D \\ \varphi = \varphi(x, \zeta(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x) & \quad \text{or} \quad \underline{n} \cdot \underline{\partial}\varphi = \frac{\dot{\zeta}}{(1 + \zeta'(x))^{1/2}} \end{aligned} \quad (7.32)$$

ove $\zeta'(x) = \frac{d\zeta}{dx}(x)$, e la prima definisce ψ e la seconda coincide con le (7.31).

L' energia potenziale sarà evidentemente infinita. Ma quel che conta sono le variazioni di energia che invece sono finite perchè l' energia è formalmente data dall' integrale $\rho \int_0^L dx \int_{-\infty}^{\zeta(x)} dz g z$ e quindi le sue variazioni sono quelle di $\rho \int_m^L dx \frac{1}{2} g \zeta(x)^2$ ove m è una qualsiasi quantità minore del minimo di $\zeta(x)$.

L' energia cinetica invece sarà $\rho \int_0^L dx \int_{-\infty}^{\zeta(x)} dz |\underline{\partial}\varphi(x, z)|^2$. Si vede allora che lo stato del sistema è determinato semplicemente dalle due funzioni $\zeta(x)$ e $\pi(x) = \rho\varphi(x, \zeta(x))$ periodiche con periodo L (per la restrizione di periodicità).

Vediamo che la differenza delle energie cinetica e potenziale è:

$$7.33 \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\rho}{2} \int_0^L \int_{-\infty}^{\zeta(x)} (\underline{\partial}\varphi)^2 dx dz - \frac{\rho}{2} \int_0^L g \zeta(x)^2 dx = \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^L (\psi(x) \frac{\dot{\zeta}(x)}{(1 + \zeta'(x))^{1/2}} ds - g \zeta(x)^2 dx) \end{aligned} \quad (7.33)$$

integrando per parti e facendo uso delle (7.31), (7.32)); qui si è posto $ds \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \zeta'(x)^2)^{1/2} dx$.

Per la linearità delle (7.32) è chiaro che ψ è lineare in $\dot{\zeta}(x)/(1 + \zeta'(x))^{1/2}$: ossia $\psi = M\dot{\zeta}/(1 + (\zeta')^2)^{1/2}$ ove M è un operatore lineare (che dipende da $\zeta(x)$, ossia dalla forma di D).

In generale se φ, ψ sono due funzioni armoniche in D con rispettivi valori “di Dirichlet” φ, ψ sul bordo, ∂D , e con rispettivi valori di “Neumann” sul bordo $\sigma = \underline{n} \cdot \underline{\partial}\varphi, \eta = \underline{n} \cdot \underline{\partial}\psi$ allora (sul bordo e per definizione) $\varphi = M\sigma, \psi = M\eta$ e

$$7.34 \quad \int_{\partial D} ds (M\sigma)\eta - \sigma(M\eta) = \int_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dx dz = 0 \quad (7.34)$$

così l' operatore M è simmetrico insieme al suo inverso G su $L_2(ds, [0, L])$. Si noti che, per definizione e per la (7.34), l' operatore M trasforma un dato al bordo di Neumann per una funzione armonica nel corrispondente dato di Dirichlet; e il suo inverso G trasforma un dato di Dirichlet nel corrispondente dato di Neumann.

Allora possiamo scrivere le equazioni del moto della Lagrangiana \mathcal{L} in termini dell' Hamiltoniana corrispondente: poichè $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\zeta}(x)} = M(\frac{\dot{\zeta}(x)}{(1+(\zeta')^2)^{1/2}})$, ove si denota $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}$ una generica derivata funzionale rispetto a $f(x)$, e

si rammenta che $(1 + \zeta'(x)^2)^{-1/2} ds \equiv dx$, possiamo definire la variabile coniugata alla $\zeta(x)$, $\pi(x)$. Porremo $\pi(x) \stackrel{def}{=} \rho M \dot{\zeta} / (1 + (\zeta')^2)^{1/2} = \rho \psi(x)$ e l' Hamiltoniana nelle variabili coniugate π, ζ è:

$$7.35 \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{1}{\rho} \pi(x) G \pi(x) + \rho g \zeta(x)^2 \right) \quad (7.35)$$

ove Γ^D è l' operatore che risolve il problema di Dirichlet in D e $G(\zeta) \pi(x) = \rho(-\partial_x \zeta(x) \partial_x \Gamma^D \pi(x, z) + \partial_z \Gamma^D \pi(x, z)|_{z=\zeta(x)})$, and $G = M^{-1}$ per la precedente osservazione.

Si verifica facilmente che le equazioni del moto generate dalle (7.35) sono corrette: invero la prima è $\dot{\zeta} = \frac{1}{\rho} G \pi$ che coincide con la (7.31). Più interessante è il calcolo della derivata funzionale $-\delta \mathcal{H} / \delta \zeta(x)$. Si ha

$$7.36 \quad \begin{aligned} & -g\rho\zeta(x) - \rho \frac{\delta}{\delta \zeta(x)} \int_0^L dy \int_{-\infty}^{\zeta(y)} dz \frac{1}{2} (\underline{\partial} \varphi)^2(y, z) = \\ & = -g\rho\zeta(x) - \frac{\rho}{2} (\underline{\partial} \varphi)^2(x, \zeta(x)) - \\ & - \int_D \rho \underline{n} \cdot \underline{\partial} \varphi(y, \zeta(y)) \frac{\delta}{\delta \zeta(x)} (\Gamma^D \frac{\pi}{\rho})(y, z)|_{z=\zeta(y)} ds \end{aligned} \quad (7.36)$$

ove $ds = (1 + \zeta'(y)^2)^{1/2} dy$. L' ultima derivata funzionale la si può evincere dalle

$$7.37 \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \Gamma^D \pi(y, z) = \frac{1}{\rho} \varphi(y, \zeta(y)) + (z - \zeta(y)) \frac{1}{\rho} \partial_z (\Gamma^D \pi)(y, \zeta(x)) + \\ & + O((z - \zeta(x))^2) = \frac{1}{\rho} \pi(y) + (z - \zeta(y)) u_z(y) + O((z - \zeta(x))^2) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\delta (\Gamma^D \pi)(y)}{\delta \zeta(x)} = -\delta(x - y) u_z(y) \end{aligned} \quad (7.37)$$

Poichè $\rho \underline{n} \cdot \underline{\partial} \varphi(y, \zeta(y)) ds = \rho \dot{\zeta}(y) dy$ ciò significa che

$$7.38 \quad -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta(x)} = -\rho g \zeta(x) - \frac{\rho}{2} (\underline{\partial} \varphi)^2(x) + \rho \dot{\zeta}(x) u_z(x) \quad (7.38)$$

Inoltre $\dot{\pi} = \rho \frac{d}{dt} (\varphi(x, \zeta(x))) = \rho (\partial_t \varphi(x, \zeta(x)) + u_z(x) \dot{\zeta}(x))$ (essendo $u_z = \partial_z \varphi$). L' ultima relazione combinata con le (7.38) per $-\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta(x)}$ diventa la condizione di pressione costante (nulla) sul pelo libero.

L' analisi ora descritta è tratta da [DZ],[DLZ],[CW].

(G) *Problema delle onde piccole.*

Le equazioni di Hamilton in (F) si semplificano notevolmente nel caso di onde piccole. Invero si trascureranno i termini non lineari e il dominio D occupato dal fluido sarà considerato coincidente con il semipiano $z < 0$. In questa approssimazione M, G assumono il valore che hanno per $\zeta \equiv 0$ e ammettono semplici e ben note espressioni esatte. Si vedano i problemi per un' analisi più quantitativa.

In questo caso si potrà scrivere π, ζ in termini del loro sviluppo di Fourier:

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_k p_k e^{ikx}, & \zeta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_k q_k e^{ikx} \\ \varphi(x, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_k p_k e^{ikx} e^{|k|z} \end{aligned} \quad (7.39)$$

ove k è multiplo intero di $2\pi/L$, e la hamiltoniana in termini dei coefficienti dello sviluppo:

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{|k|}{2\rho} |p_k|^2 + \frac{\rho g}{2} |q_k|^2 \right) \quad (7.40)$$

Nella (7.40) ci sono variabili ridondanti perchè $p_k = \overline{p_{-k}}$ e $q_k = \overline{q_{-k}}$. Se quindi si scrive $p_k = p_{1k} + ip_{2k}$ e $q_k = q_{1k} + iq_{2k}$, decomponendoli in parti reale e immaginaria, si trova:

$$H(p, q) = \frac{\rho g}{4} q_0^2 + \sum_{k>0} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\rho} p_{jk}^2 + \rho g q_{jk}^2 \right) \quad (7.41)$$

Ricordando che la trasformazione di Fourier è una trasformazione canonica questo mostra che il problema delle onde piccole periodiche di periodo orizzontale L in un fluido bidimensionale profondo è equivalente a quello dello studio di un sistema hamiltoniano di infiniti oscillatori armonici e quindi è esattamente risolubile.

I modi normali, ossia le coordinate angolo-azione, del problema sono naturalmente dati dalla trasformazione di Fourier e il modo con $k = 0$ è immobile: ossia $q_0 = \text{costante}$ $p_0 = \text{costante}$. La seconda relazione evidentemente è banale perchè comunque φ e quindi π sono definiti a meno di una costante, la prima invece ha la semplice interpretazione che il livello medio (appunto $q_0 = \int_0^L \zeta(x) dx$) resta costante. Ossia la costanza di q_0 esprime la conservazione della massa.

È interessante studiare a quali campi di velocità corrispondono le i modi normali di oscillazione che abbiamo ora ricavato. E anche a quali correnti corrispondono tali campi di velocità. Si vedano i problemi seguenti che illustrano anche metodi più classici per lo studio di onde lineari, [LL].

Problemi: *Onde sonore e di superficie. Energia irradiata.*

[0] Si pensi un fluido bidimensionale come uno tridimensionale stratificato e si definisca la vorticità come il campo perpendicolare al piano del fluido e di intensità $\omega = \partial_z u_x - \partial_x u_z$. Si trovi una espressione del campo di velocità in termini di potenziali di Clebsch. (*Idea:* le linee di vorticità sono rette perpendicolari al piano x, z . Quindi procedendo come al punto (D) possiamo scegliere come funzioni α, β , (7.23), le funzioni $\alpha = z, \beta = x$, ad esempio. Allora la funzione $\lambda(z, x)$ in (7.24) è proprio: $\lambda(z, x) = \omega(x, z)$ e, per la (7.25):

$$p = x, \quad q(x, z) = \int_{-\infty}^z dz' \omega(x, z')$$

e quindi la funzione γ sarà $\gamma = \Delta^{-1}(x\Delta q + \partial_x q)$ ove Δ^{-1} è l' inverso dell' operatore di Laplace nel dominio occupato dal fluido.)

[1]: Si consideri un fluido di Eulero comprimibile adiabatico, in stato di quiete con velocità nulla, pressione p_0 e temperatura T_0 . Si immagini di perturbare lo stato iniziale con una piccola perturbazione irrotazionale $\underline{u}' = \underline{\partial}\varphi$, nulla all' ∞ . Si supponga il moto adiabatico e che \underline{u}' e le variazioni p' della pressione e ρ' della densità siano piccole e se ne trascurino i quadrati. Si mostri che nel fluido si generano onde sonore e se ne calcoli la velocità di propagazione. (*Idea*: si scriva $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$ e si appuri che:

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \underline{\partial} \cdot \underline{u}' = 0, \quad \partial_t \underline{u}' + \rho_0^{-1} \underline{\partial} p' = 0, \quad p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho'$$

e inoltre $\underline{u}' = \underline{\partial}\varphi$ per φ opportuno e la seconda implica $\underline{\partial}(\partial_t \varphi + \rho_0^{-1} p') = 0$. Allora $\partial_t \varphi = -\rho_0^{-1} p'$ perchè all' ∞ si ha $p' = 0$ e $\underline{u}' = \underline{0}$. Quindi:

$$\partial_t^2 \varphi = -\frac{1}{\rho_0} \partial_t p' = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \partial_t \rho' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \Delta \varphi$$

e pertanto φ e, per linearità, $\partial_t \varphi$ evolvono secondo l' equazione delle onde con velocità $c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2}$.

[2]: Si consideri un fluido non viscoso, incomprimibile bidimensionale, che riempie la regione del piano (x, z) definita da $z \leq \zeta(x, t)$, ove $\zeta(x, t)$ è la *superficie libera* al tempo t . Si mostri che la condizione al bordo che lega $\underline{u}(\underline{x}, t)$ a $\zeta(x, t)$ è:

$$\left(1 + (\partial_x \zeta)^2 \right)^{1/2} \underline{n} \cdot \underline{u} = \partial_t \zeta$$

se $\underline{n} = \left(1 + (\partial_x \zeta)^2 \right)^{-1/2} (-\partial_x \zeta, 1)$ è la normale, esterna, alla superficie libera. Si faccia anche vedere che la condizione al bordo significa che le particelle di fluido che sono sulla superficie *restano* sulla superficie: conseguenza necessaria della ipotesi che la trasformazione di spostamento delle particelle di fluido dovuta al suo moto è una trasformazione regolare. (*Idea*: in una trasformazione regolare i punti interni restano tali.)

[3]: Nel contesto del problema [2] si supponga che il fluido sia dotato di un moto regolare in cui le onde di superficie abbiano ampiezza a manifestata su scala di tempo τ , e che le variazioni di \underline{u} a tempo fisso si manifestino su una scala di lunghezza $\lambda \equiv k^{-1}$. Si mostri che la condizione in base alla quale si può trascurare il termine di trasporto $\underline{u} \cdot \underline{\partial}\underline{u}$ nella equazione di Eulero è che $a \ll \lambda$, ossia $ka \ll 1$. (*Idea*: si proceda come nella analisi del §2. L' ordine di grandezza di $\partial_t \underline{u}$ è $a\tau^{-2}$, quello di \underline{u} è $a\tau^{-1}$ e quello di $\underline{u} \cdot \underline{\partial}\underline{u}$ è $a^2\tau^{-2}\lambda^{-1}$.)

[4]: Nel contesto del problema [2] e nelle ipotesi di trascurabilità del termine inerziale, discusse in [3], si consideri un moto non vorticoso del fluido: $\underline{u} = \underline{\partial}\varphi$ con pressione alla superficie libera $p_0 = 0$ costante. Si mostri che le equazioni di Eulero prendono la forma:

$$\partial_t \varphi + \rho^{-1} p + gz = 0, \quad \Delta \varphi = 0, \quad u_z(x, \zeta(x, t)) = \partial_t \zeta(x, t), \quad p(x, \zeta) = 0$$

(*Idea*: la prima è la (7.7), con $\frac{1}{2}\underline{u}^2$ trascurato, c.f.r. [3]; la seconda è la condizione di divergenza nulla per $\underline{u} = \underline{\partial}\varphi$; la terza è la condizione al bordo di [2] se si trascurano i termini $O((a/\lambda)^2)$; la quarta esprime che la pressione alla superficie libera è costante.)

[5]: Nel contesto di [4] si trovi una soluzione in cui si abbia $\zeta(x, t) = a \cos(kx - \omega t)$ mostrando che l' esistenza di una tale soluzione segue immediatamente dalla analisi al punto (G) e se $\omega^2 = kg$; quindi sono possibili onde di superficie con velocità di fase \sqrt{gk}/k e velocità di gruppo $\frac{1}{2}\sqrt{g/k}$. (*Idea*: per $z = \zeta(x, t)$ si deve avere, c.f.r. [4],

$\partial_t \varphi = -ag \cos(kx - \omega t)$; quindi: $\varphi(x, z) = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$ è soluzione delle prime due equazioni di [4], e la $u_z = \partial_t \zeta$ fornisce $\frac{gk}{\omega} = \omega$.)

[6]: Si scrivano le equazioni per le linee di corrente del moto trovato in [5]. (Idea:

$$\dot{x} = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \cos(kx - \omega t), \quad \dot{z} = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t).$$

[7]: Dalle equazioni dedotte in [6] si deduca che se $|z|$ è grande allora, *approssimativamente*, le linee di corrente con posizione media (x_0, z_0) sono cerchi di raggio $agk\omega^{-2}e^{kz_0}$ attorno a (x_0, z_0) .

[8]: Si faccia vedere che se il fluido, invece che occupare la regione $z \leq \zeta(x, t)$, occupa la regione $-h \leq z \leq \zeta(x, t)$ e se $h \gg \lambda \gg a$ le equazioni dedotte in [4] vengono modificate semplicemente dalla aggiunta della ulteriore condizione al bordo $\partial_z \varphi|_{z=-h} = 0$. Si calcoli la velocità di fase di propagazione analoga a quella del [5], facendo vedere che $\omega^2 = gk \tanh kh$. Si faccia vedere che anche questo problema può essere posto in forma hamiltoniana e conduce a un sistema hamiltoniano integrabile (di oscillatori armonici) e si calcolino i modi normali.

[9]: Si faccia vedere, nel contesto di [8], che se $\lambda \gg h$ le velocità di fase e di gruppo coincidono e valgono \sqrt{gh} .

[10]: Cosa cambia se nei precedenti problemi si suppone che il fluido sia tridimensionale? (Idea: “nulla”.)

[11]: Si consideri nel contesto del problema [1] un fluido irrotazionale bidimensionale infinito e si consideri un’onda piana con velocità c . Si mostri che la velocità v in un dato punto e in un dato istante è legata alle variazioni di densità e pressione da $p' = \rho v c$ e $p' = c^2 \rho'$. (Idea: la seconda equazione è dedotta come esposto nella idea per [2]; e se $\varphi = f(x/c - t)$ è il potenziale di velocità di un’onda piana nella direzione x si ha $v = \partial_x \varphi = \frac{1}{c} f'(x/c - t)$, mentre $p' = -\rho \partial_t \varphi$, sempre dalla idea in [1]: dunque $p' = -\rho f'(x/c - t)$.)

[12]: Si constati che in un’onda piana il flusso medio di energia attraverso una superficie di normale \underline{n} parallela alla direzione della velocità \underline{v} dell’onda è $\rho_0 c \overline{v^2}$, ove la barra denota la media sul tempo. (Idea: il flusso di energia è, c.f.r. [6] §1, $\rho \underline{v}(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho})$; trascurando \underline{v}^2 si ha $\rho \underline{v}(\varepsilon + \frac{p}{\rho}) = w_0 \rho \underline{v} + \rho w' \underline{v}$ ove $w_0 = \varepsilon_0 + p_0/\rho_0$, e $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s p'$. Ma w è l’entalpia per unità di massa e pertanto $\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s = 1/\rho_0$; e quindi $\overline{\rho \underline{v}(\varepsilon + p/\rho)} = w_0 \overline{\rho \underline{v}} + \overline{p' \underline{v}}$. La prima media è nulla perchè $\overline{\rho \underline{v}}$ è la variazione media di massa nel fluido a sinistra della superficie, mentre per [11] $p' = \rho v c$ e quindi $\overline{p' \underline{v}} = \rho c \overline{v^2}$.)

[13]: Nel contesto di [1] si supponga che nel fluido sia immerso un corpo Γ di forma arbitraria e dimensione lineare l . Si immagini che questo corpo oscilli o variando di volume (omoteticamente) ovvero spostando il baricentro lungo l’asse z . Sia $\omega/2\pi$ la frequenza delle oscillazioni e si definisca $\lambda = 2\pi c/\omega$, con c uguale alla velocità del suono. Supponendo che $\lambda \ll l$ e anche che le oscillazioni abbiano ampiezza piccola rispetto a l , si può assumere, per la incomprimibilità del fluido, che ogni elemento di superficie del corpo emetta un’onda piana e che la velocità nel punto $\underline{x} \in \partial\Gamma$, con normale esterna \underline{n} , sia \underline{u} . Si mostri che allora l’energia emessa per unità di tempo è $\rho_0 c \int_{\partial\Gamma} (\underline{u} \cdot \underline{n})^2 d\sigma$. (Idea: se $\lambda \ll l$ ogni onda va per conto suo e il risultato è immediata conseguenza del [12].)

[14]: Nel contesto del problema [13] si supponga ora che $\lambda \gg l$ e che il volume $t \rightarrow V(t)$ del corpo vari con legge data; si mostri che l’energia emessa per unità di tempo è I :

$$I = \frac{\rho}{4\pi c} \overline{(\partial_t^2 V)^2}$$

(*Idea*: nella regione $l \ll r \ll \lambda$ si può supporre che $\Delta\varphi = 0$ (perchè $c^{-2}\partial_t^2\varphi \sim \omega^2 c^{-2}\varphi \sim \lambda^{-2}\varphi$ mentre l'ordine di grandezza di $\Delta\varphi$ dovrebbe essere molto più grande: $O(\varphi r^{-2})$; allora per una opportuna funzione a di t si ha $\varphi = \frac{a}{r} + O(\frac{1}{r^2})$ e la incomprimibilità richiede che il flusso attraverso la superficie di una grande sfera ($\gg l$) sia $\dot{v} = 4\pi a$. Quindi $\varphi = -\frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}$. A distanza $r \gg \lambda$ si avrà invece $\varphi = -\frac{f(t-r/c)}{4\pi r}$ con f opportuna perchè φ dev'essere una soluzione dell'equazione delle onde con velocità c : ne segue che in entrambe le regioni di r la \underline{u} può essere interpolata usando la singola espressione $\underline{u} = \underline{\partial}\varphi = \frac{(\partial_t^2 v)(t-r/c)\underline{n}}{4\pi cr}$. Integrando su una superficie di raggio r si trova il risultato.)

[15]: Si supponga che il corpo sia rigido, $V = \text{const}$, e si muova lungo l'asse z di moto oscillatorio di pulsazione ω . Allora il potenziale di velocità non avrà la forma $\varphi = ar^{-1}$ quale termine dominante per r grande (sebbene piccolo rispetto a λ ove cioè il potenziale può essere considerato armonico) ma il suo termine dominante avrà la forma dipolare $\varphi = \underline{A}(t) \cdot \underline{\partial} \frac{1}{r}$, ove \underline{A} è (per simmetria) parallelo all'asse z . Osservando che anche $\underline{\partial} \left(\frac{\underline{A}(t-r/c)}{r} \right)$ risolve l'equazione lineare delle onde, il potenziale φ può essere interpolato per tutti gli r ($r \gg l$) da $\varphi \simeq -\frac{\underline{A}(t-r/c) \cdot \underline{n}}{cr}$. E quindi si mostri che la velocità a grande distanza e l'energia irradiata per unità di tempo sono:

$$\varphi \simeq -\frac{\underline{A}(t-r/c) \cdot \underline{n}}{cr}, \quad \underline{v} \simeq \frac{\underline{n} \cdot \underline{\partial}_t^2 \underline{A}}{c^2 r}, \quad I = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho}{c^3} \overline{(\partial_t^2 \underline{A})^2}$$

[16]: Si supponga che il corpo sia una sfera di raggio R che si muove con equazione oraria $z(t) = L \cos \omega t$, $L \ll c/\omega$. Si mostri che:

$$I \simeq 2\pi\rho\omega^2 \left(\frac{R^3}{2} \right)^2 \frac{2}{3} \frac{(\partial_t^2 z)^2}{c^3}$$

(*Idea*: se una sferetta si muove a velocità costante \underline{v}_0 allora il campo φ che genera il flusso potenziale è $\varphi = ar^{-2} \underline{v}_0 \cdot \underline{n} \equiv -a \underline{v}_0 \cdot \underline{\partial} \frac{1}{r}$ (perchè $\underline{v}_0 \cdot \underline{\partial} \frac{1}{r}$ è l'unico campo scalare lineare in \underline{v}_0 nullo all' ∞ e armonico): e A è determinato imponendo $\underline{n} \cdot \underline{\partial} \varphi|_{\underline{x}=R\underline{n}} = \underline{v}_0 \cdot \underline{n}$: ossia $a = \frac{1}{2} R^3$. Quindi $\underline{A} = \underline{v}_0 \frac{R^3}{2}$ e $\underline{\dot{A}} = \frac{R^3}{2} \underline{\dot{v}_0} = \frac{R^3}{2} \underline{\dot{z}} \partial_t^2 z$, se il moto è lento, $\omega L \ll c$, c.f.r. [LL], §68, 69.)

[17]: Si confronti l'energia elettromagnetica emessa da una carica elettrica e oscillante come $z(t) = L \cos \omega t$, $L \ll c/\omega$, con c = velocità della luce, e l'energia emessa da una pallina oscillante in un fluido allo stesso modo. (*Idea*: Le espressioni coincidono se si identifica la quantità elettromagnetica e^2/c^3 con $2\pi\rho\omega^2 \left(\frac{R^3}{2} \right)^2 / c^3$: si ricordi che l'energia emessa per unità di tempo da una carica oscillante è $\frac{2}{3} e^2 c^{-3} \ddot{z}^2$, c.f.r. [Be], (11.19) or (13.5).)

[18]: Ricordando che un sistema ottenuto perturbando un sistema di oscillatori armonici con termini non quadratici nelle variabili canoniche degli oscillatori può essere ridotto formalmente a un sistema quadratico a mezzo di opportune trasformazioni canoniche purchè certe condizioni di non risonanza siano verificate ci si pone il problema di tentare di mostrare che tali condizioni sono verificate nel problema delle onde in acque profonde studiato in (F). Si cerchi di vedere che tipo di problemi occorre affrontare per una verifica delle condizioni di non risonanza (identificandone qualcuna). Il problema può essere risolto esattamente fino a far vedere che il sistema può essere scritto come un sistema integrabile se si trascurano nella hamiltoniana termini del terzo ordine in π, σ incluso, [DZ], [DLZ] o addirittura del quarto ordine, [CW]. Ma se non si trascurano i termini del quinto ordine il sistema *non* può essere integrato per quadrature, [CW].

Bibliografia: [LL], §12,13,68,69, [La] §167, p. 248; [A] Appendice 2, D; [Be] vol. II, §11, (11.19); [DZ], [DLZ], [CW].

┐

┐

84

§7 Vorticità. Onde sonore e di superficie.

.

┐

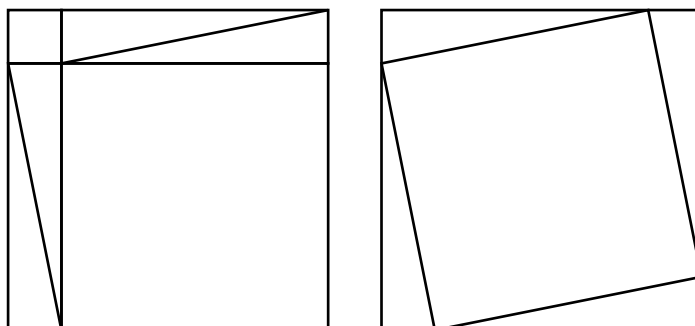
┐

Capitolo II

Algoritmi empirici e teoria di Leray

┌

┐



└

┘

§8 *Fluidodinamica incompressibile di Eulero e Navier-Stokes. Primi algoritmi di soluzione empirica. Metodo dell' attrito ausiliario e confronto con l' equazione del calore.*

(A) *Equazione di Eulero*

Immaginiamo ora un fluido incompressibile di Eulero racchiuso in un volume fisso Ω con frontiera regolare (C^∞).

Le equazioni che descrivono il fluido sono allora:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0, & \text{in } \Omega \\
 (2) \quad & \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\rho^{-1} \underline{\partial} p - \underline{g}, & \text{in } \Omega \\
 (3) \quad & \underline{u} \cdot \underline{n} = 0, & \text{in } \partial\Omega \\
 (4) \quad & \underline{u}(\xi, 0) \equiv \underline{u}_0(\xi), & t = 0
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

ove \underline{n} denota la normale esterna a $\partial\Omega$ e la “condizione al contorno” 3) esprime la condizione che il fluido “scivoli” (senza attrito) sulla frontiera di Ω .

Dato il campo esterno $\underline{g}(\xi) \in C^\infty(\Omega)$ indipendente da t , il problema della fluidodinamica a pareti fisse è il seguente:

- (1) se $\underline{u}_0 \in C^\infty(\Omega)$ e $\underline{\partial} \cdot \underline{u}_0 = 0$, $\underline{u}_0 \cdot \underline{n} = 0$ su $\partial\Omega$ esiste una soluzione $t \rightarrow \underline{u}(\xi, t)$, $p(\xi, t)$ della (8.1), per tempi abbastanza piccoli, con \underline{u} e p di classe C^∞ o, almeno, con derivate continue?
- (2) esistono soluzioni globali, cioè per tutti i tempi?
- (3) sono queste soluzioni uniche?
- (4) sotto quali ipotesi su \underline{g} e \underline{u}_0 si possono trovare stime uniformi in funzione del tempo sulle derivate di \underline{u} e p ?

Ovviamente sarebbe desiderabile una risposta positiva a (2) e (3), e la (4) avrebbe invece importanza in vista della verifica di consistenza fisica che si vuole sia descritta delle equazioni, che sappiamo che sono state dedotte nell' ipotesi che i gradienti di velocità non divengano mai troppo grandi.

In questo paragrafo ci occuperemo di trovare un argomento euristico e costruttivo sull' esistenza di soluzioni.

Invero dato $\underline{u}_0(\xi)$ possiamo immaginare di calcolare $\underline{u}(\xi, t)$ per t molto piccolo come:

$$\underline{u}(\xi, t) = \underline{u}_0(\xi) + \dot{\underline{u}}(\xi, 0) t \tag{8.2}$$

Ma per calcolare $\dot{\underline{u}}(\xi, 0)$ occorre conoscere p . E p può essere calcolata dalla 2) in (8.1); invero la divergenza della 2), e la 3), dicono che:

$$\begin{aligned}
 -\rho \underline{\partial} \cdot (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) + \rho \underline{\partial} \cdot \underline{g} &= \Delta p & \text{in } \Omega \\
 \partial_n p &= -\rho [(\underline{u} \cdot \underline{\partial}) \underline{u}] \cdot \underline{n} + \rho \underline{g} \cdot \underline{n} & \text{in } \partial\Omega
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

che fa vedere che p_0 è determinato a meno di una costante; si noti che il problema di Neumann inhomogeneo in (8.3) verifica automaticamente la

condizione di compatibilità che impone che l' integrale sul bordo del valore di $\partial_n p$ sia uguale all' integrale del dato esteso al volume, grazie al teorema di integrazione di Stokes.

Inserendo questa funzione p_0 nella 2) delle (8.1) a $t = 0$, vediamo che si calcola $\underline{u}(\xi, 0)$ e che $\underline{\partial} \cdot \underline{u}(\xi, 0) = 0$ per costruzione. Dunque ha senso definire la (8.2) e anzi si è trovato un algoritmo di approssimazione che può addirittura avere interesse numerico. Si vede anche bene quale sia il meccanismo che permette di eliminare la pressione esprimendola in funzione del campo di velocità.

Dato $t_0 > 0$ e posto per $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\xi, kt_0) &= \underline{u}(\xi, (k-1)t_0) + t_0 \underline{u}(\xi, (k-1)t_0) = \underline{u}_k(\xi) \\ \underline{u}(\xi, 0) &\equiv \underline{u}_0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

ove:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\xi, (k-1)t_0) &= -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p_{k-1}(\xi, (k-1)t_0) - \\ &\underline{u}(\xi, (k-1)t_0) \cdot \underline{\partial} \underline{u}(\xi, (k-1)t_0) + \underline{g} \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$p_{k-1} = \text{soluzione di} \begin{cases} \Delta p_{k-1} = -\rho \underline{\partial} \cdot (\underline{u}_{k-1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{k-1}) + \underline{\partial} \cdot \underline{g} & \Omega \\ \partial_n p_{k-1} = -\rho (\underline{u}_{k-1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{k-1}) \underline{n} + \underline{g} \cdot \underline{n} & \partial\Omega \end{cases}$$

il problema è se esista limite:

$$\underline{u}(\xi, t) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow 0, kt_0 = t}} \underline{u}_k(\xi) \quad (8.6)$$

e se tale limite sia soluzione delle (8.1).

Per il momento possiamo considerare questo problema della esistenza dei limiti come problema “tecnico” e considerare quindi di aver “risolto formalmente” l' equazione (8.1).

La (8.6) con k finito e grande fornisce almeno in linea di principio (perché il calcolo di \underline{u}_k è ovviamente assai complesso anche dal punto di vista numerico) un algoritmo di approssimazione ad un moto incompressibile che genera evoluzioni che, da un lato, possono essere di per se interessanti e, dall' altro, possono essere considerate come modelli di evoluzione di un fluido ideale.

L' approssimazione dovrebbe essere sempre migliore al tendere a 0 del “passo temporale” t_0 di discretizzazione.

Osservazione: l' algoritmo definito dalle (8.4),(8.5),(8.6) è, a volte, chiamato *algoritmo di Eulero*: più in generale l' algoritmo di Eulero fornisce l' approssimazione alle soluzioni di una equazione differenziale $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, con $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ che, al tempo kt_0 , è data dalla relazione ricorsiva $\underline{x}_k = \underline{x}_{k-1} + t_0 \underline{f}(\underline{x}_{k-1})$, $k \geq 1$.

(B) *Equazione di Navier-Stokes-Eulero*

Passiamo dunque a vedere se, almeno in questo senso euristico, sia possibile una trattazione simile delle equazioni di Navier–Stokes incompressibili. ■

Tali equazioni si scrivono:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 && \text{in } \Omega \\
 2) \quad & \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} + \nu \Delta \underline{u} && \text{in } \Omega \\
 3) \quad & \underline{u} \cdot \underline{n} = 0, && \text{in } \partial\Omega \\
 4) \quad & \underline{u}(\xi, 0) = \underline{u}_0(\xi) && t = 0
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

qualora si possa dire che l' attrito fra fluido e pareti è trascurabile e *quindi il fluido può scorrere senza attrito lungo le pareti.*

In questo caso le equazioni si discutono esattamente come nel caso di Eulero (con ovvie modifiche) e ci si trova, dunque, con un algoritmo di approssimazione come (8.4), (8.5) in cui nelle prime due delle (8.5) si deve aggiungere rispettivamente a secondo membro il termine $\nu \Delta \underline{u}$ e la sua divergenza (che contribuisce zero nel caso della seconda, cioè dell' equazione per la pressione p_{k-1}), e nell' ultima delle (8.5) si deve aggiungere $\nu \underline{n} \cdot (\Delta \underline{u})$.

Non ci sono dunque problemi nuovi.

(C) *Equazioni di Navier Stokes e difficoltà connesse.*

Però nelle applicazioni ci si trova spesso nella situazione in cui l' attrito con le pareti *non è trascurabile affatto*, al punto che la condizione al bordo fisicamente significativa è $\underline{u} = 0$ invece che $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$.

Chiameremo allora le (8.7) equazioni di NSE per un fluido in Ω mentre chiameremo equazioni di NS per un fluido in Ω le:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 && \text{in } \Omega \\
 (2) \quad & \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} + \nu \Delta \underline{u} && \text{in } \Omega \\
 (3) \quad & \underline{u} = 0 && \text{in } \partial\Omega \\
 (4) \quad & \underline{u}(\xi, 0) = \underline{u}_0(\xi) && t = 0
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

Ora però il discorso cambia radicalmente; invero se si tenta di determinare p a $t = 0$ si trova che:

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= -\rho \underline{\partial} \cdot (\underline{u}_0 \cdot \underline{\partial} \underline{u}_0) + \rho \underline{\partial} \cdot \underline{g} && \text{in } \Omega \\
 \underline{\partial} p &= -\rho \underline{g} + \rho \nu \Delta \underline{u}_0 && \text{in } \partial\Omega
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

che in generale *non potrà essere risolta* perché non è detto che le derivate tangenziali di p , che ovviamente sono determinate dalla sola derivata normale (via la soluzione del problema di Neumann inhomogeneo corrispondente), siano compatibili su $\partial\Omega$ con la (8.9).

Si potrebbe per un attimo sperare che il fatto che \underline{u}_0 non sia arbitrario ma a divergenza nulla implichi *ipso facto* la compatibilità: ma ci si convince

facilmente con un esempio che questo non è il caso, cfr. i seguenti problemi [8] e [9].

Questa è una grave difficoltà che fa capire come ci si debba necessariamente attendere che sul bordo di Ω accadano fenomeni di difficile studio.

Il loro primo effetto è che quanto finora detto non ci permette ancora neppure di dare una prescrizione per una soluzione numerica dell'equazione di NS con "condizioni di aderenza" viscosa al bordo.

E possono sorgere legittimi dubbi sul fatto che (8.8) sia un problema ben posto: certamente è necessario interpretare la (8.8) opportunamente dal momento che se si interpreta in senso stretto con funzioni tutte di classe C^∞ appare semplicemente inconsistente in quanto non consente di calcolare \underline{u} neppure all'istante iniziale (in quanto non esistente).

Un modo di procedere ora, per trovare un algoritmo che, almeno su basi euristiche, consenta di calcolare una soluzione alla (8.8) (fornendone al tempo stesso un'opportuna interpretazione che evita il problema ora incontrato) è il seguente.

Si immagina di estendere, lungo le normali alla frontiera $\partial\Omega$, il volume Ω di una lunghezza ε e che il fluido occupi questo volume esteso, denotato Ω_ε , verificandovi l'equazione:

$$\begin{aligned}
 \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 & \Omega_\varepsilon \\
 \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} - \nu \Delta \underline{u} - \sigma_\varepsilon(\xi) \underline{u} & \Omega_\varepsilon \\
 \underline{u} \cdot \underline{n} &= 0 & \partial\Omega_\varepsilon \\
 \underline{u}(\xi, 0) &= \underline{u}_0 & \Omega_\varepsilon
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

ove \underline{u}_0 è esteso in modo arbitrario fra Ω e Ω_ε , assumendo che la sua estensione e un prefissato numero p di derivate ($p \geq 2$) si estendano con continuità, e assumendo inoltre che l'estensione si annulli in un intorno della nuova frontiera $\partial\Omega_\varepsilon$. La funzione $\sigma_\varepsilon(\xi)$ in funzione della distanza da $\partial\Omega$ sale da zero al valore $\bar{\sigma}(\varepsilon)$ molto rapidamente con pendenza media $\bar{\sigma}(\varepsilon)/\varepsilon$. Questo termine aggiuntivo ha l'interpretazione di "attrito" che rallenta il fluido nell'intorno di $\partial\Omega_\varepsilon$.

Poichè le linee di livello di $\sigma_\varepsilon(\xi)$ sono, per la loro definizione, parallele a $\partial\Omega$ e $\partial\Omega_\varepsilon$ il gradiente di σ_ε , che denotiamo $\sigma'_\varepsilon \underline{n}$ con σ'_ε tale che \underline{n} ha modulo 1, è un campo vettoriale che estende allo strato fra le due frontiere i campi delle loro normali.

Ci si può aspettare che nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ la soluzione a (8.10), per la quale possiamo applicare l'algoritmo costruttivo del caso precedente, c.f.r. (B), perché su $\partial\Omega_\varepsilon$ vale la condizione $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$, sia tale che:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{u}_\varepsilon(\xi, t) = \underline{u}(\xi, t) \tag{8.11}$$

e $\underline{u}(\xi, t)$ risolva la (8.8), sotto la eventuale ulteriore condizione che $\bar{\sigma}(\varepsilon) \rightarrow \infty$ abbastanza velocemente, per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Osservazione: Se Ω ha una forma speciale, per esempio se Ω è un cubo, può essere conveniente scegliere Ω_ε come un toro (di lato ε più grande di quello del cubo). Si farà così in seguito nel caso di un problema analogo ma più semplice (unidimensionale).

L' algoritmo (8.10), detto “*algoritmo dell' attrito ausiliario*” o “*metodo dell' attrito*”, incontra difficoltà numeriche considerevoli a causa del termine $\sigma_\varepsilon \underline{u}$ e della divergenza a ∞ (per $\varepsilon \rightarrow 0$) di $\bar{\sigma}_\varepsilon$ (infatti, per $\varepsilon \rightarrow 0$, \dot{u}_t calcolato dalla (8.10) tende all'infinito, a meno che non si possa garantire *a priori* che $u_\varepsilon \rightarrow 0$ nei punti in cui σ_ε è grande in modo da controllare il prodotto $\sigma_\varepsilon \underline{u}_\varepsilon$, cosa che appare difficile dal punto di vista matematico).

(D) *Equazione del calore:*

Per capire meglio quello che sta accadendo consideriamo un caso analogo più semplice. Si consideri l' equazione del calore:

$$\begin{aligned} \partial_t T &= c \partial_x^2 T, & x &\in [-\pi, \pi] \\ T(-\pi) &= T(\pi) = 0 \\ T(x, 0) &= T_0(x) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Se tentassimo di trovare una soluzione per questa equazione con il metodo precedente dovremmo porre:

$$T_k = T_{k-1} + t_0 \dot{T}_{k-1} \equiv T_{k-1} + t_0 c T_{k-1}'' \quad k \geq 1 \quad (8.13)$$

ma è chiaro che, a meno che $T''(\pm\pi) = 0$, già questo non sarà possibile perché T_1 non verificherà le condizioni al bordo.

E se anche $T_0''(\pm\pi) = 0$ si vede che $T_1''(\pm\pi) \neq 0$ a meno che $T_0''''(\pm\pi) = 0$. Cioè se $T_0(x)$ non ha *tutte* le derivate pari nulle nell'intorno di $\pm\pi$ l' algoritmo non funziona.

Il “metodo dell' attrito”, ponendo $c = 1$, condurrebbe a equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= T'' - \sigma_\varepsilon T \\ T(-\pi - \varepsilon) &= T(\pi + \varepsilon), \quad T'(-\pi - \varepsilon) = T'(\pi + \varepsilon) \\ T(x, 0) &= T_0(x) \end{aligned} \quad (8.14)$$

avendo esteso T_0 arbitrariamente fuori di $[-\pi, \pi]$ ad una funzione periodica (*c.f.r.* osservazione seguente la (8.11)) in $[-\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$ e avendo immaginato di identificare i punti $\pi + \varepsilon$ e $-\pi - \varepsilon$, *c.f.r.* Fig. 1 seguente.

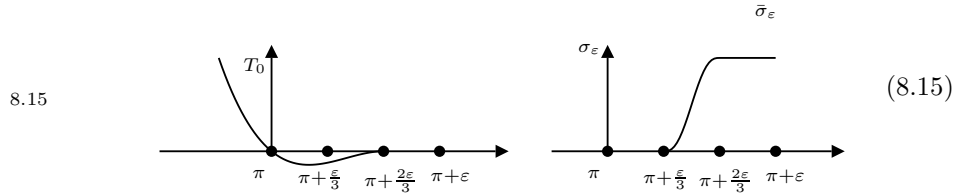


Fig. 1: Extension of the initial datum $T_0(x)$ to the right of π ; and graph of the auxiliary function σ_ε between π and $\pi + \varepsilon$.

Se si sceglie σ_ε uguale ad una costante $\bar{\sigma}_\varepsilon$ per $x \in [\pi + \frac{2}{3}\varepsilon, \pi + \varepsilon]$ e a 0 per $x \in [\pi, \pi + \frac{\varepsilon}{3}]$ e $\sigma_\varepsilon(x) = \sigma_\varepsilon(-x)$, allora si può dimostrare che il

metodo iterativo funziona, in linea di principio, almeno se il dato iniziale T_0 è abbastanza regolare (e se $\bar{\sigma}_\varepsilon \rightarrow \infty$ abbastanza rapidamente per $\varepsilon \rightarrow 0$).

Questa volta il problema è così semplice che si può mostrare, se $T_0(x)$ è analitica all'interno di $[-\pi, \pi]$, che l'algoritmo (8.13) definisce una $T_{\varepsilon,k}(\xi)$ che converge alla soluzione $T(\xi, t)$ dell'equazione del calore con le corrette condizioni al contorno (8.12). Ma la convergenza di:

$$8.16 \quad T(\xi, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ kt_0 = t}} T_{\varepsilon,k}(\xi) \quad (8.16)$$

è delicata e, come algoritmo numerico, questo procedimento non è buono perché anche \dot{T} rischia di divenire molto grande per $\varepsilon \rightarrow 0$, a causa del termine $\sigma_\varepsilon T$ in (8.14).

Inoltre se T_0 non è analitica, ma ad esempio “solo” C^∞ , l'algoritmo in generale può convergere ma di solito *non* converge alla soluzione usuale dell'equazione del calore, c.f.r. seguito.

Un algoritmo apparentemente migliore consiste nel trasformare l'equazione in:

$$8.17 \quad T_\varepsilon(\xi, t) = e^{-\sigma_\varepsilon t} T_0(\xi) + \int_0^t e^{-\sigma_\varepsilon(\xi)(t-\tau)} T_\varepsilon''(\xi, \tau) d\tau \quad (8.17)$$

che possiamo tentare di risolvere iterativamente ponendo:

$$8.18 \quad T_{\varepsilon k}(\xi) = e^{-\sigma_\varepsilon t_0 k} T_0(\xi) + t_0 \sum_{h=1}^k e^{-\sigma_\varepsilon(\xi)(k-h)t_0} T_{\varepsilon h}''(\xi), \quad k \geq 1 \quad (8.18)$$

che ora fornisce un algoritmo numerico in cui σ_ε appare solo in $e^{-\sigma_\varepsilon t}$ e questa quantità è calcolabile senza dare luogo a quantità grandi (anche se $\sigma_\varepsilon t$ è grande), purché ovviamente $T_\varepsilon''(\xi)$ non divenga esso stesso molto grande, cosa che non ci si aspetta, almeno non a confronto con il corrispondente $e^{-\sigma_\varepsilon(\xi)t_0}$ (il motivo è che nella soluzione ben nota dell'equazione del calore T'' ha di solito una discontinuità al bordo, ma non è infinita).

(E) *Algoritmo empirico per NS:*

Questa discussione allora ne suggerisce una analoga per le (8.8) e (8.9) e conduce al seguente algoritmo per l'equazione (8.10). Si riscrive la (8.10) come:

$$8.19 \quad \begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{n} &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0, \text{ in } \Omega, \quad \underline{u}(\xi, t) = \\ &= \underline{u}_0(\xi) e^{-\sigma_\varepsilon(\xi)t} + \int_0^t e^{-\sigma_\varepsilon(\xi)(t-\tau)} (-\underline{u}_\tau \cdot \underline{\partial} \underline{u}_\tau - \frac{1}{\rho} \underline{\partial} p_\tau - \underline{g} - \nu \Delta \underline{u}_\tau) d\tau \end{aligned} \quad (8.19)$$

ove u_τ, p_τ denotano $u(\xi, \tau), p(\xi, \tau)$ e si imposta l'algoritmo di approssimazione:

$$8.20 \quad \begin{aligned} \underline{u}_k(\xi) &= \underline{u}_0(\xi) e^{-\sigma_\varepsilon(\xi)t} + \sum_{h=1}^k t_0 e^{-\sigma_\varepsilon(\xi)(k-h)t_0} (-\underline{u}_h \cdot \underline{\partial} \underline{u}_h - \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \underline{\partial} p_h + \underline{g} + \nu \Delta \underline{u}_h) \quad k \geq 1 \\ \Delta p_k &= -\rho \underline{\partial}(\underline{u}_k \cdot \underline{\partial} \underline{u}_k) + \rho \underline{\partial} \cdot \underline{g} - \underline{u}_k \cdot \underline{\partial} \sigma_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \partial_n p_k &= -\rho(\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_k) \cdot \underline{n} + \rho \underline{g} \cdot \underline{n} + \rho \nu \Delta \underline{u}_k \cdot \underline{n} \quad \text{in } \partial\Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (8.20)$$

ove $\underline{\partial}\sigma_\varepsilon = \sigma'_\varepsilon \underline{n}$ e σ'_ε ha supporto vicino a $\partial\Omega_\varepsilon$. Questo algoritmo non incontra problemi rilevanti per $\sigma_\varepsilon \rightarrow \infty$, purché $\underline{u}_k \cdot \underline{n}$ sia così piccolo che $\sigma'_\varepsilon \underline{u}_k \cdot \underline{n}$ resti limitato per $\varepsilon \rightarrow 0$. Poiché ci si attende che $\underline{u}_k \cdot \underline{n}$ sia $O(\varepsilon)$, questo appare ragionevole e allora si dovrebbe avere:

$$\underline{u}(\xi, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ kt_0 = t}} \underline{u}_{k,\varepsilon}(\xi) \quad (8.21)$$

Tuttavia, a differenza del caso dell'equazione del calore, l'algoritmo (8.20) non elimina completamente il problema, di sicura rilevanza per i calcoli numerici, che nasce dalla presenza di termini come $\underline{u}_k \cdot \underline{\partial}\sigma_\varepsilon$ che sono prodotto di quantità molto grandi (σ_ε) per quantità (\underline{u}_k) che ci si aspetta siano piccole (ma che non sappiamo mostrare *a priori* che sono veramente tali). E quindi questo algoritmo riveste solo un carattere teorico, che piuttosto che risolvere un problema, ne illustra bene alcune difficoltà. Riusciamo a dare senso ad un metodo di costruzione euristico di soluzioni, ma tale metodo resta solo un metodo di principio, condizionato alla soluzione di un'equazione ellittica che sembra condurre a difficoltà di stabilità numerica (come minimo).

Ci si può domandare dove sia finito il problema concettuale di compatibilità, all'origine di questa discussione. Ovviamente non è sparito: infatti ci si dovrebbe attendere che le soluzioni "esatte" di (8.19) ovvero di (8.10) per $t > 0$ piccolo non verifichino più le condizioni al bordo $\underline{u} = \underline{0}$ su $\partial\Omega$ (che ora è una superficie interna al dominio Ω_ε in cui studiamo l'equazione). Ma si può "sperare" che la violazione della condizione di annullamento su bordo $\partial\Omega$ debba divenire rapidamente, al crescere del tempo, molto piccola e tendere a zero per ogni prefissato valore $t > 0$ al tendere a zero di ε , almeno se σ_ε diviene abbastanza verticale nelle vicinanze di $\partial\Omega$ e abbastanza grande (per $\varepsilon \rightarrow 0$).

La impossibilità di soddisfare la condizione al contorno a $t = 0$ (su $\partial\Omega$) implica che $\underline{u}_\varepsilon$ sarà non nulla, e neppure piccola, a $t = 0$ in qualche punto della frontiera $\partial\Omega$ e diverrà rapidamente molto piccola, sempre più presto al tendere a 0 di ε : e al limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si dovrebbe trovare un limite \underline{u} che all'istante $t = 0$ non verifica l'equazione di Navier Stokes, *ma che la verifica a tutti i tempi* $t > 0$.

In questo modo il modello di attrito per la condizione al bordo chiarisce come mai sia possibile che l'equazione non sia risolta al tempo $t = 0$ ma lo sia a tutti i tempi $t > 0$ e quale sia un possibile meccanismo fisico che faccia accadere questo.

Resta che, sebbene il dato iniziale non possa essere ottenuto come limite nel senso che tutte le derivate di \underline{u} , per $t > 0$ (derivate temporali incluse) tendono a quelle corrispondenti del dato iniziale¹ tuttavia il moto è pur sempre generato dal dato iniziale e quindi ci si può aspettare che la \underline{u}

¹ Abbiamo infatti già visto che questo non può accadere, ad esempio, per la derivata temporale che per il dato iniziale non è neppure definita.

tenda alla \underline{u}_0 in qualche senso, ad esempio in media $L_2(\Omega)$ o in qualche senso più debole.

L'importante è che il significato fisico della singolarità a $t = 0$ sia stato risolto, almeno come proposta da verificare, da un modello concreto insieme ad una descrizione del meccanismo di transizione da $t = 0$, ove l'equazione non può essere in generale risolta, a $t > 0$ ove invece la sua risolubilità non urta problemi di principio.

Riassumendo, evidentemente, si sono poste le due seguenti questioni:

Questione (Q1): se le equazioni con attrito (8.10), una volta risolte esattamente per $\varepsilon > 0$, abbiano la proprietà di convergere per $\varepsilon \rightarrow 0$ ad una soluzione delle (8.8) (condizioni al bordo incluse), almeno per $t > 0$.

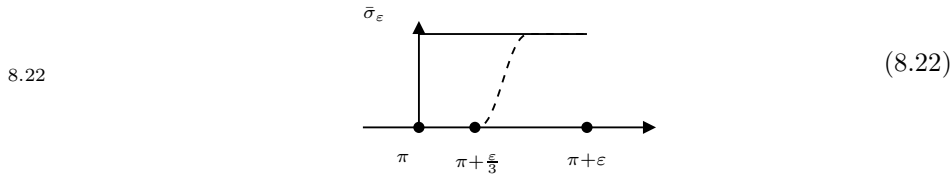
Questione (Q2): se l'algoritmo (8.20) effettivamente converge, per $k \rightarrow \infty$, $t_0 \rightarrow 0$, $kt_0 \rightarrow t$, ad una soluzione delle (8.19).

e cercheremo di comprenderne la natura studiando problemi più semplici nei quali, però, già si presentano.

(F) *Analisi della precisione degli stessi algoritmi applicati all'equazione del calore, Q1:*

Le questioni Q1 e Q2 non verranno analizzate per l'equazione di Navier Stokes perchè offrono notevoli difficoltà (e non risolte, a tutt'oggi, nel caso $d = 3$). Possiamo però analizzarli nel caso di gran lunga più semplice dell'equazione del calore e tale studio è oltremodo istruttivo perchè illustra meccanismi e difficoltà che ci aspetta di ritrovare nel caso della teoria dell'equazione di Navier Stokes. Vediamo dunque il problema Q1) posto al punto (E) nel caso dell'equazione (8.12), (8.14).

Per semplicità supporremo però che σ_ε in (8.14), (8.17) sia dato dalla funzione discontinua in figura, invece che della figura tratteggiata.



Mentre vicino a $-\pi$, in $[-\pi - \varepsilon, -\pi]$, la σ_ε sarà definita in modo speculare.

Inoltre conviene usare il fatto che (8.14) ha condizioni periodiche al bordo per porre il “potenziale” σ_ε al centro dell'intervallo (con il cambiamento di coordinate $x' = x - \pi - \varepsilon$).

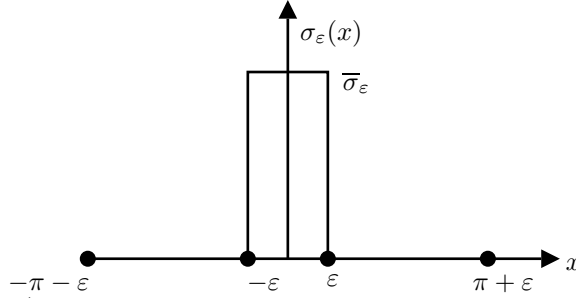


Fig. (2.1.3) La funzione σ_ε dopo la traslazione dell'origine. I punti $-\pi - \varepsilon$ e $\pi + \varepsilon$ sono identificati dalle condizioni al bordo periodiche.

Considereremo dunque l'equazione:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \dot{T} = T'' - \sigma_\varepsilon T, \quad \text{in } [-\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon] / \{\pm \varepsilon\} \\
 (2) \quad & \text{condizioni periodiche al bordo e raccordo del} \\
 (3) \quad & \text{valore e della derivata prima di } T \text{ in } \pm \varepsilon \\
 (4) \quad & \text{e la funzione } \sigma_\varepsilon \text{ sar\`a } 0 \text{ se } |x| > \varepsilon \text{ e } \overline{\sigma}_\varepsilon \text{ if } |x| < \varepsilon \\
 (5) \quad & \text{dato iniziale, se } T_0 \text{ \`e il dato in (8.14):} \\
 & \vartheta_0(x) = T_0(x - \pi - \varepsilon) \text{ if } x > \varepsilon, \text{ e} \\
 & T_0(x + \pi + \varepsilon) \text{ se } x < -\varepsilon \text{ e zero in } |x| < \varepsilon
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

L'esclusione dei punti $\pm \varepsilon$ nella prima delle (8.23) è rimpiazzata dalla condizione di raccordo che è ora posta perché σ_ε è stata scelta discontinua e l'equazione (8.12) va, in conseguenza, interpretata in qualche modo nei punti di discontinuità (la condizione di raccordo dà una interpretazione possibile: ovviamente è solo una delle possibili interpretazioni e come tale ha un significato fisico, che però non discuteremo visto il carattere ausiliario della ipotesi).

La seguente proposizione risolve la questione analoga alla Q1), nel caso dell'equazione del calore:

Proposizione: L'equazione del calore, nella forma (8.23) con dato iniziale ϑ_0 generato come in (4) di (8.23), regolare $T_0(x) \in C^\infty([-\pi, \pi])$, ammette una soluzione $t \rightarrow T^\varepsilon(x, t)$ che per $\varepsilon \rightarrow 0$ converge, per $x \in [-\pi, \pi]$ ad una dell'equazione del calore (8.12), (descritta nel seguente problema 6).

L'equazione in questione può essere risolta esattamente: la dimostrazione si riduce dunque ad una semplice ma istruttiva verifica (cfr. problemi [1]-%[7]).

(G) Analisi della precisione degli algoritmi nel caso dell'equazione del calore, (Q2).

Studiamo ora la questione (Q2) posta dopo la (8.21), e cioè vediamo se l'algoritmo (8.18) di soluzione di (8.17) effettivamente produce la soluzione voluta, ossia quella garantita dalla ultima proposizione.

È facile convincersi che questo non è il caso, in generale, perché già non lo è nel caso analogo del problema (8.12) in cui la condizione al bordo di

Dirichlet è sostituita dalla più semplice condizione periodica (ossia $T(-\pi) = T(\pi)$, $T'(\pi) = T'(-\pi)$). In questo caso non c'è neppure bisogno di ingrandire il dominio perchè le condizioni al bordo sono già rispettate dall' algoritmo in (8.13) e i problemi concettuali discussi in (D) (dopo la (8.13)) non si presentano neppure.

Si deve anche notare che gli algoritmi (8.13) e (8.18) coincidono, in questo caso con condizioni periodiche al bordo.

Ciononostante la questione se l' algoritmo (8.13) davvero produca la soluzione corretta all' equazione (8.12) può essere posta in questo caso ed è evidentemente più semplice della questione (Q2) sull' algoritmo (8.20) per l' equazione NS con condizioni al bordo di Dirichlet. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione: si consideri l' equazione (8.12) ma con condizioni al bordo periodiche (come sopra) e dato iniziale C^∞ e periodico, e si ponga, per $k \geq 1$:

$$8.24 \quad T_k = T_0 + ct_0 \sum_{h=1}^k T''_{k-h}, \quad \longleftrightarrow T_k - T_{k-1} = ct_0 T''_{k-1} \quad (8.24)$$

Sia $\omega \rightarrow \hat{T}_0(\omega)$ la trasformata di Fourier di $T_0(x)$ e si supponga che, per $\tau, b, \eta > 0$, sia $|\hat{T}_0(\omega)| < \tau e^{-b|\omega|^{2+\eta}}$; allora la successione (8.24) converge alla soluzione di (8.12) per $t_0 \rightarrow 0$. In generale $\hat{T}_k(\omega) \rightarrow \hat{T}(\omega, t)$ se $kt_0 \rightarrow t$, per ogni ω ma, a meno che valga la condizione sulla trasformata di Fourier appena menzionata (implicante, fra l' altro, che T_0 è una funzione analitica intera di x), non è in generale vero che $T_k(x) \xrightarrow{kt_0 \rightarrow t, t_0 \rightarrow 0} T(x, t)$

dim: La trasformata di Fourier di T_k può essere calcolata da:

$$8.25 \quad \hat{T}_k(\omega) = \hat{T}_{k-1}(\omega)(1 - c\omega^2 t_0) = \hat{T}_0(\omega)(1 - c\omega^2 t_0)^k \quad (8.25)$$

ove $\omega = 2\pi n$ con n intero > 0 .

Così (scrivendo $t_0 = \frac{t}{k}$) vediamo che:

$$8.26 \quad \hat{T}_k(\omega) \xrightarrow[k \rightarrow \infty, t \rightarrow 0]{kt_0 = t} e^{-c\omega^2 t} \hat{T}_0(\omega) \quad (8.26)$$

Ma questo non significa che $T_k(\xi) \rightarrow \bar{T}(\xi, t)$, ove \bar{T} è la soluzione della (8.12): lo si vede subito se T_0 ha supporto $[-a, a]$ strettamente contenuto in $[-\pi, \pi]$ ($a < \pi$). In tal caso è chiaro (dalla (8.24)) che T_k resterà identicamente nulla nell' insieme ove inizialmente si annullava con tutte le sue derivate (cioè fuori di $[-a, a]$). La convergenza in questione, però, viene garantita se:

$$8.27 \quad |(1 - c\omega^2 \frac{t}{k})^k \hat{T}_0(\omega)| \leq \gamma_t(\omega) \quad \text{e} \quad \sum_{\omega} |\gamma_t(\omega)| < \infty \quad (8.27)$$

con la serie delle $|\gamma_t(\omega)|$ convergente uniformemente in t per t in un insieme limitato arbitrariamente fissato. È facile vedere che questo accade se, ed essenzialmente solo se (c.f.r. problemi [2.1.10], [2.1.11], $\hat{T}_0(\omega) \rightarrow 0$ come, o più rapidamente di $\tau e^{-b|\omega|^2}$ per $\tau, b > 0$: almeno se t è abbastanza piccolo, o anche, per tutti i tempi se il decadimento in ω è più veloce (come nelle ipotesi della proposizione).

*

mbe

Perché il metodo funzioni occorre quindi richiedere forti proprietà di regolarità su $T_0(x)$: $T_0(x)$ deve essere più regolare di una funzione analitica intera della x (per la analiticità sarebbe invero sufficiente che la trasformata di Fourier tendesse a zero almeno come $\tau e^{-b|\omega|}$).

(H) *Commenti:*

(1) Così, *a fortiori*, dovremo attenderci di dover richiedere forti proprietà di regolarità su \underline{u}_0 , oltre che opportune proprietà per i valori di \underline{u} e delle sue derivate sul bordo $\partial\Omega$ (cfr. osservazione seguente la (8.13)), perché l'algoritmo (8.20) possa convergere alla soluzione corretta all'equazione di NS (che, a differenza dell'equazione del calore non sappiamo neppure se davvero ammetta una soluzione).

(2) Però le condizioni di regolarità in questione potrebbero in ultima analisi ridursi a proprietà di analiticità di \underline{u}_0 e della frontiera $\partial\Omega$ di Ω (che pure influenza la regolarità di p_0 e quindi di \underline{u}_0 e \underline{u} , attraverso il problema di Neumann (8.3)).

Purtroppo il problema è aperto, almeno se $d = 3$, e non si sa neppure se sotto queste condizioni l'equazione ammetta, in generale, soluzione definita per tutti i tempi $t > 0$.

(3) Si noti che la proposizione è in apparente contraddizione con la teoria dell'equazione del calore. Si dice di solito che l'equazione del trasporto del calore in una sbarretta conduttrice, con temperatura fissata (uguale a zero nei nostri esempi) agli estremi e dato iniziale regolare ammette una ed una sola soluzione. Le funzioni che si costruiscono come limite delle approssimazioni con passo temporale t_0 a partire da un dato iniziale che, ad esempio, è di classe C^∞ e nullo fuori di un intervallo $[-a, a]$ con $a < \pi$, e analitica all'interno di $(-a, a)$ sono probabilmente soluzioni dell'equazione del calore per una sbarretta $[-a, a]$ (non conosco un riferimento contenente la dimostrazione di questa proprietà). Viste come funzioni su $[-\pi, \pi]$ sono nulle fuori di $[-a, a]$ e quindi non sono C^∞ in $[-\pi, \pi]$ (in generale avranno le derivate *prime* discontinue in $\pm a$).

(4) In altre parole la chiave del teorema di unicità sta nel requisito che la T sia effettivamente almeno una volta differenziabile con derivate continue. Ovviamente si potrebbe invece prendere l'atteggiamento di chiamare per definizione *soluzioni dell'equazione del calore* i limiti delle approssimazioni discretizzate: in questo caso si avrebbe probabilmente un teorema di esistenza e unicità (eventualmente sotto condizioni addizionali sui dati iniziali) ma le soluzioni sarebbero diverse da quelle descritte dalle soluzioni "classiche" che invece *per definizione* sono quelle che sono di classe

C^1 in $[-\pi, \pi]$.

(5) Si vede dunque che qui ci sono problemi interpretativi piuttosto profondi e che non possono essere risolti su un piano puramente matematico: per capire in ogni caso fisicamente interessante quale sia il senso corretto in cui cercare una soluzione occorre rifarsi alle proprietà fisiche che l'equazione dovrebbe tradurre in modello matematico.

È possibile che tali proprietà richiedano una o un'altra nozione di soluzione (a seconda del problema fisico che le origina). È chiaro che se queste considerazioni si possono già fare a proposito di una equazione così semplice come la equazione unidimensionale del calore, a maggior ragione hanno rilevanza per equazioni come quelle di Eulero e Navier Stokes, che ne sono in un certo senso versioni non lineari. In generale le equazioni alle derivate parziali possono nascondere grossi (e interessanti) problemi di esistenza e unicità anche nei casi in cui invece si dice, di solito, che tali problemi non esistono (come è spesso detto dell'equazione del calore): e mostra che una volta di più atteggiamenti dogmatici conducono solo a non vedere l'esistenza di problemi interessanti.

(6) Che questa analisi possa avere una importanza reale già per l'equazione del calore lo mostra il fatto che certamente rende (almeno) assai meno convincente il preteso paradosso che vuole che l'equazione del calore sia incompatibile con la relatività ristretta (le "onde di calore" si propagherebbero con velocità infinita): un dato iniziale a supporto in una regione finita evolverebbe secondo l'equazione del calore in un dato non nullo a distanza arbitraria, e quindi si propagherebbe con velocità infinita. Ora questa è per lo meno una conclusione affrettata in quanto definendo soluzione quello che si ottiene come limite dell'algoritmo di Eulero prima descritto si troverebbe invece una soluzione che non solo non va a velocità infinita, ma addirittura non si propaga affatto (in quanto resterebbe diversa da zero solo dove lo era inizialmente). Questo ovviamente è solo un argomento critico aggiuntivo a quello, ben noto, che osserva che l'equazione del calore è un'equazione macroscopica dedotta da ipotesi microscopiche che coinvolgono nozioni e idee non relativistiche come il "raggio delle molecole" (legato al libero cammino medio) che appare nel coefficiente di conducibilità c , e che pure inficierebbero il carattere "paradossale" della propagazione a velocità infinita delle soluzioni dell'equazione del calore.

(7) in conclusione gli algoritmi discussi in questo paragrafo si rivelano solo di interesse per le difficoltà che illustrano e che mostrano quanto molteplici siano gli aspetti che la teoria del moto di un fluido può presentare. Sono di scarsa o nessuna utilità per le applicazioni.

Problemi: Buona posizione dell'equazione del calore e altre osservazioni.

[1] Si considera il problema agli autovalori associato alla (8.14):

$$T'' - \sigma_\varepsilon T = -\lambda^2 T, \quad \text{in } [-\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon] \quad (*)$$

e si mostri che per $|x| > \varepsilon$ la T ha la forma $Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x}$ mentre per $|x| < \varepsilon$ ha la forma $\alpha \cosh \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} x + \beta \sinh \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} x$.

$$\sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} x + \beta \operatorname{sh} \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} x.$$

[2] Si trovino le condizioni di raccordo per le autofunzioni e le condizioni che determinano λ per il problema agli autovalori del problema [1]. (*Idea*: se A_+ , B_+ e A_- , B_- sono i coefficienti della stessa soluzione per $x > \varepsilon$ o $x < -\varepsilon$ la condizione di periodicità impone, per ogni η :

$$A_+ e^{i\lambda(\pi+\varepsilon+\eta)} + B_+ e^{-i\lambda(\pi+\varepsilon+\eta)} = A_- e^{i\lambda(-(\pi+\varepsilon)+\eta)} + B_- e^{-i\lambda(-(\pi+\varepsilon)+\eta)}$$

dunque: $A_- = A_+ e^{2i\lambda(\pi+\varepsilon)}$, $B_- = B_+ e^{-2i\lambda(\pi+\varepsilon)}$.

Per semplicità studieremo solo le autofunzioni pari in x (il che è sufficiente allo studio del problema (8.14) con dato iniziale pari: $T_0(x) = T_0(-x)$). La condizione di parità significa: $A_+ e^{2i\lambda(\pi+\varepsilon)} e^{-i\lambda x} + B_+ e^{-2i\lambda(\pi+\varepsilon)} e^{i\lambda x} = A_+ e^{i\lambda x} + B_+ e^{-i\lambda x}$ e cioè: $B_+ e^{-2i\lambda(\pi+\varepsilon)} = A_+$. Pertanto per $x \geq 0$ la autosoluzione pari con autovalore λ dovrà avere la forma:

$$\begin{aligned} T(x) &= A(e^{i\lambda x} + e^{2i\lambda(\pi+\varepsilon)} e^{-i\lambda x}) & x > \varepsilon \\ T(x) &= \alpha \cosh \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} x & |x| < \varepsilon \end{aligned} \quad (**)$$

con A, α opportune. E così la condizione di raccordo sarà:

$$\begin{aligned} A(e^{i\lambda\varepsilon} + e^{2i\lambda(\pi+\varepsilon)-i\lambda\varepsilon}) &= \alpha \operatorname{ch} \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} \varepsilon \\ i\lambda A(e^{i\lambda\varepsilon} - e^{2i\lambda(\pi+\varepsilon)-i\lambda\varepsilon}) &= \alpha \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} \operatorname{sh} \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi l' autovalore λ viene determinato da:

$$\frac{1 + e^{2\pi i\lambda}}{1 - e^{2\pi i\lambda}} \equiv i \cotg \pi \lambda = \frac{\lambda i}{\sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2}} \coth \varepsilon \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda^2} \quad (***)$$

Per le autofunzioni dispari si procede in modo analogo.)

[3] Si mostri che se gli autovalori relativi alle autofunzioni pari della (*) sono numerati, al crescere di λ , con gli indici $0, 1, 2, \dots$ si ha:

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) + O(\varepsilon n), \quad n \leq \lambda_n \leq n + 1 \quad \text{con } n \text{ intero}$$

se $\sigma_\varepsilon \varepsilon^2 \equiv E \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$. Si noti che la seconda stima è migliore della prima se εn è grande. (*Idea*: basta disegnare il grafico dei due membri della (***), facendo attenzione a distinguere i casi $\sigma_\varepsilon > \lambda^2$ e $\sigma_\varepsilon < \lambda^2$).

[4] Si faccia vedere che il quadrato della norma L_2 di $T_n(x)$, $\int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} |T_n(x)|^2 dx$, è:

$$|A|^2 4\pi \left(1 + \frac{\sin 2\pi \lambda_n}{2\pi \lambda_n}\right) + \varepsilon |\alpha|^2 \left(1 + \frac{\sinh 2\sqrt{E - \varepsilon^2 \lambda_n^2}}{2\sqrt{E - \varepsilon^2 \lambda_n^2}}\right)$$

così che se T_n is normalizzata a 1 in L_2 si ha $|A|^2 < 1/8\pi$ per $n \geq 1$ (notando che $\lambda_n \geq 1$ per $n \geq 1$). Si mostri altresì che $|T_n(x)| \leq C$ per un' opportuna costante n -indipendente C . (*Idea*: Le condizioni di raccordo in [3] implicano:

$$\left|\frac{\alpha}{A}\right| \leq \begin{cases} \min \left(2/|\cos \varepsilon \sqrt{\lambda_n^2 - \sigma_\varepsilon} - \sigma_\varepsilon|, 2/\sqrt{\lambda_n^2 - \sigma_\varepsilon} |\sin \varepsilon \sqrt{\lambda_n^2 - \sigma_\varepsilon}| \right) & \text{if } \sigma_\varepsilon < \lambda_n^2 \\ \min \left(2/\cosh \varepsilon \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda_n^2}, 2/\sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda_n^2} \sinh \varepsilon \sqrt{\sigma_\varepsilon - \lambda_n^2} \right) & \text{if } \sigma_\varepsilon \geq \lambda_n^2 \end{cases}$$

quindi per $n \geq 1$ (cioè $\nu \geq 1$) si vede che $|\alpha/A| \leq 4$.)

[5] Si mostri che i risultati di [3], [4] implicano che $T_n(x)$ può essere scritta come

$$T_n(x) = \frac{(e^{i\lambda_n x} - e^{-i\lambda_n x} + O(\varepsilon n))}{\text{normalizz.}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n + \frac{1}{2})x + O(\varepsilon n), \quad x > \varepsilon$$

Si mostri anche che i risultati in [4] sono in accordo con i corrispondenti del problema $T'' = -\lambda^2 T$ in $[0, 2\pi]$ con condizioni $T(0) = T(2\pi) = 0$ che invece danno autovalori $\lambda_n^2 = -\frac{n^2}{4}$ con autovettori $\pi^{-1/2} \sin \frac{nx}{2}$. (*Idea*: basta osservare che i due problemi sono equivalenti se si pensano $[-\pi, \pi]$ e $[0, 2\pi]$ come due cerchi uguali e si identifica $x = \pi$ del primo con $x = 0 = 2\pi$ del secondo: con questo cambiamento le autofunzioni di ordine n dispari del problema in $[0, 2\pi]$ divengono quelle pari in x del problema in $[-\pi, \pi]$ (e quelle di ordine pari corrispondono a quelle dispari in x)).

[6] Si mostri che la soluzione della (8.23) con dato iniziale ϑ_0 pari in x e come in (8.23) può essere scritta, per $t > 0$, in termini delle autofunzioni discusse nei problemi 1%4 nella forma:

$$T_\varepsilon(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k^2 t} \langle T_k, \vartheta_0 \rangle T_k(x)$$

ove $\langle T, T' \rangle \equiv \int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} T(x) T'(x) dx$: si veda (8.23) per la definizione di ϑ_0 .

[7] Si supponga che ϑ_0 sia pari in x . Si mostri che i risultati di [4] implicano che $\langle T_k, \vartheta_0 \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \bar{T}_k, \tilde{T}_0 \rangle$ ove \tilde{T}_0 è il limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vartheta_0(x)$ e \bar{T}_k sono le autofunzioni pari del problema:

$$\begin{aligned} T'' &= -\lambda^2 T, \quad \text{in } [-\pi, \pi]/\{0\} \quad \text{con periodicità } 2\pi \\ T(0) &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

ossia, per $x > 0$:

$$\bar{T}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x, \quad \bar{\lambda}_k = k + \frac{1}{2} \quad (b)$$

e inoltre si verifichi che: $\lambda_k \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\lambda}_k$ e $\lambda_k^2 \geq C \bar{\lambda}_k^2$ per ogni $k, |\varepsilon| < 1$, se C è opportuna. Se ne deduca che:

$$T_\varepsilon(\xi, t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\bar{\lambda}_k^2 t} \langle \bar{T}_k, \tilde{T}_0 \rangle \bar{T}_k(x) \quad (c)$$

e che il limite $T(\xi, t)$ risolve l'equazione del calore su $[-\pi, \pi]/\{0\}$ con condizione al bordo $T(0) = 0$ a $x = 0$. Si verifichi che questo conduce facilmente ad una soluzione di (8.12) perchè (8.12) può essere interpretata come l'equazione qui considerata "traslata di π ". (*Idea*: per [4] i termini della serie per $T_\varepsilon(\xi, t)$ sono stimabili con una costante per $e^{-\lambda_n^2 t}$ e ovviamente $\langle T_k, T_0 \rangle T_k(x)$ converge al valore corrispondente nella espressione per $T(\xi, t)$.)

[8] Si consideri, nel caso $d = 2$, una legge di forza solenoidale non conservativa $\underline{g} \in C^\infty(\Omega)$ nulla su $\partial\Omega$ e sia γ un contorno chiuso, interno a Ω , tale che $I = \int_\gamma \underline{g} \cdot d\underline{\xi} \neq 0$. Si faccia vedere che in questo caso la (8.9) non è risolubile se il dato iniziale è $\underline{u}_0 = \underline{0}$. Si fornisca un esempio. (*Idea*: si mostri che se p esistesse si avrebbe, integrando la relazione $\Delta p = 0$ sul dominio delimitato da $\partial\Omega$ e $\gamma \subset \Omega$, necessariamente $I=0$. Sia ora Ω una sfera di raggio R e $\underline{A}(x) \not\equiv \underline{0}$ un campo vettoriale a rotore non nullo di classe C^∞ e nullo fuori della sfera di raggio $R/2$: si ponga $\underline{g} = \text{rot } \underline{A}$.)

[9] Si consideri un campo di velocità nel semispazio superiore $z \geq 0$ di componenti:

$$u_1 = -y \chi(z) f(x^2 + y^2), \quad u_2 = x \chi(z) f(x^2 + y^2), \quad u_3 = 0$$

ove $\chi(z) = z$ per $z \leq h$, $h > 0$ prefissato, e poi $\chi(z) \equiv 0$ per $z > 2h$, mentre $f(r^2) = 0$ per $r > R$, con $R > 0$ prefissato. Si mostri che \underline{u} ha divergenza nulla ma la (8.9) non è risolubile, per χ, f generici. (*Idea*: Si noti che $\Delta \underline{u} = \chi(z)(8f' + 4r^2 f'')(-y, x, 0)$, se $r^2 \equiv x^2 + y^2$ e $z < h$. Quindi \underline{u} e $\Delta \underline{u}$ sono entrambi nulli sulla frontiera $z = 0$. Inoltre:

$$-\underline{\partial} \cdot (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) \equiv \sigma(z^2, r^2) \equiv 2(f(r^2)^2 + 2f(r^2)f'(r^2)r^2)\chi(z)^2$$

Dunque (supponendo $\underline{g} = \underline{0}$) $\underline{\partial} p = 0$ su $z = 0$ e il corrispondente problema di Neumann si può risolvere con il metodo della immagine. Il potenziale p è allora il potenziale elettrostatico generato da una distribuzione di carica σ a simmetria cilindrica attorno all'asse z e centro nell'origine e a simmetria per riflessione attorno al piano $z = 0$. Allora a grande distanza il campo elettrico può essere calcolato all'ordine dominante in R^{-1} e si vede che la sua componente tangenziale al piano $z = 0$ è non nulla e di ordine R^{-4} se $\int r^2 \sigma(r^2, z^2) r dr dz \neq 0$ (si può dire in termini di elettrostatica che il campo elettrico è dominato dal momento di dipolo più basso e tale momento è il momento di quadrupolo appunto proporzionale a R^{-4}). Si constati che il momento di dipolo è identicamente nullo, qualunque siano f e χ , a partire dalla osservazione che $\sigma \equiv \chi^2 \frac{\partial r^2 f^2}{\partial r^2}$.)

[2.1.10]: Si consideri l'equazione del calore in $[-\pi, \pi]$, $\dot{T} = T''$, con condizioni periodiche al bordo e dato iniziale $T_0(x)$ periodico e analitico con trasformata di Fourier $\hat{T}_0(\omega)$, $\omega = 0, \pm 1, \dots$; quindi esistono due costanti $\tau, b > 0$ tali che $|\hat{T}_0(\omega)| \leq \tau e^{-b|\omega|}$. Si mostri che la norma L_2 di $(1 - \omega^2 t/k)^k \hat{T}_0(\omega)$ può divergere per $k \rightarrow \infty$ sebbene per ogni ω si abbia $(1 - \omega^2 t/k)^k \hat{T}_0(\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{-\omega^2 t} \hat{T}_0(\omega)$, c.f.r. (8.27). Questo implica che in generale, perfino se T_0 è analitica, il metodo d'approssimazione in (8.24) *non converge* alla soluzione né nel senso di L_2 né puntualmente e restando uniformemente limitata. (*Idea*: Si prenda $\hat{T}_0(k) \equiv \tau e^{-b|k|}$ e si stimi la somma $\sum_{\omega} (1 - \omega^2 t/k)^{2k} \tau^2 e^{-2b|\omega|}$ a mezzo del solo termine con $\omega^2 t = 3k$.)

[2.1.11]: Nel contesto di [2.1.10] si mostri che anche se $\hat{T}_0(\omega) = \tau e^{-b\omega^2}$ ancora non si può avere convergenza L_2 di $T_k(x)$ per tutti i tempi $t > 0$. (*Idea*: Stessa del problema precedente.)

┐

┐

102

§8 Algoritmi empirici

.

┐

┐

§9 Un'altra classe di algoritmi empirici. Il metodo spettrale. Il problema di Stokes. Analogia giroscopica.

Un metodo sostanzialmente diverso dal metodo delle approssimazioni successive discusso al §8 è il metodo “dei troncamenti”, o “spettrale”. Il nome è dovuto al fatto che in esso si fa esplicitamente uso della rappresentazione di \underline{u} sulla base generata dall'operatore di Laplace su $X_{\text{rot}}(\Omega)$ e quindi è un metodo associato allo spettro di questo operatore.

(A) Caso di condizioni al bordo periodiche: “riduzione” ad un'equazione ordinaria. L'algoritmo spettrale.

Lo esaminiamo prima nel caso di un fluido che occupa il toro T^d , cioè di un fluido racchiuso in un cubo con condizioni periodiche al contorno.

In questo caso i campi di velocità e pressione, supposti regolari, ammetteranno rappresentazioni di Fourier che può essere considerata come lo sviluppo dei campi sulla base delle onde piane o, equivalentemente, sulla base generata dagli autovettori¹ dell'operatore di Laplace:

$$9.1 \quad \underline{u}(\xi, t) = \sum_{\underline{k}} \hat{\underline{u}}_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \xi}, \quad p(\xi, t) = \sum_{\underline{k}} p_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \xi} \quad (9.1)$$

ove $\underline{k} = 2\pi L^{-1} \underline{n}$ con L = lato del contenitore e \underline{n} è un vettore a componenti intere. Per le trasformate di Fourier adotteremo le convenzioni:

$$9.2 \quad \underline{u}(\underline{x}) = \sum_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \hat{\underline{u}}_{\underline{k}}, \quad \hat{\underline{u}}(\underline{k}) = L^{-d} \int_{T^d} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \underline{u}(\underline{x}) d\underline{x}$$

$$9.2 \quad \|\underline{u}\|_2^2 \equiv \|\underline{u}\|_{L_2(T^d)}^2 = L^d \sum_{\underline{k}} |\hat{\underline{u}}_{\underline{k}}|^2 = \int_{T^d} |\underline{u}(\underline{x})|^2 d\underline{x} \quad (9.2)$$

La condizione di divergenza nulla nel caso $d = 3$ richiede che, per $\underline{k} \neq \underline{0}$:

$$9.3 \quad \hat{\underline{u}}_{\underline{k}} = \gamma_{\underline{k}}^1 \underline{e}_{\underline{k}}^1 + \gamma_{\underline{k}}^2 \underline{e}_{\underline{k}}^2 \equiv \underline{\gamma}_{\underline{k}} \quad (9.3)$$

ove $\underline{e}_{\underline{k}}^1, \underline{e}_{\underline{k}}^2$ sono due vettori unitari ortogonali a \underline{k} . Mentre se $d = 2$ si deve avere $\hat{\underline{u}} = \gamma_{\underline{k}} \underline{k}^\perp / |\underline{k}|$, se $\underline{k} = (k_1, k_2)$ e $\underline{k}^\perp = (k_2, -k_1)$.

Considereremo solo equazioni di Eulero e NS in cui la forza applicata $\underline{g}(\xi)$ ha risultante nulla, $\int \underline{g}(\xi) d\xi = \underline{0}$: questo per evitare che il baricentro del fluido si muova di moto accelerato uniforme (si noti che, con condizioni al bordo periodiche, vale il teorema del baricentro). Quindi:

$$9.4 \quad \partial_t \int \rho \underline{u} d\xi = \int \underline{g} d\xi = \underline{0} \quad (9.4)$$

¹ Consideriamo in questo paragrafo solo campi vettoriali reali: ciononostante è talvolta conveniente esprimerli in termini di onde piane complesse piuttosto che usare onde di seni e coseni. Non discuteremo ulteriormente questa questione di notazioni.

e allora, cambiando eventualmente riferimento inerziale, non è restrittivo supporre che $\int \underline{u} d\xi = \underline{0}$. Così pure si può fissare la costante additiva della pressione in modo che $\int p d\xi \equiv \underline{0}$.

Con tali convenzioni e ipotesi riscriviamo le (9.1):

$$9.5 \quad \underline{u}(\xi, t) = \sum_{\underline{k} \neq \underline{0}} \underline{\gamma}_{\underline{k}}(t) e^{i\underline{k} \cdot \xi}, \quad p(\xi, t) = \sum_{\underline{k} \neq \underline{0}} p_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \xi} \quad (9.5)$$

e allora le equazioni di E o NS divengono equazioni ordinarie per le componenti $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ del campo \underline{u} . Si trova:

$$9.6 \quad \underline{u}(\xi) \cdot \underline{\partial} \underline{u}(\xi) = \sum_{\underline{h}, \underline{k}} e^{i(\underline{h} + \underline{k}) \cdot \xi} (\underline{\gamma}_{\underline{h}} \cdot i\underline{k}) \underline{\gamma}_{\underline{k}} \quad (9.6)$$

Se per $\underline{k} \neq \underline{0}$ definiamo l' operatore di proiezione ortogonale $\Pi_{\underline{k}}$ di R^3 sul piano ortogonale a \underline{k} :

$$9.7 \quad (\Pi_{\underline{k}} w)_i = w_i - \frac{w \cdot \underline{k}}{\underline{k}^2} k_i \quad (9.7)$$

vale la ovvia identità:

$$9.8 \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} \equiv (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) \Pi_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} + (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) (1 - \Pi_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2}) \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} \quad (9.8)$$

Vediamo che le equazioni:

$$9.9 \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0, \quad \underline{\dot{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\rho^{-1} \underline{\partial} p + \underline{g} + \nu \Delta \underline{u} \quad (9.9)$$

diventano:

$$9.10 \quad \begin{aligned} \underline{\dot{\gamma}}_{\underline{k}} &= -\nu \underline{k}^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} + \Pi_{\underline{k}} \underline{g}_{\underline{k}} \\ p_{\underline{k}} &= -\rho \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \frac{1}{\underline{k}^2} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) (\underline{k} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}) - \frac{i\rho}{\underline{k}^2} \underline{\hat{g}}_{\underline{k}} \cdot \underline{k} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Si vede che la pressione “sparisce” e le equazioni per le “componenti essenziali” dei campi descriventi il nostro sistema divengono:

$$9.11 \quad \underline{\dot{\gamma}}_{\underline{k}} = -\nu \underline{k}^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} + \underline{\hat{g}}_{\underline{k}}, \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}}(0) = \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 \quad (9.11)$$

avendo supposto $\Pi_{\underline{k}} \underline{\hat{g}}_{\underline{k}} \equiv \underline{\hat{g}}_{\underline{k}}$, visto che la parte di gradiente di $\underline{\hat{g}}_{\underline{k}}$, (ossia la componente di $\underline{\hat{g}}_{\underline{k}}$ parallela a \underline{k}), si può eventualmente inglobare nella pressione, come si vede dalla seconda delle (9.10). E alle (9.11) si deve sempre aggiungere la condizione di realtà di \underline{u} , cioè $\underline{\gamma}_{\underline{k}} = \overline{\underline{\gamma}_{-\underline{k}}}$: sottintenderemo sempre questa condizione.

Le equazioni di Eulero si ottengono ponendo $\nu = 0$.

Se $\nu > 0$ il termine di attrito è sorgente di coefficienti molto grandi (per $\underline{k}^2 \rightarrow \infty$) e quindi di problemi in eventuali algoritmi risolutivi. Conviene quindi riscrivere la (9.11) come:

$$\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t) = e^{-\nu \underline{k}^2 t} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 + \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \left(\hat{g}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}(\tau) \cdot \underline{k}_2) \prod_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}(\tau) \right) d\tau \quad (9.12)$$

in cui si vede che il termine di attrito è in realtà un termine che può aiutare nella costruzione di algoritmi di soluzione dell'equazione, dal momento che tende a "eliminare" le componenti con $|\underline{k}| \gg 1/\sqrt{\nu}$ ossia le componenti "ultraviolette" o a corta lunghezza d'onda del campo di velocità.

Si osservi ora che (9.12) genera naturalmente un algoritmo di soluzione:

$$\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{(n)} = e^{-\nu \underline{k}^2 t} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 + t_0 \sum_{m=1}^n e^{-\nu \underline{k}^2 t_0 (n-m)} \left(\hat{g}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^{(m)} \cdot \underline{k}_2 \prod_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^{(m)} \right) \quad (9.13)$$

ove le $\underline{\gamma}^{(m)}$ sono calcolate in mt_0 ; e dunque:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ nt_0 = t}} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^{(n)} = \underline{\gamma}_{\underline{k}}(t) \quad (9.14)$$

dovrebbe essere una soluzione dell'equazione.

Questa proposta è assoggettabile ad alcune delle critiche del tipo di quelle del §8 precedente e ci dobbiamo attendere che possa essere corretta solo se si fanno ulteriori ipotesi di regolarità su \underline{u}^0 e cioè su $\underline{\gamma}^0$.

La (9.13) richiede una somma su un numero infinito di termini. Per applicazioni concrete è necessario dunque trovare una approssimazione che coinvolga solo un numero finito di termini. Uno dei metodi più seguiti è quello di introdurre un *taglio ultravioletto* o *troncamento* ultravioletto. Questo significa introdurre un parametro N (*taglio*) e vincolare $\underline{k}, \underline{k}_1, \underline{k}_2$ in (9.12), o in (9.11), ad essere $\leq N$. Si ha ora un sistema di un numero finito di equazioni ordinarie e la loro soluzione $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^N(t)$, o la soluzione approssimata $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{(n)N}$ corrispondente alle (9.13), dovrebbe tendere alla soluzione cercata nel limite $N \rightarrow \infty$, o, nel caso della soluzione corrispondente alla (9.13), nel limite $N \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, nt_0 = t$. L'ordine in cui tali limiti andrebbero presi non dovrebbe avere influenza sul risultato, o dovrebbe risultare dalla teoria della convergenza: ma non è *a priori* chiaro che esista effettivamente il limite, né che la soluzione dell'equazione sia effettivamente costruibile in questo modo.

La semplicità di questo algoritmo, rispetto a quelli del §8 precedente è da ascrivere soprattutto alla semplicità delle condizioni al contorno che stiamo usando. L'algoritmo viene chiamato anche *metodo spettrale* o *algoritmo spettrale* per motivi che saranno chiari dalla sua generalizzazione al caso di condizioni al bordo non periodiche.

Ha tuttavia un grande vantaggio concettuale e pratico che lo rende uno degli algoritmi più utilizzati nello studio delle soluzioni numeriche delle

equazioni di Eulero e Navier Stokes. A differenza del metodo del §8 questo algoritmo rende manifesto il fatto che la viscosità appare esplicitamente come un fattore che causa lo smorzamento dei termini a grande numero d'onda, e invece di apparire come un fattore “grande” ($\sim \nu \underline{k}^2$) appare come fattore “piccolo” ($\sim e^{-\tau \underline{k}^2 \nu}$).

(B) Il metodo spettrale nel caso di dominio Ω con frontiera e il problema delle condizioni al bordo.

Ci si può domandare se sia possibile costruire un algoritmo di troncamento anche nel caso in cui Ω ha una frontiera.

La risposta è semplice e affermativa, se si osserva che il vero motivo per cui si riesce a “esponenziare” i termini che contengono la viscosità sta nel fatto che il campo di velocità è stato sviluppato in autofunzioni dell'operatore di Laplace che è l'operatore che è associato ai termini di viscosità nell'equazione di NS.

Il caso delle condizioni al contorno periodiche è stato assai semplice perchè in assenza di frontiera è possibile trovare una base per i campi \underline{u} a divergenza nulla che sia una famiglia di autovettori per l'operatore di Laplace Δ . In presenza di frontiera non sarà in generale possibile trovare autovettori dell'operatore di Laplace che abbiano divergenza nulla e si annullino sul bordo (ossia non esistono autovettori dell'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet al bordo e con divergenza nulla).

Però se si definisce l'operatore di Laplace a divergenza nulla come l'operatore su X_{rot} definito dalla forma quadratica su X_{rot}^0 (cfr §6, (6.16)):

$$9.15 \quad D(\underline{u}) = \int_{\Omega} (\underline{\partial} \underline{u})^2 dx \quad (9.15)$$

si può dimostrare il seguente teorema, c.f.r., per uno schema della dimostrazione, i problemi:

Teorema: Nello spazio X_{rot} , (c.f.r. (6.16)), esiste una base ortonormale di vettori che verificano:

$$9.16 \quad \begin{aligned} (1) & \underline{u}_j \in C^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} \underline{u}_i \cdot \underline{u}_j = \delta_{ij} \\ (2) & \underline{\partial} \cdot \underline{u}_j = 0 \quad \text{in } \Omega \\ (3) & \text{esiste } \mu_j \in C^\infty(\Omega) \text{ tale che:} \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\Delta \underline{u}_j - \underline{\partial} \mu_j = -\lambda_j^2 \underline{u}_j \quad \text{in } \Omega$$

$$(4) \underline{u}_j = 0 \quad \text{in } \partial\Omega$$

$$(5) \text{ esistono costanti } \alpha, c, c', c_k > 0 \text{ tali che:}$$

$$9.17 \quad c j^{2/d} \leq |\lambda_j| \leq c' j^{2/d}, \quad |\partial^k \underline{u}_j| \leq c_k j^{\alpha+k/d} \quad (9.17)$$

per ogni $\underline{x} \in \Omega$, se $d = 2, 3$ è la dimensione dello spazio.

Allora ogni dato \underline{u} si scriverà:

$$9.18 \quad \underline{u}(\xi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(t) \underline{u}_j(\xi) \quad (9.18)$$

e quindi possiamo esprimere in termini di γ_j i risultati delle azioni su \underline{u} degli operatori che appaiono nelle equazioni di Eulero e Navier Stokes. L'azione dell'operatore di Laplace della viscosità e dell'operatore non lineare di trasporto, se Π_{grad} e $\Pi_{rot} = 1 - \Pi_{grad}$ sono gli operatori di proiezione su $X_{rot}^\perp = X_{grad}$ e su X_{rot} , è rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 \Delta \underline{u} &= \sum_{j=1}^{\infty} -\lambda_j^2 \gamma_j \underline{u}_j(\xi) - \underline{\partial} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(\xi) \gamma_j \right) \\
 \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= \sum_{j_1, j_2=1}^{\infty} \gamma_{j_1} \gamma_{j_2} \underline{u}_{j_1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{j_2} = \\
 &= \sum_{j_1, j_2=1}^{\infty} \gamma_{j_1} \gamma_{j_2} \Pi_{rot} (\underline{u}_{j_1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{j_2}) + \sum_{j_1, j_2=1}^{\infty} \gamma_{j_1} \gamma_{j_2} \Pi_{grad} (\underline{u}_{j_1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{j_2})
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

e l'equazione NS diventa, se $\Pi_{grad} (\underline{u}_{j_1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{j_2}) \equiv \underline{\partial} \pi_{j_1 j_2}$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_j &= -\nu \lambda_j^2 \gamma_j - \sum_{j_1, j_2=1}^{\infty} \gamma_{j_1} \gamma_{j_2} \langle (\underline{u}_{j_1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{j_2}), \underline{u}_j \rangle + g_j \\
 \rho^{-1} p &= -\nu \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(\xi) \gamma_j - \sum_{j_1, j_2} \gamma_{j_1} \gamma_{j_2} \pi_{j_1 j_2}(\xi)
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

ove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\underline{x}) g(\underline{x}) d\underline{x}$. E le (9.20) possono essere scritte:

$$\begin{aligned}
 \gamma_j(t) &= e^{-\nu \lambda_j^2 t} \gamma_j^0 + \int_0^t e^{-\nu \lambda_j^2 (t-\tau)} \left(g_j - \sum_{j_1, j_2=1}^{\infty} \gamma_{j_1}(\tau) \gamma_{j_2}(\tau) C_j^{j_1 j_2} \right) d\tau \\
 C_j^{j_1 j_2} &= \int_{\Omega} (\underline{u}_{j_1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{j_2}) \cdot \underline{u}_j d\xi \equiv \langle (\underline{u}_{j_1} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_{j_2}), \underline{u}_j \rangle
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

Questo fa vedere che anche nel caso in cui Ω abbia una frontiera è possibile scrivere le equazioni di NS in modo che la viscosità appaia come un fattore “piccolo” anziché come un termine additivo “grande”.

Si può ottenere anche una discretizzazione delle equazioni di Eulero ponendo $\nu = 0$ in (9.21). Però ora la condizione al contorno è $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ anziché $\underline{u} = 0$ e quindi non ci si può attendere che la serie per $\underline{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \underline{u}_j$ converga bene perché, altrimenti, questo implicherebbe $\underline{u} = 0$ sul bordo, essendo $\underline{u}_j = 0$ sul bordo. *Non sarebbe quindi una buona idea usare la base in questione per la rappresentazione delle soluzioni delle equazioni di Eulero nello stesso dominio.*

Questa è una proprietà generale poichè le equazioni di E e di NS vengono studiate, di solito, imponendo condizioni al contorno diverse. Il limite $\nu \rightarrow 0$ in cui ingenuamente le equazioni di NS dovrebbero ridursi a quelle di Eulero è un limite piuttosto singolare e la convergenza di soluzioni delle equazioni di NS a quelle di Eulero *deve* essere piuttosto *impropria* vicino a

$\partial\Omega$, ove interessanti fenomeni di superficie dovranno necessariamente aver luogo. Naturalmente il caso di condizioni al bordo periodiche è la notevole eccezione.

Le (9.20),(9.21) possono essere trattate come le analoghe (9.10) e (9.12) e ridotte, con un "taglio ultravioletto" ad un numero finito di equazioni, generando l' algoritmo spettrale generale.

(C) *Il problema di Stokes.*

Si definisce "problema di Stokes" l' equazione di NS linearizzata intorno a $\underline{u} = \underline{0}$, c.f.r. problemi di §2:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}} &= -\rho^{-1}\underline{\partial}p + \nu\Delta\underline{u} + \underline{g}, & \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \underline{u} &= \underline{0}, & & & \text{in } \partial\Omega \\ \underline{u}|_{t=0} &= \underline{u}^0 \in X_{rot}(\Omega) \end{aligned} \quad (9.22)$$

e si cercano soluzioni di classe $C^\infty(\Omega \times (0, +\infty))$ che per $t \rightarrow 0$ abbiano la proprietà $\underline{u} \rightarrow \underline{u}^0$ almeno in senso $L_2(\Omega)$ (c.f.r. nota ¹ in (E) del §8). Porremo $\underline{g} = \underline{0}$ per semplicità.

Il teorema del punto (B) consente una soluzione completa di questo problema.

Si sviluppa, invero, \underline{u}^0 sulla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots$, c.f.r. (9.16):

$$\underline{u}^0(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^0 \underline{u}_j(\underline{x}) \quad (9.23)$$

e si verifica immediatamente che la soluzione è:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^0 e^{-\nu\lambda_j^2 t} \underline{u}_j(\underline{x}), \quad p(\underline{x}, t) = -\nu\rho \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^0 e^{-\nu\lambda_j^2 t} \mu_j \quad (9.24)$$

Dalle proprietà 1)%) del teorema del punto (B) segue che $\underline{u} \in C^\infty(\Omega \times (0, +\infty))$ e che $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ per $t > 0$.

È facile vedere che questa soluzione è unica. Si vede anche la stretta analogia con l' equazione del calore, della quale la equazione di Stokes può essere pensata come una versione "vettoriale".

In particolare può accadere che, se $\underline{u}^0 \in X_{rot}(\Omega)$ ma \underline{u}^0 non ha una serie (9.23) con i coefficienti γ_j^0 che tendono a zero molto velocemente per $j \rightarrow \infty$ (perchè \underline{u}_0 "non verifica bene" le condizioni al contorno), allora $\nu\Delta\underline{u}^0$ potrebbe differire da un campo che è nullo sul bordo più di quanto ci si possa aspettare: ossia di una quantità che non è "solo" il gradiente di un campo scalare p , in quanto il problema di Neumann sovradeterminato che dovrebbe dare p può risultare incompatibile, come nei casi discussi nel §6,§8 e nei relativi problemi, con esempi sull' equazione del calore).

Questa patologia si manifesta solo a $t = 0$ ed è spiegata come nel caso dell' equazione del calore (a mezzo di un modello fisico della condizione al contorno quale quello fornito dal metodo dell' attrito in (C) del §8).

Ovviamente nella (9.22) questo problema si pone solo a $t = 0$: se $t > 0$ infatti le (9.24) mostrano che la condizione al bordo è strettamente verificata (e il problema di Neumann sovradeterminato per p *diviene necessariamente compatibile* ed ha la seconda delle (9.24) come soluzione, che a $t = 0$ potrebbe non avere senso per cattiva convergenza della serie).

(D) *Commenti:*

(1) Si noti che il metodo spettrale per le equazioni di NS induce a credere che almeno per $t > 0$ la condizione al bordo sia rispettata: ci si può aspettare che l'attrito faccia sì che i coefficienti $\gamma_j(t)$ tendano a zero per $j \rightarrow \infty$ molto più rapidamente che per $t = 0$ in virtù dei coefficienti $e^{-\lambda_j^2 \nu(t-\tau)}$: quindi la serie (9.18) dovrebbe essere ben convergente e pertanto rispettare le condizioni al contorno, automaticamente verificate termine a termine. Questo è illustrato bene dalla teoria del problema di Stokes.

(2) Come vedremo l'argomento appena dato, essenzialmente corretto nel caso dell'equazione del calore (discussa al §8) e dell'equazione di Stokes, è ora molto più delicato e, soprattutto se $d = 3$, non è più corretto, principalmente a causa dei termini non lineari di trasporto nelle equazioni: si veda l'analisi del §13.

(E) *Analogia giroscopica in $d = 2$:*

Le equazioni di NS a $d = 2$ dimensioni possono porsi in una forma che ricorda assai quella delle equazioni di un corpo rigido. Le equazioni di Navier Stokes, (9.10), con $\underline{g} = \underline{0}$ per semplicità, si possono scrivere in termini delle grandezze scalari $\gamma_{\underline{k}_1}, \gamma_{\underline{k}_2}, \gamma_{\underline{k}_3}$, legate alle grandezze vettoriali $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ via le $\underline{\gamma}_{\underline{k}} = \gamma_{\underline{k}} \frac{\underline{k}^\perp}{|\underline{k}|}$ perchè se $d = 2$ la proprietà di divergenza nulla consente di esprimere $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ in termini di una quantità scalare $\gamma_{\underline{k}}$:

$$\underline{\gamma}_{\underline{k}} = \gamma_{\underline{k}} \frac{\underline{k}^\perp}{|\underline{k}|}, \quad \gamma_{\underline{k}} = -\gamma_{-\underline{k}}, \quad \text{se } \underline{k}^\perp = (k_2, -k_1), \quad \underline{k} = (k_1, k_2) \quad (9.25)$$

9.25

Se $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = \underline{0}$ notiamo allora che le equazioni (9.10) si scrivono:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}_1} &= -\nu \underline{k}_1^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_1} - i \left\{ \gamma_{\underline{k}_2} \gamma_{\underline{k}_3} \frac{(\underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_3)(\underline{k}_3^\perp \cdot \underline{k}_1)}{|\underline{k}_1| |\underline{k}_2| |\underline{k}_3|} + (2 \leftrightarrow 3) \right\} + .. \\ \dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}_2} &= -\nu \underline{k}_2^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} - i \left\{ \gamma_{\underline{k}_3} \gamma_{\underline{k}_1} \frac{(\underline{k}_3^\perp \cdot \underline{k}_1)(\underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2)}{|\underline{k}_1| |\underline{k}_2| |\underline{k}_3|} + (1 \leftrightarrow 3) \right\} + .. \\ \dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}_3} &= -\nu \underline{k}_3^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_3} - i \left\{ \gamma_{\underline{k}_1} \gamma_{\underline{k}_2} \frac{(\underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2)(\underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_3)}{|\underline{k}_1| |\underline{k}_2| |\underline{k}_3|} + (1 \leftrightarrow 2) \right\} + .. \end{aligned} \quad (9.26)$$

9.26

Si notino ora le proprietà di simmetria:

$$\underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2 = \underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_3 = \underline{k}_3^\perp \cdot \underline{k}_1 \stackrel{def}{=} a(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3) \quad (9.27)$$

9.27

con $a(\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3) \equiv -a$ ove a è \pm il doppio dell'area del triangolo formato dai vettori $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$ (e quindi è una funzione simmetrica per permutazioni

di $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$). Il segno è + se il triangolo $\underline{k}_1 \underline{k}_2 \underline{k}_3$ è percorso in senso orario e - altrimenti.

Tenendo conto di questa simmetria e delle relazioni

$$\begin{aligned} \underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2 &= -\underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_1, & \underline{k}_3 &= -\underline{k}_1 - \underline{k}_2 \\ \underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2^\perp &\equiv \underline{k}_1 \underline{k}_2, & \text{hence, for instance,} & \\ \underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_3^\perp - \underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_3^\perp &= \underline{k}_1^2 - \underline{k}_2^2 \end{aligned} \quad (9.28)$$

si trova, dopo un pó di calcoli:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{\underline{k}_1} &= -\nu \underline{k}_1^2 \overline{\gamma}_{\underline{k}_1} - i(\underline{k}_3^2 - \underline{k}_2^2) \tilde{a} \gamma_{\underline{k}_2} \gamma_{\underline{k}_3} + \dots \\ \dot{\gamma}_{\underline{k}_2} &= -\nu \underline{k}_2^2 \overline{\gamma}_{\underline{k}_2} - i(\underline{k}_1^2 - \underline{k}_3^2) \tilde{a} \gamma_{\underline{k}_1} \gamma_{\underline{k}_3} + \dots \\ \dot{\gamma}_{\underline{k}_3} &= -\nu \underline{k}_3^2 \overline{\gamma}_{\underline{k}_3} - i(\underline{k}_2^2 - \underline{k}_1^2) \tilde{a} \gamma_{\underline{k}_1} \gamma_{\underline{k}_2} + \dots \end{aligned} \quad (9.29)$$

ove $\tilde{a} = a/|\underline{k}_1| |\underline{k}_2| |\underline{k}_3|$.

Queste equazioni sono analoghe a quelle per la velocità angolare di un solido con un punto fisso. L' analogia è ancora più chiara nelle variabili $\omega_{\underline{k}} = \gamma_{\underline{k}}/|\underline{k}|$ che danno luogo alle equazioni:

$$\underline{k}_1^2 \dot{\omega}_{\underline{k}_1} = -\underline{k}_1^4 \nu \omega_{\underline{k}_1} + (\underline{k}_2^2 - \underline{k}_3^2) a i \omega_{\underline{k}_2} \omega_{\underline{k}_3} + \dots \text{ etc} \quad (9.30)$$

Si vede anche una interessante proprietà: ogni terna o "triade" $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$ tale che $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = \underline{0}$ dá luogo ad un sistema di equazioni (9.30) che, se le $\gamma_{\underline{k}}$ relative agli altri valori di \underline{k} (diversi da $\pm \underline{k}_1, \pm \underline{k}_2, \pm \underline{k}_3$) fossero nulli, descriverebbero il moto (*con attrito*) di un giroscopio "complesso" (perchè le $\omega_{\underline{k}}$ sono complesse).

Dunque le equazioni di Eulero si possono interpretare come descrittive una infinità di giroscopi, ciascuno associato ad una *triade* tale che $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = \underline{0}$: i giroscopi non sono indipendenti e il loro accoppiamento è descritto dal vincolo che se un vettore \underline{k} è comune a due triadi allora le $\omega_{\underline{k}}$ pensate come componenti di un giroscopio e dell' altro devono *essere uguali* (perchè $\omega_{\underline{k}}$ dipende solo da \underline{k} e non da quale delle (infinite) terne \underline{k} è pensato come membro).

I moti di un giroscopio complesso non sono semplici come quelli dell' ordinario giroscopio, neppure in assenza di attrito ($\nu \equiv 0$), e si comprende anche da questo punto di vista la difficoltà che si troverà nello studio delle proprietà qualitative delle soluzioni delle equazioni.

Notiamo infine che il giroscopio complesso può ammettere moti particolari interpretabili come moti di un sistema di giroscopi "reali", sebbene scrivendo $\omega_{\underline{k}} = \rho_{\underline{k}} e^{i\vartheta_{\underline{k}}}$ con $\rho_{\underline{k}}, \vartheta_{\underline{k}}$ reali si vede che *in generale* le fasi $\vartheta_{\underline{k}}$ non sono costanti.

È invero facile vedere che se i dati iniziali hanno particolari fasi allora i valori di tali fasi restano costanti e le $\rho_{\underline{k}}$ si muovono esattamente come le tre velocità angolari di un giroscopio ordinario (e quindi in assenza di

attrito i moti sono riducibili alle quadrature). Ad esempio questo accade se $\vartheta_j \equiv -3\pi/2$.

(F) *Analogia giroscopica in $d = 3$.*

Una analogia giroscopica è possibile, [Wa], anche nel caso $d = 3$ ed è basata sulle stesse identità elencate in (9.27) e (9.28) e sulla nozione di *elicità*. Supponendo $\underline{g} = \underline{0}$, si introducono per ogni \underline{k} due vettori unitari $\underline{h}_s(\underline{k})$, $s = \pm 1$, ortogonali a \underline{k} e fra loro ma complessi:

$$9.31 \quad \underline{h}_{s,\underline{k}} = \underline{v}_0(\underline{k}) + is \underline{v}_1(\underline{k}), \quad s = \pm 1 \quad (9.31)$$

ove $\underline{v}_0, \underline{v}_1$ sono due vettori unitari reali ortogonali fra loro e a \underline{k} e, inoltre, tali che $\underline{v}_0(-\underline{k}) = \underline{v}_0(\underline{k})$ e $\underline{v}_1(-\underline{k}) = -\underline{v}_1(\underline{k})$. In tal modo $\overline{\underline{h}_{s,\underline{k}}} = \underline{h}_{-s,\underline{k}} = \underline{h}_{s,-\underline{k}}$. Si suppone inoltre che la terna $\underline{v}_0, \underline{v}_1, \underline{k}$ sia levogira.

La base $\underline{h}_{-1,\underline{k}}, \underline{h}_{+1,\underline{k}}$ si chiama *base di elicità* e si dice che il vettore $\underline{h}_{s,\underline{k}}$ ha *elicità* s . Allora:

$$9.32 \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}} = \sum_{s=\pm 1} \gamma_{\underline{k},s} \underline{h}_{s,\underline{k}} \quad (9.32)$$

ove $\gamma_{\underline{k},s}$ sono grandezze scalari tali che $\gamma_{\underline{k},s} = \overline{\gamma_{-\underline{k},s}}$.

Le equazioni di NS (9.10) divengono allora:

$$9.33 \quad \begin{aligned} \dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}_3,s_3} &= -\nu \underline{k}_3^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_3,s_3} - \\ &- i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = \underline{0}} \gamma_{\underline{k}_1,s_1} \gamma_{\underline{k}_2,s_2} [\underline{h}_{s_1,\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2] [\underline{h}_{s_2,\underline{k}_2} \cdot \underline{h}_{s_3,\underline{k}_3}] \end{aligned} \quad (9.33)$$

L' espressione $[\underline{h}_{s_1,\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2] [\underline{h}_{s_2,\underline{k}_2} \cdot \underline{h}_{s_3,\underline{k}_3}]$ può essere studiata notando che il vettore $e^{-is\mu} \underline{h}_s$ si ottiene ruotando di μ la base $\underline{v}_0(\underline{k}), \underline{v}_1(\underline{k})$ in senso orario: questa osservazione consente di ridurre il calcolo di questo prodotto scalare a quello del caso piano ($d = 2$).

Dato il triangolo $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$ e le elicità s_1, s_2, s_3 e stabilito un riferimento cartesiano sul suo piano, in modo che il triangolo $\underline{k}_1 \underline{k}_2 \underline{k}_3$ sia percorso in senso orario, si possono trovare 3 angoli μ_1, μ_2, μ_3 tali che la rotazione oraria di $s_j \mu_j$ della base $\underline{v}_0(\underline{k}_j), \underline{v}_1(\underline{k}_j)$ la porti in una base $\tilde{\underline{v}}_0(\underline{k}_j), \tilde{\underline{v}}_1(\underline{k}_j)$ con $\tilde{\underline{v}}_0(\underline{k}_j)$ diretto come l' asse \underline{k}_j^\perp nel piano del triangolo e di componenti, su questo piano, $(-k_{j2}, k_{j1})$ se $\underline{k}_j = (k_{j1}, k_{j2})$. Si ha, allora:

$$9.34 \quad [\underline{h}_{s_1,\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2] [\underline{h}_{s_2,\underline{k}_2} \cdot \underline{h}_{s_3,\underline{k}_3}] = e^{-i\tilde{\mu} \frac{\underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2}{|\underline{k}_1|}} \left(\frac{\underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_3}{|\underline{k}_2| |\underline{k}_3|} - s_2 s_3 \right) \quad (9.34)$$

ove $\tilde{\mu} = s_1 \mu_1 + s_2 \mu_2 + s_3 \mu_3$; e si vede che si possono utilizzare le espressioni già ricavate nel caso $d = 2$. Se a è definito ponendo $a = -\underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2$ (doppio dell' area del triangolo dei vettori \underline{k}_j) e se $\mu = -\frac{\pi}{2} + s_1 \mu_1 + s_2 \mu_2 + s_3 \mu_3$ e $\omega_{s,\underline{k}} = |\underline{k}|^{-1} \gamma_{\underline{k},s}$ allora:

$$\begin{aligned}
9.35 \quad & \underline{k}_1^2 \dot{\bar{\omega}}_{\underline{k}_1, s_1} = -\underline{k}_1^4 \nu \bar{\omega}_{\underline{k}_1, s_1} - \\
& - (\underline{k}_3^2 - \underline{k}_2^2 + (\underline{s} \wedge \underline{k})_1 \kappa_1 \sigma) a e^{-i\mu} \omega_{\underline{k}_2, s_2} \omega_{\underline{k}_3, s_3} + \dots \text{ etc}
\end{aligned} \tag{9.35}$$

ove $\sigma = s_1 s_2 s_3$ e i vettori $\underline{k}, \underline{s}$ sono definiti da $\underline{k} = (|\underline{k}_1|, |\underline{k}_2|, |\underline{k}_3|)$ e $\underline{s} = (s_1, s_2, s_3)$: che mostra che ancora le equazioni si possono scrivere in termini di "triadi" come nel caso a $d = 2$. È quindi ancora possibile un'interpretazione "giroscopica" delle equazioni di Eulero e NS.

Le equazioni nel caso $d = 2$ si ottengono dalle (9.35) semplicemente eliminando gli indici s_j dalle ω e ponendo $\sigma = 0$, perchè in questo caso i vettori \underline{v}_1 devono essere sostituiti con $\underline{0}$.

Si vede inoltre che se Δ denota una triade $(\underline{k}_1, s_1), (\underline{k}_2, s_2), (\underline{k}_3, s_3)$ allora le quantità:

$$9.36 \quad E = \frac{1}{6} \sum_{\Delta} \sum_{\underline{k}, s \in \Delta} |\underline{k}|^2 |\omega_{\underline{k}, s}|^2, \quad \Omega = \frac{1}{3} \sum_{\Delta} \sum_{\underline{k}, s \in \Delta} |\underline{k}|^4 |\omega_{\underline{k}, s}|^2 \tag{9.36}$$

sono costanti del moto nel caso $\nu = 0, \underline{g} = \underline{0}$ e $d = 2$; in questo caso l'indice s non deve essere presente, ma si è usata la notazione tridimensionale per omogeneità. La prima quantità è proporzionale all'energia cinetica e la seconda è proporzionale all'*enstrofia*¹ (ossia la vorticità totale).

Le quantità E, Ω sono somme di quantità positive e si vedrà che questa proprietà le renderà particolarmente utili perchè potranno essere utilizzate per ottenere stime *a priori* sulle soluzioni delle equazioni di Euler e di NS.

Si osservi che il meccanismo per cui nei fluidi bidimensionali si conservano energia ed *enstrofia* è quello stesso per cui in un solido con un punto fisso si conservano energia e momento angolare: qui $\underline{k}_1^2, \underline{k}_2^2, \underline{k}_3^2$ giocano il ruolo dei momenti principali d'inerzia.

Nel corrispondente caso $d = 3$ la E è ancora una costante del moto (perchè $\underline{s} \wedge \underline{k} \cdot \underline{k} = 0$) mentre, poichè in generale $\sum_i \kappa_i^2 (\underline{s} \wedge \underline{k})_i \kappa_i \neq 0$, la Ω non è più una costante del moto.

Tuttavia nel caso $d = 3$, sempre con $\nu = 0, \underline{g} = \underline{0}$, esiste un'altra costante del moto perchè:

$$\begin{aligned}
9.37 \quad & (s_3 |\underline{k}_3| (\underline{k}_3^2 - \underline{k}_1^2) + \underline{k}_3^2 (s_2 |\underline{k}_2| - s_1 |\underline{k}_1|)) + \\
& + (s_2 |\underline{k}_2| (\underline{k}_1^2 - \underline{k}_3^2) + \underline{k}_2^2 (s_1 |\underline{k}_1| - s_3 |\underline{k}_3|)) + \\
& + (s_1 |\underline{k}_1| (\underline{k}_3^2 - \underline{k}_2^2) + \underline{k}_1^2 (s_3 |\underline{k}_3| - s_2 |\underline{k}_2|)) \equiv 0
\end{aligned} \tag{9.37}$$

che, insieme alla (9.35), implica che:

$$9.38 \quad \tilde{\Omega} = \frac{1}{3} \sum_{\Delta} \sum_{\underline{k}, s} s |\underline{k}| |\gamma_{\underline{k}, s}|^2 \tag{9.38}$$

¹ da $\varepsilon \nu$ ("dentro") e $\sigma \tau \rho \varepsilon \varphi \omega$ (giro).

è una costante del moto (come si vede anche direttamente dalle equazioni di Eulero osservando che questa quantità è proporzionale a $\int \underline{u} \cdot \underline{\partial} \wedge \underline{u} dx$). Ma la $\tilde{\Omega}$ non può essere da sola usata per ottenere stime *a priori* perchè è la somma di quantità a segno non definito.

Osservazioni:

- (1) Si noti che possono esistere campi di velocità in cui tutte le componenti hanno elicità $s = 1$ (o tutte $s = -1$); segue quindi dalle (9.35) che, dato $K > 0$, esistono soluzioni (stazionarie) delle equazioni di Eulero aventi la forma $\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{|\underline{k}(\alpha)|=K} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} c_{\underline{k}} \underline{h}_+(\underline{k})$ ove $\underline{k}(\alpha)$ denota qui la componente α , $\alpha = 1, 2, 3$ del vettore \underline{k} (che dunque ha tutte le *componenti* di modulo uguale a K). Si noti infatti che in questo caso è $\underline{s} \wedge \underline{k} \equiv 0$ oltre che $\underline{k}_i = 3K^2$ e quindi $\underline{k}_i^2 - \underline{k}_j^2 = 0$.
- (2) Se si considera l' equazione di NS (ossia $\nu \neq 0$) queste soluzioni sono identicamente nulle o tendono a zero esponenzialmente.
- (3) In presenza di un campo esterno che pure ha le sole componenti $\underline{g}_{\underline{k}}$ con $\underline{k}(\alpha) = K$ non nulle si ha una soluzione stazionaria non nulla.

Problemi: regolarità interna e al bordo nelle equazioni ellittiche e di Stokes.

Qui viene esposta principalmente la teoria dell' operatore di Laplace su campi a divergenza nulla in un dominio limitato e convesso Ω a frontiera regolare. L' idea guida che viene seguita è di ridurre il problema al caso in cui Ω è un toro, caso in cui il problema è facile in quanto esplicitamente risolubile. È un metodo intuitivo e alternativo ai metodi classici, si veda per questi [Mi], [LM], [G4].

[1] Si ponga la seguente definizione: una funzione $x, t \rightarrow T(x, t)$ si dice “una soluzione debole”, con condizioni periodiche su $[a, b]$, dell' equazione del calore, (8.12), nel senso delle funzioni di un insieme denso \mathcal{P} in $L_2([a, b])$, tutte periodiche e di classe $C^\infty(a, b)$, se la funzione T è in $L_2([a, b])$ e se, inoltre:

$$\partial_t \int_a^b \varphi(x) T(x, t) dx - \int_a^b \varphi''(x) T(x, t) dx = 0, \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{P}$$

Si dice che il dato iniziale di una soluzione debole è ϑ_0 se si ha: $\int_a^b \varphi(x) \vartheta_0(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \varphi(x) T(x, t) dx$ per ogni $\varphi \in \mathcal{P}$. Ad esempio \mathcal{P} può essere l' insieme delle funzioni periodiche di $C^\infty([a, b])$: si dice anche, in questo caso, che la T è una “soluzione nel senso delle distribuzioni” nella x nel cerchio $[a, b]$. Se \mathcal{P} è lo spazio dei polinomi trigonometrici periodici in $[a, b]$ si dice che T è soluzione nel senso dei polinomi trigonometrici. Si dice che una successione $f_n \in L_2([a, b])$ tende *debolmente* a $f \in L_2([a, b])$ nel senso \mathcal{P} se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) f_n(x) dx = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$ per ogni $\varphi \in \mathcal{P}$. Si mostri che l' equazione del calore ammette una unica soluzione debole nel senso dei polinomi trigonometrici (e quindi nel senso delle distribuzioni) di assegnato dato iniziale $\vartheta_0 \in C^\infty(a, b)$. Si estendano le nozioni di cui sopra (quando possibile) al caso di funzioni su un dominio limitato d -dimensionale Ω . (*Idea:* si scelga $a = -\pi, b = \pi$ (per semplicità) e si scriva la

condizione che T è una soluzione scegliendo $\varphi(x) = e^{i\omega x}$, con ω intero.)

[2] Sia ϑ_0 una funzione di classe C^∞ a supporto in $[-a, a]$, $a < L/2$. Si dimostri che l'algoritmo (8.25) per l'equazione del calore con dato iniziale ϑ_0 sul cerchio di lunghezza L (identificato con il segmento $[-L/2, L/2]$) produce una soluzione che converge debolmente nel senso dei polinomi trigonometrici alla soluzione dell'equazione del calore con condizioni periodiche al bordo di $[-L/2, L/2]$. (*Idea:* sia $\hat{\vartheta}_0(\omega)$, con ω multiplo intero di $2\pi L^{-1}$, la trasformata di Fourier del dato iniziale e si osservi che la trasformata di Fourier dell'approssimazione al tempo $t = kt_0$, con $t_0 > 0$ e k intero, è $\hat{\vartheta}_k(\omega) = \hat{\vartheta}_0(\omega)(1 - \frac{c\omega^2 t}{k})^k$, cfr §8. La convergenza debole in questione è ora equivalente alla affermazione che $\hat{\vartheta}_k(\omega)$ tende, per ogni fissato ω e per $k \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow 0$ (con $kt_0 = t$), a $\hat{\vartheta}_0(\omega)e^{-c\omega^2 t}$.)

[3] Nel contesto di [1] si vede che l'algoritmo di [2], c.f.r. (8.25), produce una successione di funzioni $\hat{\vartheta}_k(\omega)$ con trasformata di Fourier $\vartheta_{t_0}(x, t)$, $t \equiv kt_0$, periodica su $[-L/2, L/2]$ che pensata come elemento di $L_2([-L/2, L/2])$ converge debolmente nel senso dei polinomi trigonometrici alla soluzione dell'equazione del calore $T(x, t)$ su $[-L/2, L/2]$. Si noti che questo avviene *per qualunque* $L > a$: ossia in un certo senso l'algoritmo produce soluzioni deboli diverse, a seconda di quale sia la lunghezza della sbarretta (periodica) che si immagina contenere il calore del dato iniziale. Ci si convinca che questo non è una contraddizione, e che anzi fa vedere che la nozione di soluzione debole deve essere presa con molta cautela.

[4] Dato $\underline{u} \in C_0^\infty(\Omega)$ lo si può estendere ad una funzione C^∞ -periodica sul cubo T_Ω di lato $L > 2 \text{diam } \Omega$ contenente Ω e una traslata Ω' di Ω tale che $\Omega' \cap \Omega = \emptyset$ in modo che la estensione sia nulla fuori di Ω e Ω' e nei punti di Ω' abbia valore *opposto* a quello che ha nei corrispondenti punti di Ω . Allora l'estensione, denotata con $\underline{\tilde{u}}$, ha integrale nullo su tutto T_Ω . Si mostri che, (c.f.r. (9.15) per la definizione di D):

$$\int_{\Omega} |\underline{u}(\underline{x})|^2 d\underline{x} \equiv \frac{1}{2} |\underline{\tilde{u}}|_2^2 \leq \frac{L^2}{8\pi^2} D(\underline{\tilde{u}}) = \frac{L^2}{4\pi^2} D(\underline{u}) \quad \text{per } \underline{u} \in X_{rot}^0$$

(*Idea:* si scriva la norma della estensione di \underline{u} in $L_2(T_\Omega)$ e il valore di $D(\underline{\tilde{u}})$ usando la trasformata di Fourier e osservando che $2\|\underline{\tilde{u}}\|_{L_2(\Omega)}^2 \equiv \|\underline{\tilde{u}}\|_{L_2(T_\Omega)}^2$, e si tratti similmente $D(\underline{\tilde{u}})$.)

[5] Data una regione convessa Ω con frontiera analitica $\partial\Omega$ si consideri lo spazio $X_{rot} \equiv X_{rot}^0$ chiusura in $L_2(\Omega)$ dello spazio X_{rot}^0 dei campi a divergenza nulla e nulli in un intorno della frontiera. Si consideri la forma quadratica $(\underline{u}, \underline{v})_D$ associata all'operatore di Laplace:

$$(\underline{u}, \underline{v})_D = \int_{\Omega} \underline{\partial} \underline{u} \cdot \underline{\partial} \cdot \underline{v} d\underline{x}, \quad \text{e si ponga} \quad D(\underline{u}) = \int_{\Omega} (\underline{\partial} \underline{u})^2 d\underline{x}$$

definita su X_{rot}^0 . Si dimostri che l'estremo inferiore di $D(\underline{u})/|\underline{u}|_2^2$ su X_{rot}^0 è strettamente positivo. Si mostri che è in realtà $\geq (2\pi L^{-1})^2$ se L è il doppio del lato del quadrato più piccolo che contiene Ω . (*Idea:* per la seconda parte si osservi che l'estremo inferiore è maggiore o uguale all'estremo inferiore di $\int_Q (\underline{\partial} \underline{u})^2$ su tutti i campi \underline{u} definiti, C^∞ ,

periodici e a media nulla su un dominio quadrato Q che contiene il dominio Ω . Invero ogni funzione in $C_0^\infty(\Omega)$ si estende banalmente ad una funzione periodica $\underline{\tilde{u}} \in C^\infty(Q)$ e se Q ha lato L si può evidentemente richiedere anche che abbia media nulla (definendola opposta a \underline{u} nei punti della "copia" Ω' di Ω che si può immaginare contenuta in Q e senza intersezione con Ω): si scriva poi $D(\underline{\tilde{u}})$ utilizzando la trasformata di Fourier.)

[6] Si mostri che nel contesto del problema [4] si ha:

$$|\underline{u}|_2^2 \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_{\Omega} (\text{rot } \underline{u})^2 d\underline{x}, \quad \text{in } X_{rot}^0$$

(Idea: si usi ancora la serie di Fourier come in [4],[5] e si noti che $\hat{\underline{u}} \cdot \underline{u} = 0$ implica che $|\underline{k}|^2 |\hat{\underline{u}}(\underline{k})|^2 = |\underline{k} \wedge \hat{\underline{u}}(\underline{k})|^2$, e inoltre $|\underline{u}|_2^2 = \frac{1}{2} |\hat{\underline{u}}|_2^2 \leq \frac{1}{2} \frac{L^2}{4\pi} D(\underline{u}) = \frac{L^2}{4\pi} D(\underline{u})$.)

[7] Si consideri una successione $\underline{u}_n \in X_{rot}^0$, tale che $|\underline{u}_n|_2 = 1$ e $D(\underline{u}_n) \leq C^2$, per qualche $C > 0$, e si mostri che esiste una sottosuccessione di \underline{u}_n che converge in L_2 ad un limite. (Idea: Si immagini \underline{u}_n prolungato in una funzione $\hat{\underline{u}}$ definita su T_Ω e cambiato di segno in Ω' , come in [4],[5],[6]. Allora l'idea di [6] implica: $|\hat{\underline{u}}_n(\underline{k})| \leq \frac{C}{|\underline{k}|} \sqrt{\frac{2}{L^d}}$, avendo usato la convenzione (9.2) sulle serie di Fourier. Sia $\{n_i\}$ una sottosuccessione tale che $\hat{\underline{u}}_{n_i}(\underline{k}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \hat{\underline{u}}_\infty(\underline{k})$, $\forall \underline{k}$ (che esiste perché \underline{k} varia su un insieme numerabile); si vede che dato un qualsiasi $N > 0$:

$$\begin{aligned} 2|\underline{u}_{n_i} - \underline{u}_{n_j}|_2^2 &\equiv |\hat{\underline{u}}_{n_i} - \hat{\underline{u}}_{n_j}|_{L_2(T_\Omega)}^2 = L^d \sum_{\underline{k}} |\hat{\underline{u}}_{n_i}(\underline{k}) - \hat{\underline{u}}_{n_j}(\underline{k})|^2 \leq \\ 9.39 \quad &\leq L^d \sum_{|\underline{k}| \leq N} |\hat{\underline{u}}_{n_i}(\underline{k}) - \hat{\underline{u}}_{n_j}(\underline{k})|^2 + \frac{L^d}{N^2} \sum_{|\underline{k}| > N} |\underline{k}|^2 |\hat{\underline{u}}_{n_i}(\underline{k}) - \hat{\underline{u}}_{n_j}(\underline{k})|^2 \quad (9.39) \\ &\xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} \leq \frac{2}{N^2} \sup D(\underline{u}_{n_i}) \leq \frac{2C^2 L^d}{N^2} \end{aligned}$$

e quindi l'arbitrarietà di N implica che \underline{u}_{n_i} è una successione di Cauchy in $L_2(T_\Omega)$, e pertanto in $L_2(\Omega)$, che dunque converge a un limite $\underline{u}_\infty \in X_{rot}$.

[8] Sia $\underline{u}_n \in X_{rot}^0$, $n \geq 1$, una successione tale che esista \underline{u}_0 per cui:

$$9.40 \quad |\underline{u}_n|_2 \equiv 1, \quad D(\underline{u}_n) \rightarrow \inf_{|\underline{u}|_2=1, \underline{u} \in X_{rot}^0} D(\underline{u}) \equiv \lambda_0^2, \quad |\underline{u}_n - \underline{u}_0|_2 \rightarrow 0 \quad (9.40)$$

Si mostri che $D(\underline{u}_n - \underline{u}_m) \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$ e quindi, essendo $\sqrt{D(\underline{u})}$ una metrica, \underline{u}_0 è “nel dominio della chiusura della forma quadratica”,² ossia esiste anche il limite $D(\underline{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(\underline{u}_n)$ e $D(\underline{u}_0) = \lambda_0^2$. In altre parole la forma quadratica (estesa alle funzioni del suo dominio) assume il valore minimo in \underline{u}_0 .

Si noti che se la “superficie” $D(\underline{u}) = 1$ è interpretata come un “ellissoide” in $L_2(\Omega)$ allora la ricerca dell'estremo inferiore equivale alla ricerca del più grande \underline{u} (ne senso della norma L_2) sulla superficie tale che $D(\underline{u}) = 1$: questo è $\lambda_0^{-1} \underline{u}_0$ così che \underline{u}_0 ha l'interpretazione di direzione dell'asse maggiore dell'ellissoide e λ_0^{-1} quella di sua lunghezza.

Infine si noti che risultati strettamente analoghi valgono per la forma quadratica $D_1(\underline{u}) = D(\underline{u}) + \int_\Omega |\underline{u}|^2 d\underline{x}$. (Idea: Si noti la *uguaglianza quadrangolare*:

$$D\left(\frac{\underline{u}_n + \underline{u}_m}{2}\right) + D\left(\frac{\underline{u}_n - \underline{u}_m}{2}\right) = \frac{D(\underline{u}_n)}{2} + \frac{D(\underline{u}_m)}{2} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} \lambda_0^2$$

e si osservi che $\frac{1}{2} |\underline{u}_n + \underline{u}_m|_2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 1$ e se ne deduca: $\liminf_{n,m \rightarrow \infty} D\left(\frac{\underline{u}_n + \underline{u}_m}{2}\right) \geq \lambda_0^2$

e, quindi, $\frac{1}{2} D(\underline{u}_n - \underline{u}_m) \rightarrow 0$.)

[9] Si definisca ora, nel contesto del problema [8], $\lambda_1 > 0$ come:

$$\lambda_1^2 = \inf_{\substack{\underline{u} \in X_{rot}^0, \\ \text{e } \langle \underline{u}, \underline{u}_0 \rangle_{L_2} = 0}} D(\underline{u})$$

² Il dominio di una forma quadratica definita su uno spazio lineare \mathcal{D} di uno spazio di Hilbert H consiste nei vettori u tali che esiste una successione $u_n \in \mathcal{D}$ tale che $\|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $D(u_n - u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$: in questo caso la successione $D(u_n)$ converge a un limite ℓ e si pone $D(u) = \ell$, e l'insieme dei vettori che hanno questa proprietà è il “dominio della forma”. Se u, v sono nel dominio della forma D allora si può anche estendere il prodotto scalare $(u, v)_D = (D((u+v)) - D(u) - D(v))/2 = \lim(u_n, v_n)_D$.

e si faccia vedere che esiste un campo un campo $\underline{u}_1 \in L_2(\Omega)$ tale che $D(\underline{u}_1) = \lambda_1^2$ etc. Nell' interpretazione geometrica di [8] \underline{u}_1 è la direzione del secondo più grande asse dell' ellissoide e λ_1^{-1} è la sua lunghezza. Si mostri anche che $(\underline{u}_0, \underline{u}_1)_D = 0$. (*Idea:* Si ripete la costruzione in [8]. Si osserva poi che se $\underline{w} = x\underline{u}_0 + y\underline{u}_1$ allora $D(\underline{w}) \equiv x^2\lambda_0^2 + y^2\lambda_1^2 + 2(\underline{u}_0, \underline{u}_1)_D xy = 1$ è un' ellisse nel piano x, y con assi principali coincidenti con gli assi x e y .)

[10] Si consideri la successione non decrescente $\lambda_j, j = 0, 1, 2, \dots$ costruita nel problema [9] e si faccia vedere che vale il seguente *principio del minimax*:

$$\lambda_j^2 = \min \max D(\underline{u})$$

ove il massimo è sui vettori normalizzati che si trovano in un sottospazio W_j a dimensione $j + 1$ del dominio della chiusura di $D(\underline{u})$, mentre il minimo è sulle scelte dei sottospazi W_j . Il principio ha una semplice interpretazione in termini dell' ellissoide in [2.2.8], [2.2.9], quale? Si noti che nem principio del minimax possiamo sostituire i sottospazi $j + 1$ -dimensionali del dominio della form con quelli $j + 1$ -dimensionali di X_{rot}^0 , purchè si sostituisca il minimo con un estremo inferiore. (*Idea:* Il principio è ovvio per [8] nel caso $j = 0$ ed è una interpretazione di [9] negli altri casi.)

[11] Si consideri la successione $\lambda_j(\Omega), j = 0, 1, \dots$ costruita in [9],[10] e si consideri la analoga successione associata alla forma quadratica $D(\underline{u})$ definita sui campi \underline{u} di classe $C^\infty(T_\Omega)$ periodici e a divergenza nulla sul cubo T_Ω , c.f.r. [4]. Denotando $\lambda_j(T_\Omega)$ quest' ultima si mostri che $\lambda_j(\Omega) \geq \lambda_j(T_\Omega)$ e che $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j(\Omega) = +\infty$. Allo stesso modo si possono ottenere stime inferiori per gli autovalori $\lambda_j^2(\Omega)$ confrontando la forma quadratica D con la corrispondente su T'_Ω , un cubo contenuto nell' interno di Ω con condizioni periodiche al bordo. (*Idea:* basta usare il principio del minimax di [10] e notare che ogni funzione di $X_{rot}^0(\Omega)$ si estende ad una funzione su T_Ω . Per il limite si osservi che $\lambda_j(T_\Omega)$ sono calcolabili esplicitamente per trasformata di Fourier. Per ottenere la stima inferiore estendiamo linearmente e con continuità nella topologia di C^p per ogni p le funzioni periodiche su T'_Ω a funzioni in $X_{rot}^0(\Omega')$ definite su un ominoio leggermente più grande Ω' con frontiera regolare contenente il cubo T'_Ω e contenuto Ω mantenendo il controllo delle norme L_2 di $\underline{\partial} \underline{u}$. Si vedano i problemi [33], [34], [35] per maggiori dettagli.)

[12] Si mostri che se \mathcal{H} è la varietà lineare chiusa, in $L_2(\Omega)$, sottesa dai vettori \underline{u}_j e se $\underline{w} \neq \underline{0}$ è ortogonale allora \underline{w} non può appartenere al dominio della chiusura forma D . (*Idea:* Se vi appartenesse si troverebbe, procedendo come in [8], un vettore \underline{u} tale che $D(\underline{u}) = \inf D(\underline{w}) = \bar{\lambda}^2 < \infty$ con l' estremo inferiore preso su tutti i vettori nel dominio della forma D e ortogonali a \mathcal{H} : questo contraddice che $\bar{\lambda}_j \rightarrow \infty$ as $j \rightarrow \infty$; in altre parole avremmo “dimenticato” un elemento della successione \underline{u}_j .)

[13] Si scriva la condizione che $D(\underline{u})$ è minimo nello spazio dei campi di classe C^∞ a divergenza nulla, nulli sul bordo di Ω e normalizzati a 1 in $L_2(\Omega)$, ammettendo il campo \underline{u} che realizza il minimo esista e sia una funzione di classe C^∞ . Si mostri che si trova:

$$\Delta \underline{u} = -\lambda^2 \underline{u} - \underline{\partial} \mu$$

ove μ è una opportuna funzione. (*Idea:* si usi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per imporre il vincolo $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$.)

[14] Si mostri che la funzione μ di [13] si determina via la proiezione $P_{X_{rot}^\perp}(\Delta \underline{u})$ ove $P_{X_{rot}^\perp}$ è l' operatore di proiezione discusso al §6, punto F, (ossia é la funzione il cui gradiente è la parte di gradiente della decomposizione gradiente solenoide del campo $\Delta \underline{u}$).

[15] Si faccia vedere che [13],[14] implicano che ci si deve aspettare che i vettori della base \underline{u}_n verifichino le equazioni:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{u}_n &= -\lambda_n^2 \underline{u}_n - \underline{\partial} \mu_n, & \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \underline{u}_n &= \underline{0}, & & & \text{in } \partial\Omega \end{aligned}$$

per un opportuna successione di potenziali μ_n .

[16] Sia $f \in C^\infty([0, H])$, si faccia vedere che:

$$|f(0)|^2 \leq 2(H^{-1}\|f\|_2^2 + H\|f'\|_2^2)$$

(Idea: si scriva $f(0) = f(x) + \int_x^0 f'(\xi) d\xi$, e si medi il quadrato di questa relazione su $x \in [0, H]$, applicando poi la disuguaglianza di Schwartz.)

[17] Sia $f \in C_0^\infty(\Omega \times [0, H])$ lo spazio delle $f(\underline{x}, z)$ di classe C^∞ e nulle se \underline{x} è vicino alla frontiera (regolare) $\partial\Omega$ di Ω . Si dimostri che:

$$\int_\Omega |f(\underline{x}, 0)|^2 d\underline{x} \leq 2(H \int_\Omega \int_0^H |\partial_{\underline{x}} f|^2 d\underline{x} dz + H^{-1} \int_\Omega \int_0^H |f|^2 d\underline{x} dz)$$

(Idea: si applichi il risultato di [16].)

[18] Sia $f \in C^\infty(\Omega)$, si mostri che esiste $C > 0$ tale che, se L è il lato del cubo più piccolo che contiene Ω :

$$\int_{\partial\Omega} |f(x)|^2 d\sigma \leq C(L^{-1}\|f\|_2^2 + L\|\partial f\|_2^2)$$

È questo un interessante *teorema di traccia* sul bordo (una “disuguaglianza di Sobolev”, c.f.r. [So]). La costante C può essere scelta in modo da essere invariante per omotetia (ossia dilatando la regione Ω di un fattore $\rho > 1$ la C non cambia e quindi C dipende solo dalla forma geometrica di Ω e non dalla sua grandezza). (Idea: si usi il metodo della partizione dell'unità dei problemi [7],[8] del §5 per ridurre questo problema al precedente.)

[19] Sia $f \in L_2(\Omega)$ con derivate generalizzate fino all'ordine $n-1$ incluso con n pari; quindi $(-\Delta)^{n/2}$ esiste in senso generalizzato, ossia se $|\langle f, (-\Delta)^{n/2} g \rangle| \leq C\|g\|_2$ per $g \in C_0^\infty(\Omega)$ e per un opportuno C , cfr. §6, (6.19). Si supponga che $n > d/2$. Si dimostri che f è continua in ogni punto interno a Ω , insieme alle sue prime j derivate se $n - d/2 > j \geq 0$. Si cerchi una proprietà analoga nel caso n dispari. (Idea: sia Q_ε un cubetto interamente contenuto in Ω e sia $\chi \in C_0^\infty(Q_\varepsilon)$. La funzione $\chi f \equiv f_\chi$ pensata come elemento di $L_2(Q_\varepsilon)$ ammette derivate generalizzate di ordine $\leq n-1$ e $(-\Delta)^{n/2} f_\chi$ esiste in senso generalizzato (questo è chiaro se $n/2$ è intero poichè $\chi \partial^p g = \sum_{j=0}^p \partial^j (\chi^{(j)} g)$ ove $\chi^{(j)}$ sono opportune funzioni in $C_0^\infty(Q_\varepsilon)$). Quindi pensando $g \in C_0^\infty(Q_\varepsilon)$ come una funzione periodica in Q_ε si vede che esiste una costante C_{Q_ε} tale che la relazione $|\langle f_\chi, (-\Delta)^{n/2} g \rangle| \leq C_{Q_\varepsilon} \|g\|_{L_2(Q_\varepsilon)}$ vale per ogni $g \in C_0^\infty(Q_\varepsilon)$, e quindi deve valere per ogni g periodica e C^∞ in Q_ε . Allora, se $\hat{f}_\chi(\underline{k})$ è la trasformata di Fourier di f_χ come elemento di $L_2(Q_\varepsilon)$ (per cui $\underline{k} = 2\pi\varepsilon^{-1}\underline{m}$ con \underline{m} vettore a componenti intere), si ha $\varepsilon^d \sum_{\underline{k}} |\hat{f}_\chi(\underline{k})|^2 |\underline{k}|^n \leq C_{Q_\varepsilon}^2$. Quindi, posto $n = \frac{d}{2} + j + \eta$ con $1 > \eta > 0$, si vede che la serie di Fourier di $\partial^j f_\chi$ è maggiorata dalla serie:

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^j |\hat{f}_\chi(\underline{k})| &\equiv \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^{j+\eta+d/2} |\hat{f}_\chi(\underline{k})| |\underline{k}|^{-\eta-d/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^{2n} |\hat{f}_\chi(\underline{k})|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^{-2\eta-d} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_{Q_\varepsilon} \varepsilon^{-d/2} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \right)^{\eta+d/2} \left(\sum_{\underline{m}} |\underline{m}|^{-d-2\eta} \right)^{1/2} \equiv \Gamma_d \varepsilon^{n-j-d/2} C_{Q_\varepsilon} \end{aligned}$$

e quindi f ha j derivate continue in Q_ε . Se n è dispari si può dire, *per definizione* che $(-\Delta)^{n/2}f$ esiste se si ha $|\langle f, \partial^j g \rangle| \leq C\|g\|_2$ per ogni derivata di ordine $j \leq n$ e per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$; allora la discussione è in tutto parallela a quella del caso n pari.)

[20] Sia $W^n(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $f \in L_2(\Omega)$ dotate di derivate generalizzate di ordine $\leq n$ e si definisca, per ogni vettore $\underline{\alpha}$ a componenti intere non negative:

$$\|f\|_{W^n(\Omega)}^2 = \sum_{j=0}^n L^{2j-d} \sum_{|\underline{\alpha}|=j} \int_{\Omega} |\partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x})|^2 d\underline{x}, \quad \partial^{\underline{\alpha}} \equiv \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|}}{\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}}$$

ove $|\underline{\alpha}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ e L è il lato del più piccolo cubo che contiene Ω . Si mostri che il metodo proposto per la soluzione del problema [19] implica che, se $n > j + d/2$ e $d(\underline{x}, \partial\Omega)$ denota la distanza di \underline{x} da $\partial\Omega$:

$$L^j |\partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x})| \leq \left(\frac{d(\underline{x}, \partial\Omega)}{L} \right)^{-j-d/2} \Gamma \|f\|_{W^n(\Omega)}, \quad |\underline{\alpha}| = j$$

e Γ può essere scelto indipendente da Ω . (*Idea:* sia Q_1 il cubetto unitario. Sia $\chi \in C_0^\infty(Q_1)$ una funzione identicamente uguale a 1 nell'intorno del centro di Q_1 . Si ponga $\chi_\varepsilon(\underline{x}) = \chi_1(\underline{x}\varepsilon^{-1})$ e si faccia vedere che la costante C_{Q_ε} considerata nelle stime del problema [19] può essere presa uguale a $\gamma L^{d/2} \varepsilon^{-n} \|f\|_{W^n(\Omega)}$, con γ indipendente da Ω . Si scelga quindi $\varepsilon = d(\underline{x}, \partial\Omega)$.)

[21] Si supponga che $\partial\Omega$ contenga un tratto piatto e così esista un cubetto $Q_\varepsilon \subset \Omega$ con una faccia $Q_\varepsilon^0 \subset \partial\Omega$. Si stabilisca in Q_ε un sistema di coordinate in modo che ogni punto di Q_ε sia rappresentato da (\underline{x}, z) con $\underline{x} \in Q_\varepsilon^0$ e $-\varepsilon \leq z \leq 0$. Sia inoltre $\chi \in C_0^\infty(Q_1^0)$ e si ponga $\chi_\varepsilon(\underline{x}) \equiv \chi_1(\underline{x}\varepsilon^{-1})$. Se $f \in W^n(\Omega)$ si faccia vedere che $\chi_\varepsilon f \in W^n(\Omega)$ e $\|\chi_\varepsilon f\|_{W^n(\Omega)} \leq \|f\|_{W^n(\Omega)} (\varepsilon/L)^{-n} \gamma$ con γ che dipende solo da χ_1 , n ma è indipendente da Ω . Si noti la differenza fra le norme di f_{χ_ε} come elemento di $W^n(\Omega)$ e di $W^n(Q_\varepsilon)$: esiste γ' , indipendente da Ω come γ e tale che $\|f_{\chi_\varepsilon}\|_{W^n(Q_\varepsilon)} \leq \gamma' (\varepsilon L^{-1})^{-d/2} \|f\|_{W^n(\Omega)}$.

[22] Nel contesto del problema [21] si faccia vedere che se $f \in W^n(\Omega)$ e $j < n - d/2$ si ha, posto $\underline{\xi}_\varepsilon = (\underline{x}, -\frac{\varepsilon}{2})$ e $f_{\chi_\varepsilon} \equiv \chi_\varepsilon f$, lo "sviluppo di Taylor":

$$f_{\chi_\varepsilon}(\underline{x}, z) = f_{\chi_\varepsilon}(\underline{\xi}_\varepsilon) + \dots + \frac{(z + \frac{\varepsilon}{2})^{j-1}}{(j-1)!} \partial_z^{j-1} f_{\chi_\varepsilon}(\underline{\xi}_\varepsilon) + \int_{-\varepsilon/2}^z \frac{(z-\zeta)^{j-1}}{(j-1)!} \varphi_\varepsilon(\underline{x}, \zeta) d\zeta \quad (*)$$

ove φ_ε è un' opportuna funzione continua all'interno di Q_ε . Si mostri, inoltre, che vale la stima: $\|\varphi_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq \Gamma \|f\|_{W^n(\Omega)} L^{d/2} \varepsilon^{-j}$ con Γ indipendente da Ω . (*Idea:* la funzione $\varphi_\varepsilon \equiv \partial_z^j f_{\chi_\varepsilon}(\underline{x}, z)$ esiste ed è continua se $z < 0$ per [19] e [20]. Inoltre:

$$|\langle \varphi_\varepsilon, g \rangle| \equiv |\langle f_{\chi_\varepsilon}, \partial_z^j g \rangle| \leq L^{-j+d/2} \|f_{\chi_\varepsilon}\|_{W^j(\Omega)} \|g\|_{L_2(Q_\varepsilon)}$$

e quindi, *per densità* di $C_0^\infty(Q_\varepsilon)$ in $L_2(Q_\varepsilon)$ si deduce che:

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq L^{-j+d/2} \|f_{\chi_\varepsilon}\|_{W^j(\Omega)}$$

Si noti che l'argomento di densità è corretto perchè sappiamo *a priori* che $\varphi_{\chi_\varepsilon}$ è continua per $z < 0$. Si osservi che $\|f_{\chi_\varepsilon}\|_{W^j(\Omega)} \leq \gamma (L\varepsilon^{-1})^j \|f\|_{W^j(\Omega)}$, per 21.)

[23] Nel contesto di [22],[21] si consideri il parallelepipedo \tilde{Q}_ε che consiste di Q_ε e della sua immagine riflessa sul piano di base $Q_\varepsilon^0 \subset \partial\Omega$. Si prolunghi $\varphi_\varepsilon(\underline{x}, z)$ per riflessione rispetto alla base di Q_ε e si estenda $\chi_\varepsilon f$ ad una funzione \tilde{f}_ε definita su tutto \tilde{Q}_ε utilizzando la formula * nel problema [22]. Sia $\tilde{\chi}_1 \in C_0^\infty(\tilde{Q}_1)$ identicamente 1 sul

supporto della funzione χ e sulla sua riflessione sulla base Q_ε^0 di Q_ε . Se $\tilde{\chi}_\varepsilon(\underline{x}) \equiv \tilde{\chi}_1(\varepsilon^{-1}\underline{x})$ si mostri che $\tilde{\chi}_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon \in W^j(\tilde{Q}_1)$, se $j < n - d/2$, e:

$$\|\tilde{\chi}_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon\|_{W^j(\Omega) \cup \tilde{Q}_\varepsilon} \leq (L\varepsilon^{-1})^j \gamma \|f_{\chi_\varepsilon}\|_{W^j(\Omega)} \leq \Gamma \gamma \cdot (L\varepsilon^{-1})^{2j} \|f\|_{W^j(\Omega)}$$

Se ne deduca che, per [20] e se $|\underline{\alpha}| = j_0$ e $j_0 \leq j - d/2 < n - d$, si ha:

$$L^{j_0} |\partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x})| \leq \Gamma \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{j_0 + d/2} \gamma (L\varepsilon^{-1})^{2j} \|f\|_{W^n(\Omega)}$$

in un intorno del centro di Q_ε^0 .

[24] Nel contesto di [20]-%[23] si dimostri che $f \in W^n$ implica $f \in C^k(\Omega)$ se $0 \leq k < n - d$ (ossia le condizioni assicurano regolarità fin sulla frontiera anche nei casi nei quali quest'ultima non abbia tratti piatti). Inoltre vale la stima:

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} \equiv \sum_{j=0}^k L^j \max_{\underline{x} \in \Omega, |\underline{\alpha}|=j} |\partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x})| \leq \Gamma \|f\|_{W^n(\Omega)} \quad (\#)$$

se $0 \leq k < n - d$. La costante geometrica adimensionale Γ dipende solo da Ω ed è invariante per omotetie di Ω con fattore $\lambda < 1$. (*Idea:* si consideri un tratto di frontiera ottenuto considerando un piano tangente in un punto $\underline{x}_0 \in \partial\Omega$ e un intorno di \underline{x}_0 di lato ε così piccolo che il cubetto $Q_{2\varepsilon}$ con centro su \underline{x}_0 e lato 2ε e posto dalla parte della normale interna in \underline{x}_0 interseca $\partial\Omega$ su una superficie che è un grafico di una funzione (C^∞ per le ipotesi di regolarità su $\partial\Omega$) definita sulla base. Si definisca un sistema di coordinate locali in modo che $\partial\Omega \cap Q_{2\varepsilon}$ abbia equazione $z \equiv 0$; e in queste coordinate si consideri il cubetto \bar{Q}_ε di lato ε e con base centrata in \underline{x}_0 , situato dalla parte della normale interna. Ora \bar{Q}_ε aderisce al bordo di Ω . Si osservi che se \bar{f} è la f vista in queste nuove coordinate e se $g \in C_0^\infty(Q_\varepsilon)$ e $J(\underline{x})$ è il fattore jacobiano che da il vecchio elemento di volume nelle nuove coordinate e Q_ε è l'immagine di \bar{Q}_ε nelle coordinate originali, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon} f(-\Delta)^{n/2} g d\underline{x} &= \int_{\bar{Q}_\varepsilon} f((-\Delta)^{n/2} \bar{g} + \sum_{|\underline{\alpha}| \leq n-1} a_{\underline{\alpha}} \partial_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}} \bar{g}) J d\underline{x} = \\ &= \int_{\bar{Q}_\varepsilon} \bar{f}((-\Delta)^{n/2} (\bar{g}J) + \sum_{|\underline{\alpha}| \leq n-1} \partial_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}} (b_{\underline{\alpha}} gJ)) d\underline{x} \end{aligned}$$

se $a_{\underline{\alpha}}, b_{\underline{\alpha}}$ sono opportune funzioni di classe C^∞ che dipendono dalla forma di Ω . Inoltre al variare di $\bar{g} \in C_0^\infty(\bar{Q}_\varepsilon)$ la funzione $g' \equiv \bar{g}J$ varia su un insieme denso in $C_0^\infty(Q_\varepsilon)$ e quindi:

$$\left| \int_{Q_\varepsilon} f((-\Delta)^{n/2} g' + \sum_{|\underline{\alpha}| \leq n-1} \partial_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}} (b'_{\underline{\alpha}} g')) d\underline{x} \right| \leq \Gamma \|g'\|_{L_2(\bar{Q}_\varepsilon)} \|f\|_{W^n(\Omega)}$$

quindi ci si trova nelle ipotesi del problema [23], in cui Ω contiene un tratto piatto; e ε può essere fissato indipendente da $\underline{x}_0 \in \partial\Omega$, se Ω è limitato, come supposto.)

[25] Si rafforzi [22] facendo vedere che nella * si può considerare $j \leq n - 1$ (anzichè $j < n - d/2$). E conseguentemente, il risultato di [24] vale nella sola ipotesi che $k \leq n - d/2 - 1$. (*Idea:* si noti che [18] implica che se $f \in W^n(\Omega)$ allora ha senso considerare la restrizione o *traccia* di $\partial_z^{n-1} f$ su una superficie di dimensione $d - 1$ contenuta in Ω . Dunque la (*) ha senso se le funzioni $\partial_z^k f_{\chi_\varepsilon}$, $k = 0, \dots, n - 1$, sono pensate come elementi di $L_2(\{(\underline{x}, z), z = -\varepsilon/2, \underline{x} \in Q_\varepsilon^0\})$. Ora $\varphi_\varepsilon = \partial_z^n f_{\chi_\varepsilon}$ e si può concludere che $\|\varphi_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq \Gamma \|f\|_{W^n(\Omega)} L^{d/2} \varepsilon^{-n}$, anche se non si può più dire che φ_ε è continua. Il

problema [23] si altera in modo naturale e si perviene alla stima finale con $j = n - 1$ e quindi $j_0 \leq n - d/2 - 1$.)

[26] Si mostri che se $f \in W^n(\Omega)$ esiste una costante C tale che:

$$\|f\|_{W^n(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + L^n \|(-\Delta)^{n/2} f\|_{L_2(\Omega)}) L^{-d/2}$$

se n è pari. Ossia se f ammette derivate generalizzate di ordine n allora tutte le derivate di ordine $\leq n$ sono "dominate" dall'operatore $(-\Delta)^{n/2}$. (*Idea:* segue dal teorema di prolungamento considerato nel metodo di studio del problema [23].)

[27] Sia $f_0 \in L_2(\Omega)$, $f_0 = \lim f_n$, $f_n \in X_{rot}^0(\Omega)$ e $D(f_n) \rightarrow \lambda_0^2$, ove λ_0 è associato al primo dei problemi minimax (c.f.r. problema [10]). Si dimostri che la funzione f_0 ammette derivate prime generalizzate e anche la derivata generalizzata Δ e $-\Delta f_0 = \lambda_0^2 f_0$. (*Idea:* si ha, per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$, che (posto $(f, g)_D \equiv \int_\Omega \underline{\partial} f \cdot \underline{\partial} g d\xi$):

$$|(f_n, g)_D - \lambda_0^2 \langle f_n, g \rangle| \equiv \left| \int_\Omega f_n (-\Delta g - \lambda_0^2 g) d\xi \right| \leq \sqrt{D(f_n)} \|g\|_2 + \lambda_0^2 \|f_n\|_2 \|g\|_2$$

Poichè il limite del membro di sinistra è $\int_\Omega f_0 (-\Delta g - \lambda_0^2 g) d\xi$ questo mostra che f_0 ha un laplaciano in senso generalizzato. E $\lim (f_n, g)_D - \lambda_0^2 \langle f_n, g \rangle \equiv \int_\Omega f_0 (-\Delta g - \lambda_0^2 g) d\xi = \int_\Omega [-\Delta f_0 - \lambda_0^2 f_0] g d\xi$. Inoltre dall'analisi in [8] vediamo che $D(f_n - f_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ e quindi $D(f_n - f_0) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$; dunque $|(f_0, g)_D - \lambda_0^2 \langle f_0, g \rangle| = 0$ e $(f_0, g)_D = (-\Delta f_0, g)$ per definizione di derivata generalizzata.)

[28] Nelle ipotesi del problema [27] la f_0 è in $C^\infty(\Omega)$ e $f_0 = 0$ su $\partial\Omega$: lo si verifichi. (*Idea:* dalla $(-\Delta f_0) = \lambda_0^2 f_0$ segue che $(-\Delta)^{n/2} f_0 = \lambda_0^n f_0$, per ogni $n > 0$ e quindi, per il problema [23], la f_0 verifica le proprietà volute. L'annullamento sul bordo è conseguenza del teorema di traccia, cfr. problema [18], e del fatto che tutte le funzioni approssimanti di f_0 hanno per ipotesi valore nullo su $\partial\Omega$.)

[29] Si faccia vedere che [24] e le stime ellittiche in [26] consentono di stimare le derivate della autofunzione, normalizzata in L_2 , f_0 come $\|f_0\|_{C^j(\Omega)} \leq \Gamma L^{-d/2} (1 + (L\lambda_0)^{(j+d)})$ per tutti i valori di j .

[30] Si mostri che, grazie al principio del minimax e a quanto visto nei problemi precedenti, quanto detto per f_0 si applica anche agli altri autovettori della base generata, attraverso il principio del minimax, dalla forma quadratica di Dirichlet $D(f)$. In particolare: $\|f_p\|_{C^j(\Omega)} \leq \Gamma L^{-d/2} (1 + (L\lambda_p)^{(j+d)})$ per tutti i valori di j, p .

[31] Si adatti la teoria della forma quadratica $D(f)$ sui campi scalari $f \in C_0^\infty(\Omega)$ alla teoria della forma $D(\underline{u})$ in (9.15) sullo spazio $X_{rot}^0(\Omega)$ e si deduca il teorema che porta alle (9.16), (9.17). (*Idea:* per ripetere la versione vettoriale e a divergenza nulla dei problemi 16%30 occorre solo che i campi $X_{rot}^0(Q)$, in un cubo Q , siano densi (nella metrica di $L_2(Q)$) in $X_{rot}(T)$ ove T è Q considerato con condizioni periodiche al bordo. Questa proprietà è vera perchè i campi in $X_{rot}^0(Q)$ che si scrivono come $\underline{u} = \text{rot } \underline{A}$, con $\underline{A} \in C_0^\infty(Q)$ sono densi in $X_{rot}(T)$. Lo si vede dalla densità in $L_2(Q)$ dei campi $\underline{A} \in C_0^\infty(Q)$ e dall'esame della forma del campo $\underline{u} = \text{rot } \underline{A}$ in termini delle loro trasformate di Fourier su T , cioè della relazione $\hat{\underline{u}}(\underline{k}) = i\underline{k} \wedge \hat{\underline{A}}(\underline{k})$.)

[32] Si mostri che la successione \underline{u}_j associata a $D(\underline{u})$ dalla precedente discussione è una base ortonormale completa in $L_2(\Omega)$ che, per [31], consiste di vettori in $C^\infty(\Omega)$ con divergenza nulla e nulli sulla frontiera $\partial\Omega$. (*Idea:* se esistesse $\underline{w} \neq \underline{0}$ e in $X_{rot}^0(\Omega)$ (c.f.r. [2.2.9]) ma fuori della varietà lineare chiusa in $X_{rot}(\Omega)$ (che qui gioca il ruolo di L_2 nei problemi scalari trattati nei problemi precedenti) si potrebbe supporlo ortogonale ad essa: invero $\lambda_j^k(\underline{w}, \underline{u}_j) = (\underline{w}, (-\Delta)^k \underline{u}_j) = ((-\Delta)^k \underline{w}, \underline{u}_j)$ e quindi:

$$|(\underline{w}, \underline{u}_j)| \leq \|(-\Delta)\underline{w}\| \lambda_j^{-k}, \quad |\partial^r \underline{u}_j(x)| \leq \Gamma L^{-d/2} (1 + (L\lambda_j)^{r+d})$$

ove la seconda disuguaglianza segue da [29], [30] (adattati al caso non scalare come in [31]) Inoltre dalla prima delle (9.17) segue che $(\underline{w}, \underline{u}_j)$ tende a zero più rapidamente di ogni potenza e, dalla seconda delle (9.17), la serie $\underline{w}^{\parallel} = \sum_j (\underline{w}, \underline{u}_j) \underline{u}_j(x)$ converge molto bene così che la sua somma è nel dominio della chiusura della forma D (si verifica subito che la somma converge nel senso della norma $\sqrt{D(\underline{u})}$ così che, c.f.r. nota 2, $V \underline{w}^{\parallel}$ è nel dominio di D). Questo significa che $\underline{w} - \underline{w}^{\parallel} = \underline{w}^{\perp}$ è un vettore nel dominio della forma e che non è nullo ed è ortogonale allo spazio sotteso dai vettori \underline{u}_j , il che è impossibile per l'osservazione in [12].)

[33] Si mostri che $\lambda_j^2 \leq C j^{2/d}$ per $C > 0$ opportuna, cioè si trovi una stima inferiore simile alla stima superiore in [11] per gli autovalori della forma quadratica D in caso scalare. (*Idea*: Sia $Q' \subset \Omega$ un cubo di lato $3L$. Esso contiene 3^d cubi di lato L . Sia Q quello centrale e sia $u \in C^\infty(Q)$ periodica su Q ; si immagini che sia estesa all'intero Q' per periodicità e all'intero Ω ponendola 0 fuori di Q' . Sia χ_Q una funzione $C^\infty(\Omega)$ che vale 1 su e presso Q e si annulla presso la frontiera di Q' e fuori di Q' . Si ponga $w = \chi_Q u \in C^\infty(\Omega)$.

Poichè $\partial w = \partial \chi_Q u + \chi_Q \partial u$ vediamo che:

$$\int_{\Omega} (\partial w)^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} ((\partial \chi_Q)^2 |u|^2 + \chi_Q^2 (\partial u)^2) dx \leq \gamma^{-1} \int_Q (u^2 + (\partial u)^2) dx$$

per una opportuna costante γ . Quindi se u varia in un sottospazio $j+1$ -dimensionale $W \subset C^\infty(T)$ si ha:

$$\max_{u \in W} \int_Q (u^2 + (\partial u)^2) dx \geq \gamma \max_{u \in W} \int_{\Omega} (\partial w)^2 dx$$

Prendendo il minimo su tutti i sottospazi $j+1$ -dimensionali $W \subset C^\infty(T)$ troviamo $\Lambda_j^2(Q) \geq \lambda_j^2(\Omega)$ per il principio del minimax in [10], se $\Lambda_j^2(Q)$ sono gli autovalori associati con la forma quadratica $\int_Q (u^2 + (\partial u)^2) dx$ alla quale gli stessi argomenti e risultati (compreso il principio del minimax) ottenuti nei problemi precedenti per la forma quadratica $\int_Q (\partial u)^2 dx$ (u scalare) si applicano con ovvii cambiamenti, c.f.r. [8].

Questi ultimi autovalori hanno la forma $(2\pi L^{-1} \underline{m})^2$ ove \underline{m} è un arbitrario vettore a componenti intere e, per ogni \underline{m} , la molteplicità è 2. Pertanto otteniamo la disuguaglianza $\lambda_j^2(\Omega) \leq C j^{2/d}$ e la disuguaglianza analoga alla prima delle (9.17) segue nel presente caso scalare da [29], [30] e dall'ultima disuguaglianza; l'analoga, in questo caso scalare, della seconda stima in (9.17) segue anche dall'ultima disuguaglianza e da [30].)

[34]: Siano Q, Q', χ_Q come in [33]. Sia \underline{u} un campo C^∞ a divergenza nulla e periodico su Q . Allora \underline{u} può essere rappresentato su Q come $\underline{u} = \underline{a} + \text{rot } \underline{A}$ ove \underline{a} è un vettore costante e \underline{A} ha divergenza nulla, è $C^\infty(Q)$ ed è periodico su Q . Estendiamo \underline{A} ad un campo a divergenza nulla e in $C^\infty(Q')$ per periodicità e poniamolo uguale a $\underline{0}$ fuori di Q' . Allora $\underline{w} = \text{rot}(\chi_Q \frac{1}{2} \underline{x} \wedge \underline{a} + \chi_Q \underline{A})$ estende il campo \underline{u} ad un campo in $X_{\text{rot}}^0(\Omega)$. Si verifichi che

$$\int_{\Omega} (\partial \underline{w})^2 \leq \gamma^{-1} \int_Q (\underline{u}^2 + (\partial \underline{u})^2) d\underline{x}$$

con $\gamma > 0$ opportuna. Ciò implica le relazioni in (9.17), per lo stesso argomento usato nel caso scalare in [33] e per il fatto che gli autovalori della forma quadratica $\int_Q (\underline{u}^2 + (\partial \underline{u})^2) d\underline{x}$ possono essere calcolati esplicitamente e si vede che hanno ancora

la forma $(2\pi L^{-1} \underline{m})^2 + 1$ ove \underline{m} è un arbitrario vettore a componenti intere e, per ogni \underline{m} , la molteplicità è 4. (*Idea*: La disuguaglianza e la determinazione di γ possono essere eseguite facilmente scrivendo le relazioni in termini della trasformata di Fourier su Q di $\underline{u}, \underline{A}$.)

[35] Si mostri che anche i potenziali μ_j in [15], fissandone la costante additiva arbitraria in modo che abbiano integrale nullo su Ω , possono essere stimati in modo simile alla

seconda delle (9.17) $|\partial^k \mu_j| \leq c_k j^{\alpha+k/d}$ e si stimino α, c_k . (*Idea:* Si usi semplicemente $-\underline{\partial} \mu_j = -\Delta \underline{u}_j + \lambda_j^2 \underline{u}_j$ e quindi la (9.17).)

Bibliografia: l' analogia giroscopica in $d = 3$ è tratta da [Wa]; la teoria delle equazioni ellittiche, problema di Stokes è basata su [So], [Mi]. Per il problema di Dirichlet classico si veda anche [G4].

§10 Algoritmi vorticosi per fluidi incomprimibili di Eulero e Navier-Stokes. Il caso $d = 2$.

Finora abbiamo cercato di impostare algoritmi di soluzione “interni”: intendiamo con questo che sono algoritmi in cui si evita, o almeno si cerca di evitare, di avere a che fare con campi di velocità che presentino grandi gradienti.

L’interesse di tali metodi sta nel fatto che i moti del fluido, reali o approssimati, sono sempre moti in cui le ipotesi sotto le quali viene eseguita la deduzione microscopica delle equazioni possono essere ritenute valide.

Si possono concepire però metodi “esterni”, in cui si usano approssimazioni che violano le proprietà di regolarità dei campi di velocità macroscopici supposte nella deduzione delle equazioni. La regolarità (necessaria per la consistenza del modello fisico) dovrebbe allora essere recuperata solo al limite in cui l’ approssimazione converge alle soluzioni.

Chiaro è che la proposta di un tale metodo lascia assai perplessi, ma vale la pena esaminarlo perché nonostante tutto ha dato risultati positivi in alcuni casi e in ogni caso conduce a interessanti problemi matematici.

Il metodo è sostanzialmente uno solo e si basa sul teorema di Thomson.

Lo esamineremo, a titolo di esempio, nel caso di fluidi in contenitore periodico di lato L .

Consideriamo prima $d = 2$. In questo caso la condizione di divergenza è imposta scrivendo:

$$10.1 \quad \underline{u} = \underline{\partial}^\perp A \quad \underline{\partial}^\perp = (\partial_2, -\partial_1) \quad (10.1)$$

con A scalare (di classe C^∞ , c.f.r. §6) e la vorticità è pure uno scalare:

$$10.2 \quad \zeta = \text{rot } \underline{u} = -\Delta A \quad (10.2)$$

per cui $\underline{u} = -\underline{\partial}^\perp \Delta^{-1} \zeta$.

Vediamo che le equazioni di Eulero ($\nu = 0$) o Navier-Stokes ($\nu > 0$) si scrivono in termini di ζ :

$$10.3 \quad \begin{cases} \partial_t \zeta + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \zeta = \nu \Delta \zeta + \gamma \\ \underline{u} = -\underline{\partial}^\perp \Delta^{-1} \zeta \end{cases} \quad (10.3)$$

ove $\gamma = \text{rot } \underline{g}$.

Ora supponiamo che il campo di vorticità ζ iniziale sia singolare, una combinazione lineare di funzioni delta di Dirac:

$$10.4 \quad \zeta_0(\underline{\xi}) = \sum_{j=1}^n \omega_j \delta(\underline{\xi} - \underline{\xi}_j^0) \quad (10.4)$$

cioè supponiamo che la vorticità sia concentrata in n punti $\underline{\xi}_1^0, \dots, \underline{\xi}_n^0$ e sia ivi ∞ e proporzionale a ω_j il che vuol dire che:

$$10.5 \quad \oint_{\underline{\xi}_j^0} \underline{u}_0(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \omega_j \quad (10.5)$$

se il contorno gira attorno a $\underline{\xi}_j^0$ escludendo gli altri.

Per esprimere il campo di velocità \underline{u} relativo a (10.4) è necessario l' inverso dell' operatore di Laplace Δ con condizioni periodiche. La funzione di Green G dell' operatore $(-\Delta)^{-1}$ (con condizioni al bordo periodiche) ha la forma:

$$10.6 \quad G(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \equiv \Delta_{\underline{\xi}\underline{\eta}}^{-1} = -\frac{1}{2\pi} \log |\underline{\xi} - \underline{\eta}|_L + G_L(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \equiv G_0(|\underline{x} - \underline{\eta}|_L) + \Gamma_L(\underline{x} - \underline{\eta}) \quad (10.6)$$

ove $G_0(\underline{\xi} - \underline{\eta}) \equiv -\frac{1}{2\pi} \log |\underline{\xi} - \underline{\eta}|$ è la funzione di Green nel caso dell' operatore Δ su tutto il piano, e $|\underline{\xi} - \underline{\eta}|_L$ è la metrica sul toro di lato L definita da $|\underline{\xi} - \underline{\eta}|_L^2 = \min_{\underline{n}} |\underline{\xi}_i - \underline{\eta}_i - \underline{n}L|^2$, con Γ_L di classe C^∞ per $|\underline{\eta}_i - \underline{\xi}_i| \neq \frac{\pi}{L}$; inoltre $G(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ è di classe C^∞ per $\underline{\xi} \neq \underline{\eta}$ ed è periodica con periodo L . Si vedano i problemi [12] e segg. per una dimostrazione di questa interessante proprietà.

La funzione $\underline{u}^0 = -\partial^\perp \Delta^{-1} \zeta^0$ ha derivate singolari (ad esempio $\text{rot } \underline{u}^0 = \sum_i \omega_i \delta(\underline{\xi} - \underline{\xi}_i)$) e quindi non solo non si è nella situazione in cui ha fisicamente senso dedurre che l' evoluzione di \underline{u}^0 è governata dalle equazioni di Eulero o Navier Stokes, ma si hanno addirittura problemi di interpretazione delle equazioni stesse.

Consideriamo il caso dell' equazione di Eulero: $\nu = 0$, e si supponga $\gamma = 0$.

In realtà l' ambiguità è in un certo senso banale; se si suppone che $\zeta(\underline{\xi}, t)$ abbia la forma:

$$10.7 \quad \zeta(\underline{\xi}, t) = \sum_{i=1}^n \omega_i \delta(\underline{\xi} - \underline{\xi}_i(t)) \quad (10.7)$$

ove $t \rightarrow \underline{\xi}_j(t)$ sono opportune funzioni, si può trovare l' equazione verificata da $\underline{\xi}_j(t)$.

Si osservi che la (10.7) sarebbe conseguenza della conservazione della vorticità perchè dice che la vorticità è trasportata (come deve nei casi regolari, *c.f.r.* (7.14)) dal campo di velocità che la genera *se* ζ^0 fosse regolare: poiché tale non è si deve pensare piuttosto che (10.7) sia parte della definizione stessa di soluzione della (10.3) con dato iniziale singolare che, strettamente parlando, non ha senso perchè ζ non è regolare.

Per sostituzione di (10.7) nell' equazione di Eulero, (10.3) con $\nu = 0$, si trova:

$$10.8 \quad \sum_{i=1}^n \omega_i \partial \delta(\underline{\xi} - \underline{\xi}_i(r)) \cdot \dot{\underline{\xi}}_i - \sum_{j=1}^n \omega_j \partial^\perp G(\underline{\xi}, \underline{\xi}_j(t)) \cdot \sum_{p=1}^n \omega_p \partial \delta(\underline{\xi} - \underline{\xi}_p(t)) = 0 \quad (10.8)$$

ossia ponendo $\underline{\xi} = \underline{\xi}_i(t)$:

$$10.9 \quad \dot{\underline{\xi}}_i = \partial_{\underline{\xi}_i}^\perp \sum_{j=1}^n \omega_j G(\underline{\xi}_i, \underline{\xi}_j) \equiv \partial_{\underline{\xi}_i}^\perp \sum_{h \neq i}^n \omega_h G(\underline{\xi}_i, \underline{\xi}_h) + \partial_{\underline{\xi}}^\perp \omega_i G(\underline{\xi}, \underline{\xi}_i)|_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_i} \quad (10.9)$$

che non ha senso, perché $\partial_{\underline{\xi}}^\perp G(\underline{\xi}, \underline{\xi}_i)|_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_i} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(\underline{\xi}-\underline{\xi}_i)^\perp}{|\underline{\xi}-\underline{\xi}_i|^2}|_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_i}$ non ha senso.

Però si può pensare che le componenti di $\partial_{\underline{\xi}}^\perp G(\underline{\xi}, \underline{\xi}_i)|_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_i}$ siano numeri aventi per valore il limite per $\underline{\xi} \rightarrow \underline{\xi}_i$ di una funzione dispari di $\underline{\xi}-\underline{\xi}_i$ e quindi possono essere interpretati come zero. Questa considerazione, ovviamente, può solo avere un valore euristico e nulla toglie al fatto che la (10.9) non ha senso matematico.

Allora si *definisce* soluzione di (10.3), con $\nu = \gamma = 0$ e dato iniziale (10.4), la (10.7) con $\underline{\xi}_j(t)$ dato dalla soluzione dell'equazione:

$$10.10 \quad \dot{\underline{\xi}}_j = \partial_{\underline{\xi}_j}^\perp \sum_{n \neq j} \omega_n G(\underline{\xi}_j, \underline{\xi}_n) \quad (10.10)$$

che coincide con la (10.9) privata del termine senza senso.

Tutto questo procedimento può giustamente sembrare arbitrario e conviene esaminare attraverso quali meccanismi si può immaginare di approssimare soluzioni regolari alla equazione di Eulero ($\nu = \gamma = 0$ in (10.3)) a mezzo di soluzioni della (10.10).

L'idea è piuttosto semplice. Un campo continuo di vorticità si può pensare come limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ di:

$$10.11 \quad \zeta_\varepsilon^0(\underline{x}) = \sum_i \zeta_i^0 |\Delta_i| \delta(\underline{x} - \underline{x}_i) \quad (10.11)$$

ove $\zeta_i = \zeta(\underline{x}_i)$ e la somma è vista su una pavimentazione di T_L in quadratini Δ_i di centro \underline{x}_i e lati ε .

Questo significa che almeno al fine di calcolare gli integrali $\int \zeta^0(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x}$ si può procedere calcolando:

$$10.12 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \zeta_\varepsilon^0(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x}, \quad \text{per ogni } f \in C^\infty(T_L) \quad (10.12)$$

ossia, come si ama dire in analisi matematica, la ζ_ε^0 approssima *debolmente* ζ^0 .

Allora si può sperare che, facendo evolvere la (10.11) con l'evoluzione (10.10) e definendo così un campo singolare di vorticità $\zeta_\varepsilon(\underline{x}, t)$, si abbia che:

$$10.13 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_\varepsilon(\underline{x}, t) = \zeta(\underline{x}, t) \quad (10.13)$$

esista *nel senso debole*, cioè $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \zeta_\varepsilon(\underline{x}, t) f(\underline{x}) d\underline{x} = \int \zeta(\underline{x}, t) f(\underline{x}) d\underline{x}$, per ogni funzione $f \in C^\infty(T_L)$, e sia una funzione regolare se tale era ζ^0 , verificante le (10.3) con dato iniziale ζ_0 .

È quindi molto interessante che questa ultima affermazione sia effettivamente vera se $\zeta_0 \in C^\infty(T_L)$, [MP]. Questo teorema è di grande interesse perché fa vedere la possibilità di schemi di approssimazioni “esterne” alle soluzioni delle equazioni di Eulero.

Il metodo può essere opportunamente esteso anche alla teoria dell’ eq. di Navier Stokes, $\nu \neq 0$, e al caso forzato $\underline{g} \neq 0$. Tralasciamo per il momento queste estensioni e invece studiamo un po’ le proprietà più elementari della (10.10).

Si deve prima osservare che la (10.10) può essere posta in forma hamiltoniana; poniamo $\underline{x}_i = (x_i, y_i)$:

$$p_i = \sqrt{|\omega_i|} x_i, \quad q_i = \frac{\omega_i}{\sqrt{|\omega_i|}} y_i, \quad (\underline{p}, \underline{q}) \equiv (p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$$

$$H(\underline{p}, \underline{q}) = -\frac{1}{2} \sum_{h \neq k} \omega_h \omega_k G(\xi_n, \xi_k)$$
(10.14)

ove ξ_n, ξ_k vanno pensati espressi in termine delle $(p_n, q_k), (p_k, q_k)$.

Allora si verifica subito che (10.10) diventa:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$
(10.15)

ossia le equazioni (10.10) sono equivalenti al sistema di equazioni hamiltoniane (10.15). Nel caso di $L = \infty$ ossia delle equazioni in tutto lo spazio:

$$H(\underline{p}, \underline{q}) = \frac{1}{8\pi} \sum_{h \neq k} \omega_h \omega_k \log \left(\left| \frac{p_h}{\sqrt{|\omega_h|}} - \frac{p_k}{\sqrt{|\omega_k|}} \right|^2 + \left| \frac{q_h}{\sigma_h \sqrt{|\omega_h|}} - \frac{q_k}{\sigma_k \sqrt{|\omega_k|}} \right|^2 \right)$$
(10.16)

ove σ_i è il segno di ω_i .

Considereremo ora il solo caso $L = \infty$, ma anche così le equazioni sono di difficile soluzione, eccetto che nell’ interessante caso banale del problema “dei due vortici”. In tal caso:

$$H = \frac{1}{4\pi} \omega_1 \omega_2 \log \left[\left(\frac{p_1}{\delta_1} - \frac{p_2}{\delta_2} \right)^2 + \left(\frac{q_1}{\delta_1} \sigma_1 - \frac{q_2}{\delta_2} \sigma_2 \right)^2 \right]$$
(10.17)

con $\delta_j = \sqrt{|\omega_j|}$ e le equazioni di Hamilton divengono, se Δ è l’ argomento del logaritmo:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\omega_1 \omega_2}{2\pi} \frac{\frac{\sigma_1}{\delta_1} \left(q_1 \frac{\sigma_1}{\delta_1} - q_2 \frac{\sigma_2}{\delta_2} \right)}{\Delta} \quad \dot{p}_2 = +\frac{\omega_1 \omega_2}{2\pi} \frac{\frac{\sigma_2}{\delta_2} \left(q_1 \frac{\sigma_1}{\delta_1} - q_2 \frac{\sigma_2}{\delta_2} \right)}{\Delta}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\omega_1 \omega_2}{2\pi} \frac{\frac{1}{\delta_1} \left(\frac{p_1}{\delta_1} - \frac{p_2}{\delta_2} \right)}{\Delta} \quad \dot{q}_2 = -\frac{\omega_1 \omega_2}{2\pi} \frac{\frac{\sigma}{\delta_2} \left(\frac{p_1}{\delta_1} - \frac{p_2}{\delta_2} \right)}{\Delta}$$

per cui si vede che $\sigma_1 \delta_1 p_1 + \sigma_2 \delta_2 p_2 = \text{cost}$, $\delta_1 q_1 + \delta_2 q_2 = \text{cost}$ ossia in termine delle coordinate originali:

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = \text{cost}, \quad \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 = \text{cost}$$
(10.18)

e se $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ si può definire il “centro di vorticità”:

$$10.19 \quad x = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad y = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (10.19)$$

Se $\omega_1/\omega_2 > 0$ il centro di vorticità è il “baricentro” dei due vortici con “massa” uguale a $|\omega_i|$: il vortice più veloce è più vicino al centro di vorticità. Se $\omega_1/\omega_2 < 0$ il centro di vorticità lascia i due vortici P_1 e P_2 “dallo stesso lato”. Le equazioni sono risolte dal moto secondo il quale la congiungente $P_1 P_2$ i due vortici ruota con velocità angolare $(\omega_1 + \omega_2)/(2\pi\Delta)$ in senso antiorario, se $\Delta = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, (*c.f.r.* problemi).

Se invece $\omega_1 + \omega_2 = 0$ e $\omega = \omega_1$, i due vortici si muovono su due rette parallele e perpendicolari alla loro congiungente con velocità $\omega/(2\pi\sqrt{\Delta})$, spostandosi verso destra del vettore che va dal punto 2 all’ 1 se $\omega > 0$ (e verso sinistra altrimenti), (*c.f.r.* problemi).

In generale il problema a n vortici con intensità $\omega_1, \dots, \omega_n$, con vorticità totale $\omega = \sum_i \omega_i = 0$ nulla ammette, se $L = \infty$, quattro integrali primi:

$$10.20 \quad \begin{aligned} I_1 &= \sum_i \sigma_i \sqrt{|\omega_i|} p_i, & I_2 &= \sum_i \sqrt{|\omega_i|} q_i, \\ I_3 &= \sum_i \sigma_i (p_i^2 + q_i^2), & I_4 &= H(\underline{p}, \underline{q}) \end{aligned} \quad (10.20)$$

questi integrali si scrivono, nelle coordinate originali semplicemente:

$$10.21 \quad I_1 = \sum_i \omega_i x_i, \quad I_2 = \sum_i \omega_i y_i, \quad I_3 = \frac{1}{2} \sum_i \omega_i |\xi_i|^2 \quad (10.21)$$

mentre I_4 è dato da (10.16). La loro costanza segue direttamente dalle equazioni del moto nelle coordinate \underline{x}_i , (10.10) con G dato dalla (10.6), moltiplicandole per ω_i e sommando su i ovvero moltiplicandole scalarmente per $\omega_i \underline{x}_i$ e sommando su i . Se L è finito solo I_1, I_2, I_4 sono integrali primi.

In generale però questi integrali non sono in involuzione nel senso delle parentesi di Poisson. Tranne in alcuni casi notevoli.

Ad esempio $\{I_4, I_j\} = 0$ esprime semplicemente che I_1, I_2, I_3 sono costanti del moto; mentre $\{I_1, I_2\} = 0$ solo se $\sum_i \omega_i \equiv \omega = 0$, (perchè I_1 è funzione delle sole \underline{p} e I_2 è funzione delle sole \underline{q} e quindi il calcolo della parentesi è banale e si vede che dá, appunto, ω); inoltre $\{I_3, I_2\} = I_1$ e $\{I_3, I_1\} = -I_2$.

In base ai teoremi generali sui sistemi integrabili ci si deve attendere allora che anche il problema a tre vortici con vorticità totale nulla sia integrabile per quadrature. E infatti questa è una proprietà vera in generale. I moti “confinati” (ossia tali che le coordinate dei punti restino limitate per $t \rightarrow \infty$) saranno in generale quasi periodici e gli altri saranno riducibili a sovrapposizioni di moti rettilinei uniformi e moti quasi periodici): *c.f.r.* problemi. Qui si intende per “sovrapposizione” la sovrapposizione non lineare che si considera in Meccanica, si veda [Ga14].

L’ interesse della condizione di vorticità totale nulla sta nel fatto che tale condizione deve essere automaticamente verificata se si richiede che

il campo di velocità generato dai vortici tenda a 0 all' ∞ abbastanza rapidamente (cioè più velocemente della distanza dall' origine): in tal caso la circolazione all' ∞ è nulla e d' altra parte vale naturalmente ω .

Ma in realtà anche il problema generale a tre vortici con $\omega \neq 0$, che rappresenta campi di velocità che si annullano lentamente all' ∞ , è integrabile in generale per quadrature, cfr. problemi.

Per quanto riguarda il problema a quattro o più vortici si può mostrare, con lo stesso metodo usato da Poincaré per mostrare la non integrabilità per quadrature del problema dei tre corpi della Meccanica Celeste, che il problema è in generale non integrabile per quadrature.

Infine se si considerano le equazioni di Eulero in domini Ω diversi dal toro e da R^2 si ottengono le equazioni (10.10) con $G(\underline{\xi} - \underline{\eta})$ sostituito dalla funzione di Green $G(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ del problema di Dirichlet in Ω . Infatti la condizione al bordo $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ impone, per la (10.1) che il potenziale A deve avere derivata *tangenziale* nulla sul bordo di Ω e quindi deve essere costante e la costante può essere fissata uguale a 0. Quindi $A = \Delta^{-1}\zeta$ ove Δ è l' operatore di Laplace con condizione al bordo nulla.

In questi casi, in generale, solo I_4 è un integrale primo: fa eccezione il caso in cui Ω è un disco, in cui anche I_3 è integrale primo e quindi in tal caso il problema dei due vortici è ancora integrabile per quadrature.

Problemi.

[1] Si mostri che le equazioni per il moto di due vortici locati in (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e con intensità ω_1, ω_2 sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_2 (y_1 - y_2)/2\pi\Delta, & \dot{x}_2 &= \omega_1 (y_1 - y_2)/2\pi\Delta \\ \dot{y}_1 &= \omega_2 (x_1 - x_2)/2\pi\Delta, & \dot{y}_2 &= -\omega_1 (x_1 - x_2)/2\pi\Delta \end{aligned}$$

e se ne deduca che posto $\zeta = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ si ha $\dot{\zeta} = \frac{i(\omega_1 + \omega_2)}{2\pi|\zeta|^2}\zeta$. Dedurre quindi le leggi di moto per il problema dei due vortici discusse dopo la (10.19).

[2] Si supponga $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$, $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ e si ponga $c^{-1} = \sqrt{|\omega_1 + \omega_2|}$ e $d^{-1} = \sqrt{|\omega_1|^{-1} + |\omega_2|^{-1}}$. Siano σ_1, σ_2 i segni di ω_1, ω_2 e siano ϑ_1, ϑ_2 i segni di $\omega_1 + \omega_2$ e di $\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1}$. Si dimostri che la trasformazione $(p_1, p_2, q_1, q_2) \leftrightarrow (p, p', q, q')$:

$$\begin{aligned} p &= (\sigma_1|\omega_1|^{1/2}p_1 + \sigma_2|\omega_2|^{1/2}p_2)c & q &= (|\omega_1|^{1/2}q_1 + |\omega_2|^{1/2}q_2)c\vartheta_1 \\ p' &= (p_1|\omega_1|^{-1/2} - p_2|\omega_2|^{-1/2})d & q' &= (\sigma_1q_1|\omega_1|^{-1/2} - \sigma_2q_2|\omega_2|^{-1/2})d\vartheta_2 \end{aligned}$$

è una trasformazione canonica. (*Idea*: Si verifichi che le parentesi di Poisson fra le p, p', q, q' sono canoniche.)

[3] Si noti che nelle coordinate (p, p', q, q') la hamiltoniana del problema dei due vortici dipende solo dalle coordinate (p', q') ed è integrabile per quadrature a (p, q) fissi nella regione $(p', q') \neq (0, 0)$. Si mostri che le coordinate azione angolo (A, α) possono essere identificate con le coordinate polari nel piano (p', q') :

$$A = \frac{1}{2}(p'^2 + q'^2), \quad \alpha = \arg(p', q'), \quad \text{e} \quad H(p', q') = \frac{\omega_1\omega_2}{4\pi} \log A + \text{cost}$$

(*Idea*: Si osservi che la trasformazione $(p', q') \leftrightarrow (A, \alpha)$ è una trasformazione che conserva l' area e quindi è canonica.)

[4] Si mostri che i risultati di [2] e [3] possono essere adattati alle ipotesi $\omega_1 + \omega_2 = 0, \omega_1 \neq 0$ e si svolga esplicitamente questo caso. (*Idea*: Ad esempio la trasformazione

$$p' = p_1 - p_2, \quad q = (q_1 + q_2), \quad p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad q' = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$$

è canonica e trasforma H in $\frac{1}{4\pi} \log(p'^2 + q^2) + \text{const.}$ Tuttavia ora i moti non hanno componenti periodiche, corrispondenti, nel caso precedente, alle rotazioni dei vortici attorno al centro di vorticità che ora è all'infinito.)

[5] Si faccia vedere, *c.f.r.* (10.20), che $\{I_3, I_1\} = -I_2$, $\{I_3, I_2\} = I_1$ e $\{I_1, I_2\} = \sum_i \omega_i$.

[6] Dati tre vortici di intensità $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, con $\omega_j > 0$, si consideri la trasformazione $(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) \leftrightarrow (p, p', p_3, q, q', q_3)$ del problema [2] (è una trasformazione canonica in cui le terze coordinate canoniche sono invarianti) e la si componga con la trasformazione canonica dello stesso tipo $(p, p', p_3, q, q', q_3) \leftrightarrow (P, p', p'', Q, q', q'')$ in cui (p', q') sono invarianti e la trasformazione su (p, p_3, q, q_3) è costruita ancora come in 2 immaginando che in (p, q) ci sia un vortice di intensità $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{12}$ e in (p_3, q_3) ci sia un vortice di intensità ω_3 . Si dimostri che nelle nuove coordinate (P, p', p'', Q, q', q'') la hamiltoniana è funzione delle sole (p', p'', q', q'') mentre I_3 è la somma di una funzione delle sole (P, Q) e di una funzione delle sole (p', p'', q', q'') .

[7] Si mostri, nel contesto del problema [6] che le P, Q sono costanti del moto e le superfici $H = \varepsilon$, $I_3 = \kappa$ sono superfici limitate nello spazio delle fasi. Quindi quando sono superfici bidimensionali regolari (ossia prive di punti singolari o addirittura degeneri) allora sono tali che le loro componenti connesse sono tori bidimensionali (teorema di Arnold-Liouville), [A], e i moti su questi tori sono quasi periodici a due frequenze. Il problema dei tre vortici, ossia la determinazione dei moti del sistema a due gradi di libertà ottenuto fissando i valori di P, Q , è quindi integrabile per quadrature se $\omega_i > 0$.

[8] Si faccia vedere che, utilizzando il risultato di [4], quanto detto per il problema dei tre vortici e per la sua integrabilità per quadrature resta vero nel caso che le vorticità non abbiano tutte lo stesso segno, ma siano tali che $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ e $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \neq 0$. Questa volta però le superfici $I_3 = \kappa$, $H = \varepsilon$ non saranno in generale limitate e quindi le superfici invarianti avranno la forma, in opportune coordinate, di prodotto di uno spazio $R^1 \times T^1$, ovvero R^2 , ovvero T^2 e queste coordinate possono essere scelte in modo da evolvere linearmente e il moto sarà quasi periodico solo nel terzo caso.

[9] Si consideri il problema dei due vortici in una regione circolare finita. Si mostri che anche questo è un problema integrabile per quadrature. (*Idea:* questa volta I_1, I_2 non sono costanti del moto, ma H, I_3 lo sono ancora (la seconda per la simmetria circolare del problema); inoltre ovviamente tutti i moti sono confinati.)

[10] Come [9] ma supponendo i due vortici confinati su un toro. Si mostri che però i due vortici si muovono di moto rettilineo perchè la vorticità totale deve essere 0. (*Idea:* si noti che sul toro il campo di velocità $\underline{u} = \underline{\partial}^\perp A$, per un A regolare e opportuno, deve essere periodico e quindi si possono solo considerare vortici con vorticità totale nulla. Questa volta I_3 non è integrale primo, ma I_1, I_2 lo sono e inoltre sono in involuzione fra loro e con H : ossia $\{I_1, I_2\} = 0$ ove $\{\cdot, \cdot\}$ denota la *parentesi di Poisson*.)

[11] Si mostri che anche il problema dei tre vortici sul toro dovrà essere integrabile per quadrature, al di fuori delle superfici di livello di H, I_1, I_2 che sono non compatte. (*Idea:* I_1 e I_2 sono in involuzione perchè la vorticità totale è nulla sul toro, *c.f.r.* [10], e sono in involuzione con H . Quindi si applichi il teorema di Arnold-Liouville, *c.f.r.* [7].)

[12] (*Funzione di Green per condizioni al bordo periodiche*) Si ponga $G_N(\underline{x} - \underline{y}) = \sum_{|\underline{n}| \leq N} G_0(\underline{x} - \underline{y} - \underline{n}L) - \sum_{0 < |\underline{n}| \leq N} G_0(\underline{n}L)$, ove la somma verte sui vettori a componenti intere $\underline{n} = (n_1, n_2)$ e G_0 è definito dopo (10.6). Si verifichi l'esistenza del limite $\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(\underline{x} - \underline{y}) = G(\underline{x} - \underline{y})$, e che risulta essere una funzione periodica di $\underline{x} - \underline{y}$ con periodo L in ciascuna coordinata, e che differisce da $G_0(\underline{x} - \underline{y})$ per una funzione C^∞ di $\underline{x}, \underline{y}$ per $\underline{x} - \underline{y}$ piccolo rispetto a L .
Si verifichi che la sola singolarità di $G(\underline{\xi} - \underline{\eta})$ è a $\underline{\xi} = \underline{\eta}$. (*Idea:* Si noti che $G_0(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi} \log |\underline{x}|$ e $|\underline{\xi} - \underline{n}L| = |\underline{n}|L(1 + (-2\underline{n} \cdot \underline{x}L + \underline{x}^2)/(\underline{n}L)^2)^{1/2}$; e posto $\varepsilon = (-2\underline{n} \cdot \underline{x}L + \underline{x}^2)/(\underline{n}L)^2$ si ha $-G_0(\underline{\xi} - \underline{n}L) = \frac{1}{4\pi} \log(1 + \varepsilon) + \frac{1}{2\pi} \log |\underline{n}|L$.)

Sviluppando in potenze di ε questo diventa $\frac{1}{4\pi}(\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)) + \frac{1}{2\pi} \log |\underline{n}|L$. Così $-G_0(\underline{\xi} - \underline{n}L)$ diventa:

$$\frac{1}{4\pi} \left(2 \frac{\underline{n} \cdot \underline{\xi} L}{|\underline{n}|^2 L^2} + \frac{\underline{\xi}^2}{|\underline{n}|^2 L^2} - 2 \frac{(\underline{n} \cdot \underline{\xi})^2 L^2}{(|\underline{n}|^2 L^2)^2} + O(|\underline{n}|^{-3}) + \frac{1}{2\pi} \log |\underline{n}|L \right)$$

Sommando su \underline{n} notiamo che i termini lineari in $\underline{\xi}$ si sommano a 0 per parità; inoltre i termini in $(\underline{n} \cdot \underline{\xi})^2$ hanno la forma $\sum_{i,j} n_i n_j \xi_i \xi_j$ e per symmetria otterremo lo stesso risultato se l'ultima somma è sostituita da $\sum_i \xi_i^2 n_i^2$ e per la simmetria tra le componenti di \underline{n} otterremo ancora lo stesso risultato se sostituiamo questo con $\sum_i \xi_i^2 \underline{n}^2 = 2\underline{\xi}^2 \underline{n}^2$. Ciò significa che nel sommare su \underline{n} i contributi dai termini quadratici in $\underline{\xi}$ si cancellano esattamente. Pertanto sommare su \underline{n} fornisce lo stesso risultato che sommare

$$\sum_{|\underline{n}| < N} \left[G_0(\underline{\xi} - \underline{n}L) - G_0(\underline{n}L) - \underline{\partial} G_0(\underline{n}L) \cdot \underline{\xi} - \frac{1}{2} \underline{\partial}^2 G_0(\underline{n}L) \cdot \underline{\xi} \underline{\xi} \right]$$

che è una somma di termini di grandezza $O(|\underline{n}|^{-3})$, che quindi converge perchè la dimensione è $d = 2$. E invero le derivate di ordine $\alpha \geq 0$ rispetto a $\underline{\xi}$ della somma di cui sopra sono (evidentemente) espresse da somma di quantità che hanno grandezza in \underline{n} di ordine $O(|\underline{n}|^{-3-\alpha})$ così che il limite è C^∞ nel senso affermato.)

[13] Si mostri che se $|\underline{x} - \underline{y}|_L^2$ è definito come $\sum_{i=1}^2 (|x_i - y_i| \bmod L)^2$, ossia se $|\underline{x} - \underline{y}|$ è la metrica naturale sul toro di lato L , allora vale la (10.6) con Γ_L di classe C^∞ sul toro.

[14] Si mostri che la funzione $G(\underline{x} - \underline{y})$ è tale che $\Delta_{\underline{y}} G(\underline{x} - \underline{y}) = \delta(\underline{x} - \underline{y})$: per questo motivo la costruzione in [12] è chiamata il “metodo delle immagini” per l'operatore di Laplace con condizioni periodiche. (*Idea*: basta dimostrarlo per $\underline{x} = (\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$, per l'invarianza di G per traslazioni.)

Bibliografia: Il teorema di approssimazione esterna, seguente la (10.13) è tratto da [MP1]; per i sistemi integrabili per quadrature si veda [A], [G1], [G3].

§11 Algoritmi vorticosi per fluidi incomprimibili di Eulero e Navier-Stokes. Il caso $d = 3$.

Passiamo ora allo studio dei sistemi a tre dimensioni. In questo caso l'analogo del vortice puntiforme è una curva chiusa orientata γ , che chiameremo **filamento**, sulla quale il $\text{rot } \underline{u} = \underline{\omega}$ è concentrato ed è ad essa *tangente*, così che γ è una linea di flusso per $\underline{\omega}$.

(A) *Filamenti regolari. Divergenze.*

Per capire come un filamento γ di vorticità possa evolvere si consideri l'equazione di Eulero nella forma (7.3):

$$11.1 \quad \dot{\underline{\omega}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{\omega} - \underline{\omega} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = 0, \quad \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \underline{\omega} \cdot \underline{\partial} \underline{u} \quad (11.1)$$

È facile trovare il significato della (11.1) come equazione di evoluzione della curva γ se si considera un punto $\xi \in \gamma$ e un tratto $\alpha \underline{\omega}$ di filamento, con α infinitesimo. Studiamo l'evoluzione per trasporto da parte del fluido dell'elemento di filamento compreso fra ξ e $\xi + \alpha \underline{\omega}$:

$$11.2 \quad \begin{aligned} \xi &\rightarrow \xi' = \xi + \underline{u}(\xi) dt \\ \xi + \alpha \underline{\omega} &\rightarrow \tilde{\xi}' = \xi + \alpha \underline{\omega} + \underline{u}(\xi + \alpha \underline{\omega}) dt \end{aligned} \quad (11.2)$$

che implica che l'arco di γ compreso fra $\underline{\xi}$ e $\underline{\xi} + \alpha \underline{\omega}$ evolve nell'arco compreso fra $\underline{\xi}'$ e $\underline{\tilde{\xi}}'$ con:

$$11.3 \quad \tilde{\xi}' - \xi' = \alpha (\underline{\omega} + \underline{\omega} \cdot \underline{\partial} \underline{u} dt) = \alpha \underline{\omega}', \quad \text{se } \underline{\omega}' \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\omega} + \underline{\omega} \cdot \underline{\partial} \underline{u} dt \quad (11.3)$$

Questo mostra, vista la seconda delle (11.1), che l'elemento di linea $\alpha \underline{\omega}$ evolve in $\alpha \underline{\omega}'$ mentre la linea è trasportata dalla corrente: dunque γ resta sempre tangente a $\underline{\omega}$ e se la lunghezza di un elemento di linea di γ viene mutata, nell'evoluzione di γ , di un fattore $(1 + \lambda dt)$ allora $\omega' = \omega(1 + \lambda dt)$ descrive anche l'evoluzione conseguente del modulo $\omega = |\underline{\omega}|$ di $\underline{\omega}$.

Pertanto l'evoluzione della forma del filamento è semplicemente quella dovuta al suo trasporto da parte del fluido. Invece la vorticità varia *proporzionalmente* all'espansione dell'elemento di linea ad essa corrispondente: se la linea si allunga la vorticità cresce.

Poichè la vorticità è un campo a divergenza nulla, il suo flusso è costante lungo le linee di flusso, in particolare lungo γ ; dunque se γ è un filamento di vorticità deve essere:

$$11.4 \quad \underline{\omega}(\underline{\xi}) = \Gamma \delta_\gamma(\underline{\xi}) \underline{t}_\gamma(\underline{\xi}) \quad (11.4)$$

ove $\underline{t}_\gamma(\underline{\xi})$ è il versore tangente a γ in $\underline{\xi} \in \gamma$ e $\delta_\gamma(\underline{\xi})$ è una distribuzione uniforme concentrata su γ , definita da:

$$11.5 \quad \int f(\underline{\xi}) \delta_\gamma(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \stackrel{def}{=} \int_\gamma f(\underline{\xi}) dl \quad (11.5)$$

per ogni $f \in C^\infty$, se dl è l' elemento di linea per γ .

Mostriamo che Γ *non dipende dal tempo*: si immagini la distribuzione δ_γ realizzata come (limite di) una funzione diversa da zero in un intorno tubolare infinitesimo \mathcal{T} di sezione, in $\underline{\xi} \in \gamma$, data da $s(\underline{\xi})$. Allora, denotando $\chi_{\mathcal{T}}(\underline{\xi})$ la funzione caratteristica di \mathcal{T} , si deve avere:

$$11.6 \quad \underline{\omega}(\underline{\xi}) = \Gamma \chi_{\mathcal{T}}(\underline{\xi}) \frac{1}{s(\underline{\xi})} \underline{t}_\gamma(\underline{\xi}) \quad (11.6)$$

se $\underline{t}_\gamma(\underline{\xi})$ è il versore tangente a γ in $\underline{\xi}$.

Ma al variare del tempo \mathcal{T} si trasforma in \mathcal{T}' e la sezione del tubetto si contrae di $(1 + \lambda dt)$ laddove l' elemento di linea si espande di $(1 + \lambda dt)$ perchè il tubetto \mathcal{T} evolve per trasporto incompressibile. Al tempo stesso sappiamo che la vorticità varia dello stesso fattore $(1 + \lambda dt)$ e quindi, se $\underline{\xi}$ e $\underline{\xi}'$ sono punti corrispondenti sulla curva γ e sulla sua immagine γ' , per evoluzione, si nota che:

$$11.7 \quad \underline{\omega}'(\underline{\xi}') = \Gamma \chi_{\mathcal{T}'}(\underline{\xi}')(1 + \lambda dt) \frac{1}{s(\underline{\xi}')} \underline{t}_{\mathcal{T}'} \equiv \Gamma \chi_{\mathcal{T}'}(\underline{\xi}') \frac{1}{s'(\underline{\xi}')} \underline{t}_{\mathcal{T}'} \quad (11.7)$$

che, confrontando con (11.6), implica che $\Gamma' \equiv \Gamma$.

Il campo di velocità \underline{u} associato ad un filamento di vorticità si calcola a mezzo della *formula di Biot-Savart*:

$$11.8 \quad \underline{u}(\underline{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_\gamma \frac{d\rho \wedge (\underline{x} - \rho)}{|\underline{x} - \rho|^3} \quad (11.8)$$

ove $d\rho$ è l' elemento di linea vettoriale di γ : è infatti la soluzione di $\partial \wedge \underline{u} = \underline{\omega}$ e quindi è il campo magnetico generato dalla densità di corrente $\underline{\omega}$ in (11.6).

Allora, ingenuamente, l' evoluzione di un sistema di filamenti di vorticità dovrebbe essere descritto da:

$$11.9 \quad \frac{d\rho}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{4\pi} \oint_{\gamma_j} \frac{d\underline{l} \wedge (\underline{\rho} - \underline{l})}{|\underline{\rho} - \underline{l}|^3} \quad \text{se } \underline{\rho} \in \cup_{j=1}^n \gamma_j \quad (11.9)$$

perchè devono essere trasportati dalla corrente \underline{u} .

Si può poi tentare di vedere se un campo di vorticità generico $\underline{\omega}$ è approssimabile■ mediante una famiglia di molti filamenti γ di vorticità di piccola circolazione Γ che, al variare di un parametro di approssimazione ε si addensano approssimando■ sempre meglio $\underline{\omega}$ nel senso che per ogni fissata $f \in C^\infty(R^3)$:

$$11.10 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \underline{f}(\underline{x}) \cdot \underline{\omega}_\varepsilon(\underline{x}) d\underline{x} = \int \underline{f}(\underline{x}) \cdot \underline{\omega}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (11.10)$$

Due sono le difficoltà di questa congettura, suggerita dal successo dell' analoga formulazione a $d = 2$ in §10.

La più evidente è forse che questa volta non c'è modo di trascurare l' autointerazione del filamento con se stesso. Questo si vede chiaro già nel caso semplice di un filamento circolare. In questo caso anzi si vede che la velocità \underline{u} è infinita sui punti del filamento e quindi non ha senso farlo muovere con velocità \underline{u} . Infatti in un punto $\xi \in \gamma$, supponendo γ circolare di raggio R , si avrà:

$$\dot{\underline{\rho}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{\gamma} d\underline{\rho}' \wedge \frac{\underline{\rho} - \underline{\rho}'}{|\underline{\rho} - \underline{\rho}'|^3} \quad (11.11)$$

che mostra che $\dot{\underline{\rho}}$ è ortogonale al piano della spira e ha intensità v data da:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2R^2 d\alpha \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{|(2R \sin \alpha/2)^3|} = \frac{\Gamma}{2^4 \pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{|\sin \alpha/2|} = \infty \quad (11.12)$$

Più in generale \underline{u} diverge nell' intorno di ogni punto di γ in cui si abbia curvatura $R^{-1} > 0$. Quindi non ha senso considerare l' evoluzione del filamento.

Un' altra difficoltà indipendente dalla precedente è che un generico campo di velocità \underline{u} a divergenza nulla non ha associato un campo di vorticità $\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u}$ con linee di flusso chiuse. Invero in generale le linee di flusso del campo $\underline{\omega}$, pur non potendo “terminare”, si avvolgeranno riempiendo densamente regioni di R^3 senza mai chiudersi (cfr. §6, problema [20]). E cioè è poco naturale pensare che un campo di velocità arbitrario possa essere approssimato da campi di vorticità con linee chiuse di flusso.

Quest' ultimo è un aspetto per cui il fluido 3-dimensionale differisce profondamente da quello 2-dimensionale in cui invece un campo di vorticità arbitraria può essere naturalmente pensato come caso limite di un campo in cui la vorticità è concentrata in punti.

Delle due difficoltà la seconda può apparire in un certo senso meno grave: dopo tutto è una difficoltà che può essere aggirata accontentandosi di approssimare $\underline{\omega}$ con filamenti di vorticità chiusi in un senso un po' più debole, e in fondo siamo abbastanza liberi *a priori* di definire il senso dell' approssimazione come desideriamo, tanto più che è “esterna” e quindi giustificabile solo *a posteriori*.

La prima difficoltà è però ineliminabile.

Un modo per evitarla sarebbe di considerare filamenti talmente *irregolari* da non avere tangente definita e anzi tali che $d\underline{\rho}' \wedge (\underline{\rho} - \underline{\rho}')$ oscilli talmente in segno e grandezza da produrre un integrale finito.

Ovvero si può immaginare di considerare filamenti con flusso Γ “nullo”, in un senso da chiarire, in modo che la velocità in (11.12) sia finita.

(B) *Filamento tenue.*

Esaminiamo dapprima la seconda possibilità e, procedendo euristicamente, deduciamo le equazioni del moto di un filamento di vorticità “a flusso nullo” o “tenue”.

Data una curva regolare chiusa γ sia γ_δ un tubino di raggio δ centrato intorno ad essa: immaginiamo che in γ_δ sia definito un campo di vorticità diretto come la tangente $\underline{t}(\underline{x})$ alla curva parallela a γ per $\underline{x} \in \gamma_\delta$. Non è qui importante specificare in che senso il tubino sia riempito di curve parallele a γ in quanto il risultato non dipenderà da questi dettagli.

La vorticità $\underline{\omega}$ sarà dunque $\Gamma_\delta \sigma_\delta(\underline{x}) \underline{t}(\underline{x})$ ove $\sigma_\delta(\underline{x})$ è una funzione che, nella direzione perpendicolare a γ , decresce in modo regolare a 0 verso la superficie del tubino. Inoltre l'integrale sulla superficie ortogonale al tubino della $\sigma_\delta(\underline{x})$ è fissato uguale a 1, in modo che il tubino sia un tubo di flusso del campo di vorticità con flusso Γ_δ .

Il campo di velocità di $\underline{\omega}$ sarà dato dalla formula di Biot–Savart:

$$11.13 \quad \underline{u}(\underline{x}) = \frac{\Gamma_\delta}{4\pi} \int_{\gamma_\delta} d^3 \underline{y} \sigma_\delta(\underline{y}) \frac{\underline{t}(\underline{y}) \wedge (\underline{x} - \underline{y})}{|\underline{x} - \underline{y}|^3} \quad (11.13)$$

se $\underline{b}(\underline{x})$ è il vettore unitario *binormale* (il quale è il vettore unitario ortogonale al piano della tangente e della normale) e il calcolo che conduce alla (11.12) ci dice che se $\Omega = \Gamma_\delta \log \delta$ è mantenuto fisso mentre $\delta \rightarrow 0$, allora:

$$11.14 \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{u}_\delta(\underline{x}) = \frac{\Omega}{4\pi} \frac{1}{R(\underline{x})} \underline{b}(\underline{x}) \quad (11.14)$$

se $\underline{b}(\underline{x})$ è il versore *binormale* alla curva γ e se $R(\underline{x})$ è il raggio di curvatura della curva γ in \underline{x} .

Si dice allora che il campo di velocità di un *filamento tenue* γ di intensità Ω è:

$$11.15 \quad \underline{u}(\underline{x}) = \frac{\Omega}{4\pi} \frac{1}{R(\underline{x})} \underline{b}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \gamma \quad (11.15)$$

che viene talvolta chiamata “equazione degli anelli di fumo”, perchè è un modello del moto di anelli di fum, finchè restano sottili e ben delimitati. Un nome più appropriato è “equazione del *moto per curvatura*” della curva γ .

Il caso più semplice è quello in cui γ è un cerchio di raggio R . In tal caso la (11.15) ci dice che il cerchio si muove di moto uniforme in direzione ortogonale al suo piano, con velocità $\Omega/4\pi R$ orientata in modo da vedere il flusso sul cerchio procedere in senso antiorario.

Il caso generale è anche studiabile “esattamente”: cioè il moto dei filamenti tenuti è integrabile per quadrature. È questo un fatto *notevolissimo*, recentemente scoperto da Hasimoto, *c.f.r.* [H],[DoS1].

Il punto fondamentale è l'osservazione che la (11.15) implica che la curva si sposta *senza stirarsi*: l'arco di curva è invariante. Lo si vede dalla (11.3) che mostra che l'allungamento di un vettore orientato come l'elemento di linea è proporzionale a $\underline{\omega} \cdot \underline{\partial} \underline{u}$ e cioè a $\underline{t} \cdot \underline{\partial}_s (R^{-1} \underline{b}) = 0$: perchè la derivata rispetto all'ascissa curvilinea del versore binormale è proporzionale al versore normale, per le formule di Frenet, (11.16).

L'inessensibilità della curva γ nella sua evoluzione per curvatura permette allora di *individuare* i suoi punti a mezzo dell'ascissa curvilinea a partire

da un punto prefissato. Nell'evoluzione i punti di γ manterranno la stessa ascissa su γ .

Ricordando le *formule di Frenet* che esprimono, su una curva γ , le variazioni in funzione dell'ascissa curvilinea s della terna $\underline{T} = (\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ dei vettori unitari *tangente*, *normale* e *binormale* in termini del *raggio di curvatura* R e della *torsione* τ come:

$$\partial_s \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R^{-1} & 0 \\ -R^{-1} & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad (11.16)$$

ove torsione e curvatura sono calcolate nel punto di γ di ascissa curvilinea s , e posto:

$$\psi(s, t) = \frac{1}{R(s, t)} e^{i\sigma} \quad \sigma(s, t) = \kappa(t) + \int_0^s \tau(s', t) ds' \quad (11.17)$$

ove $\kappa(t)$ is a suitable function of t , il teorema di Hasimoto si formula dicendo che $\psi(s, t)$ obbedisce all'equazione di Schrödinger non lineare:

$$i \frac{4\pi}{\Omega} \partial_t \psi = \partial_s^2 \psi + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi \quad (11.18)$$

che è un'equazione che è integrabile per quadrature e che pertanto dice che R, τ variano in modo quasi periodico, *c.f.r.* [CD]. La deduzione della (11.18) a partire dalle formule di Frenet e dalla equazione di moto per curvatura, (11.15), è esposta nei problemi [1], [2], [3].

Risolta la (11.18) sono note la curvatura e torsione in funzione del tempo nel punto generico di ascissa γ sulla curva inestensibile. Allora le formule di Frenet consentono di calcolare, sempre per quadratura, i vettori $\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)$ in funzione del tempo. Quindi la (11.15), con una ulteriore quadratura, fornisce le effettive posizioni nello spazio dei punti di γ in funzione della loro posizione iniziale.

Dunque il problema degli anelli di fumo è "completamente risolubile" per quadrature. Non è qui il luogo per discutere le proprietà qualitative dei moti: è chiaro che il moto dei filamenti tenui ha abbastanza poco a che fare con il problema della costruzione di un algoritmo esterno di soluzione dell'equazione di Eulero in $d = 3$, e che richiederebbe la considerazione di filamenti *non* tenui, come risulta dalla discussione in (A).

Tuttavia è chiaro che il problema appena discusso ha una relazione profonda con l'equazione di Eulero e ci si può chiedere se sia valida la seguente proprietà. Usando le notazioni sopra introdotte si immagini $\delta > 0$ e $\Omega = \Gamma_\delta \log \delta$ fisso e si consideri la soluzione dell'equazione di Eulero con dato iniziale a vorticità $\underline{\omega}_\delta(\underline{x})$.

Ammettendo che tale soluzione esista per tutti i tempi $t > 0$ la si denoti $\underline{u}_\delta(\underline{x}, t)$. Esiste allora il limite: $\lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{u}_\delta(\underline{x}, t) = \underline{u}(\underline{x}, t)$? E in caso affermativo tale limite è la soluzione di Hasimoto del moto per curvatura con curva iniziale γ ?

La risposta è difficile ed in generale il problema è aperto. Tuttavia nel caso in cui la curva γ è un cerchio, e γ_δ è un tubo ottenuto come regione spazzata da un disco di raggio δ perpendicolare a γ facendolo muovere su γ , e inoltre il campo di vorticità $\underline{\omega}_\delta$ è ovunque perpendicolare a questo disco allora la risposta alle domande ora poste è *affermativa*, [BCM]. Questo è interessante perchè ci fa meglio capire il significato e la portata delle considerazioni euristiche all' inizio di questa sezione (B).

(C) *Filamenti irregolari: filamenti Browniani.*

Torniamo ora al problema della costruzione di un algoritmo esterno per l' equazione di Eulero in $d = 3$, posto nella sezione (A). E prendiamo in esame il caso che la curva γ sia irregolare. È allora possibile che la velocità \underline{u} data dalla (11.8) (opportunamente interpretata, perchè se la curva non è regolare l' integrale su di essa non è definito in modo ovvio) sia finita.

Quest' ultima possibilità può essere messa in luce attraverso un semplice esempio in cui si vede che una curva assai frastagliata può generare un campo di velocità che sulla curva medesima è, in un senso opportuno, finito.

Si consideri una curva la cui equazione parametrica in coordinate polari-cilindriche (polari sul piano x, y) sia:

$$11.19 \quad r(\alpha) = R(1 + \varepsilon(\alpha)), \quad z = R\vartheta(\alpha) \quad (11.19)$$

con $\varepsilon(\alpha), \vartheta(\alpha)$, per il momento, arbitrarie.

Si vede che, ponendo $\varepsilon(0) = \varepsilon_0, \vartheta(0) = \vartheta_0$, $\varepsilon = \varepsilon(\alpha), \vartheta = \vartheta(\alpha)$ e chiamando ε', ϑ' le derivate di ε, ϑ in α e $s \equiv \sin \alpha, c \equiv \cos \alpha$:

$$11.20 \quad \begin{aligned} d\underline{\rho}' &= (-R(1 + \varepsilon)s + R\varepsilon'c, R(1 + \varepsilon)c + R\varepsilon's, R\vartheta') d\alpha \\ \underline{\rho}' - \underline{\rho} &= (R(1 + \varepsilon)c - R(1 + \varepsilon_0), R(1 + \varepsilon)s, R(\vartheta - \vartheta_0)) \end{aligned} \quad (11.20)$$

e così, ponendo anche $\eta = \varepsilon - \varepsilon_0, \mu = \vartheta - \vartheta_0$:

$$11.21 \quad |\underline{\rho}' - \underline{\rho}|^2 = (2(1 - c)(1 + \varepsilon + \varepsilon_0 + \varepsilon\varepsilon_0) + \eta^2 + \mu^2)R^2 \quad (11.21)$$

mentre le tre componenti di $d\underline{\rho}' \wedge (\underline{\rho}' - \underline{\rho})$ sono immediatamente calcolate da (11.20) e risultano:

$$11.22 \quad \begin{aligned} \frac{d\underline{\rho}'}{d\alpha} \wedge (\underline{\rho}' - \underline{\rho}) &= \\ &= \begin{cases} R^2[(1 + \varepsilon)c\mu + \varepsilon's\mu - \vartheta'(1 + \varepsilon)s], \\ R^2[\vartheta'(1 + \varepsilon)(c - 1) + \vartheta'\eta + \mu(1 + \varepsilon)s - \mu\varepsilon'c], \\ R^2[-(1 + \varepsilon)\eta - (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_0)(1 - c) + (1 + \varepsilon_0)\varepsilon's] \end{cases} \end{aligned} \quad (11.22)$$

Ora supponiamo che la curva sia scelta come campione in un insieme di curve disegnate a caso con una distribuzione di probabilità tale che, al variare di α in un intorno di $\alpha_0 = 0$, ε, ϑ siano indipendenti fra di loro e ciascuna sia una funzione aleatoria ad incrementi indipendenti. Ossia si supponga che, per $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, la quantità $\varepsilon(\alpha_2) - \varepsilon(\alpha_1)$ sia, come

variabile aleatoria, indipendente da $\varepsilon(\alpha_3) - \varepsilon(\alpha_2)$, e analoga ipotesi si ponga su ϑ . Supponiamo inoltre, per semplicità, che la dispersione di queste variabili aleatorie verifichi:

$$11.23 \quad \langle (\varepsilon(\alpha_2) - \varepsilon(\alpha_1))^2 \rangle = (D|\alpha_2 - \alpha_1|)^{2-2a} \quad (11.23)$$

con $a > 0$ (che appunto esprime una proprietà di non regolarità) e che le grandi fluttuazioni abbiano probabilità piccola (limitata ad esempio da una funzione gaussiana). In realtà in queste ipotesi ci si aspetta che $a \equiv 1/2$ e che, per i valori di α vicino ad $\alpha_0 = 0$ considerati, la distribuzione degli incrementi di $\varepsilon(\alpha)$ e $\vartheta(\alpha)$ sia necessariamente gaussiana. È dunque la distribuzione del tipo che si incontra nella teoria del moto browniano.

Intuitivamente immaginiamo che le funzioni aleatorie ε, ϑ siano continue con probabilità 1 ma abbiano, per α vicino a $\alpha_0 = 0$, incrementi fra α_1 e α_2 , proporzionali a $(D|\alpha_2 - \alpha_1|)^{1/2}$ e quindi siano *non differenziabili*.

Ci poniamo il problema di vedere se almeno la velocità media della curva nel punto ρ corrispondente a $\alpha = 0$ è finita. La velocità è data dall' integrale (11.11) che, viste le (11.22), diventa nel punto $\alpha_0 = 0$:

$$11.24 \quad \underline{u} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int \frac{d\alpha}{(\alpha^2 + \eta^2 + \mu^2)^{3/2}} \cdot (\mu + \alpha\varepsilon'\mu - \vartheta'\alpha, -\vartheta'\alpha^2/2 + \vartheta'\eta + \alpha\mu - \mu\varepsilon', -\eta - \alpha^2/2 + 2\varepsilon'\alpha) \quad (11.24)$$

ove si è posto $1 + \varepsilon \simeq 1$, $\cos \alpha - 1 = -\alpha^2/2$, $\sin \alpha = \alpha$ per semplificare le formule, immaginando che ε e ϑ siano piccole perturbazioni (anche se aleatorie) e tenendo conto che i problemi di convergenza che stiamo analizzando sono dovuti a quanto accade per $\alpha \simeq 0$.

Le quantità ε', ϑ' offrono problemi interpretativi poichè, per ipotesi, tali derivate non hanno senso: però la (11.24) e la formula formale $\varepsilon'(\alpha) = (\varepsilon(\alpha + \delta) - \varepsilon(\alpha))/\delta$, nel limite per $\delta \rightarrow 0$, fa vedere che, per l' indipendenza degli incrementi di ε e ϑ , i termini contenenti ε' e ϑ' possono essere considerati come contribuenti zero alla media di (11.22), (11.24). Anzi vediamo che l' unica componente di \underline{u} che non ha media nulla è la terza, e che tale componente ha media:

$$11.25 \quad v = \frac{\Gamma}{8\pi R} \langle \int d\alpha \frac{-\alpha^2}{(\alpha^2 + \eta^2 + \mu^2)^{3/2}} \rangle = \frac{-\Gamma}{8\pi R} \int d\alpha d\eta d\mu \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \eta^2 + \mu^2)^{3/2}} f_\alpha(\eta) g_\alpha(\mu) \quad (11.25)$$

ove $f_\alpha(\eta), g_\alpha(\mu)$ sono le distribuzioni di probabilità di $\eta = \varepsilon(\alpha) - \varepsilon(0), \mu = \vartheta(\alpha) - \vartheta(0)$.

Per sfruttare in modo semplice l' ipotesi sulle distribuzioni di η, ϑ conviene porre:

$$11.26 \quad \eta = (D|\alpha|)^{1/2} \bar{\eta}, \quad \vartheta = (D|\alpha|)^{1/2} \bar{\vartheta} \quad (11.26)$$

e supporre che le variabili $\bar{\eta}, \bar{\vartheta}$ abbiano una distribuzione *indipendente* da α e gaussiana: questo semplifica alcuni aspetti formali dei calcoli. Si trova

allora:

$$\begin{aligned}
 |v| &\leq \text{const} \int d\alpha d\bar{\eta} d\bar{\mu} e^{-\bar{\eta}^2 - \bar{\mu}^2} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + (D|\alpha|)(\bar{\eta}^2 + \bar{\mu}^2))^{3/2}} \simeq \\
 &\simeq \text{const} \int d\alpha x dx e^{-x^2} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + (D|\alpha|)x^2)^{3/2}} \simeq \\
 &\simeq \text{const} \int \frac{\alpha^2 d\alpha}{(\alpha^2)} < \infty
 \end{aligned} \tag{11.27}$$

Questa osservazione sulla finitezza di \underline{u} si può generalizzare al modo seguente. Si immagini un filamento di vorticità di equazioni:

$$\alpha \rightarrow \underline{\rho}(\alpha) + \underline{\xi}(\alpha) \tag{11.28}$$

con $\underline{\rho}(\alpha)$ di classe C^∞ e con $\underline{\xi}(\alpha)$ campione di traiettoria aleatoria che localmente, nell'intorno di ogni punto, sia "essenzialmente" un moto browniano. ■

Si noti che non si può supporre che sia esattamente ovunque un moto browniano perchè gli incrementi non possono essere realmente indipendenti perchè la curva deve alla fine essere chiusa. L'analisi che porta alla (11.27) può essere estesa senza difficoltà a classi di curve che siano periodiche e con incrementi poco dipendenti fra loro. Un esempio di classi di curve aleatorie con tali proprietà è illustrato nei problemi.

Allora l'equazione di evoluzione per il punto generico della curva, che scriveremo $\underline{\rho}_0 + \underline{\xi}_0$ con $\underline{\rho}_0 = \underline{\rho}(\alpha_0)$, $\underline{\xi}_0 = \underline{\xi}(\alpha_0)$, c.f.r. (11.28), si scrive:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\underline{\rho}_0 + \underline{\xi}_0)}{dt} &= - \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(d\underline{\rho}' + d\underline{\xi}') \wedge (\underline{\rho}' + \underline{\xi}' - \underline{\rho}_0 - \underline{\xi}_0)}{|\underline{\rho}' - \underline{\rho}_0 + \underline{\xi}' - \underline{\xi}_0|^3} \stackrel{\text{def}}{=} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\underline{\rho}' \wedge (\underline{\rho}' + \underline{\xi}' - \underline{\rho}_0 - \underline{\xi}_0)}{|\underline{\rho}' - \underline{\rho}_0 + \underline{\xi}' - \underline{\xi}_0|^3}
 \end{aligned} \tag{11.29}$$

ove l'aver *eliminato* i termini $d\underline{\xi}'$, che corrispondono ai termini con le derivate con le derivate di ε, ϑ in (11.24), è in un certo senso l'analogo dell'aver eliminato, in $d = 2$, i termini di autointerazione fra i vortici, e si può contare che sia giustificato da quanto visto nel caso particolare prima esaminato in cui questi termini fornivano un contributo nullo alla velocità media.

La equazione (11.29) genera allora due equazioni, una per la *media* $\underline{\rho}$ ed una per le *fluttuazioni*:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\underline{\rho}}{dt} &= - \left\langle \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\underline{\rho}' \wedge (\underline{\rho}' + \underline{\xi}' - \underline{\rho} - \underline{\xi})}{|\underline{\rho}' - \underline{\rho} + \underline{\xi}' - \underline{\xi}|^3} \right\rangle \\
 \frac{d\underline{\xi}}{dt} &= - \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\underline{\rho}' \wedge (\underline{\rho}' + \underline{\xi}' - \underline{\rho} - \underline{\xi})}{|\underline{\rho}' - \underline{\rho} + \underline{\xi}' - \underline{\xi}|^3} - \frac{d\underline{\rho}}{dt}
 \end{aligned} \tag{11.30}$$

e dimostrare la correttezza delle (11.30) dovrebbe significare qualcosa di simile a quanto si può mostrare in $d = 2$. Ma dobbiamo dire subito che il problema è ora piuttosto più complesso e la risposta non è nota.

Supponiamo che $\underline{x} \rightarrow \underline{\omega}(\underline{x}) \in C^\infty$ e che le curve di flusso di $\underline{\omega}$ siano *tutte chiuse* (cosa in generale falsa anche se $\underline{\omega}$ si annulla fuori di una regione

limitata, ma che costituisce una classe interessante di casi). Si immagini di poter tagliare ortogonalmente le linee di flusso a mezzo di una superficie. Si immagini di quadrettare la superficie con tessere di lato $\cong l$ e sia \underline{x}_j il centro della j -ma tessera e Γ_j^l il flusso di $\underline{\omega}$ attraverso la j -ma tessera. Chiamiamo γ_j la curva di flusso di $\underline{\omega}$ che passa per \underline{x}_j . Allora il campo di vorticità:

$$\underline{\omega}^l(\underline{x}) = \sum_j \Gamma_j^l \delta_{\gamma_j}(\underline{x}) \underline{t}_{\gamma_j}(\underline{x}) \quad (11.31)$$

approssima *debolmente* il campo $\underline{\omega}$ nel limite in cui la taglia l delle tessere tende a 0.

Si può ora immaginare di evolvere le curve $\gamma_j + \underline{\xi}_j$, ove $\underline{\xi}_j$ è un campione di un moto “simile” a un moto browniano, con cammini periodici e di opportuna costante di dispersione D_j^l (si vedano i problemi [4] e segg. per un esempio) e calcolare il campo di vorticità all’istante t usando le (11.30).

Il problema è se si possono trovare D_j^l in modo tale che il campo di vorticità all’istante t abbia un limite debole per $l \rightarrow 0$ che converge ad un campo di vorticità regolare che risolve la equazione di E con dato iniziale $\underline{\omega}$. Non è però affatto chiaro che questo debba essere vero, e la vera questione è se qualcosa di simile sia vero.

Euristicamente ci si può aspettare che scegliendo $D_j^l \equiv D^l$, indipendente da j , e posto $\underline{\omega}^D(\underline{x}, t) = \lim_{l \rightarrow 0} \underline{\omega}^l$, si abbia che il limite $\lim_{D \rightarrow 0} \underline{\omega}^D \equiv \underline{\omega}(\underline{x}, t)$ verifichi le equazioni di Eulero. Questo dovrebbe essere vero *anche se* le fluttuazioni $\underline{\xi}$ vengono fissate indipendentemente dal tempo, conducendo allora a considerare solo la prima della (11.30) come un sistema chiuso di equazioni (in quanto ora $\underline{\xi}$ ha per ipotesi la stessa distribuzione a tutti i tempi).

Dunque la prima delle (11.30):

$$\frac{d\rho}{dt} = - \left\langle \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\rho' \wedge (\rho' + \xi' - \rho - \xi)}{|\rho' - \rho + \xi' - \xi|^3} \right\rangle \quad (11.32)$$

con $\xi(t)$ definito da una distribuzione stazionaria in t (e non dalla seconda delle (11.30)) è una equazione di evoluzione che ha interesse di per se anche se indirettamente connessa con il problema di evoluzione di un filamento di vorticità. Per dare senso al moto di un filamento di vorticità occorre invece considerare le due (11.30) e si vede che uno stesso “filamento medio” evolve in modo diverso a seconda della distribuzione iniziale delle fluttuazioni $\underline{\xi}$, e cioè a seconda della struttura reale che si assegna al filamento.

Si vede che la (11.32) e (11.30) danno un metodo per dare senso alla evoluzione di filamento (e alla nozione esatta di filamento stesso) alternativo a quello anche naturale di considerare il filamento come un tubetto di vorticità inizialmente a sezione costante e di seguirne l’evoluzione. Da un punto di vista del calcolo numerico le (11.32) e (11.30) sono un pò più semplici della considerazione del modello di filamento come tubetto, in quanto gli oggetti che si descrivono sono rispettivamente unidimensionali e bidimensionali (mentre i tubetti sono tridimensionali).

Nasce dunque l'idea di rendere ancora più "esterno" l'algoritmo di approssimazioni utilizzando come filamenti di vorticità non già curve chiuse regolari bensì curve assai irregolari, come le curve che siano campioni di un insieme di curve casuali con distribuzione di probabilità che assegna incrementi essenzialmente indipendenti alle coordinate (cartesiane o polari o altre) dei loro punti.

Ma non volendo arrivare ad algoritmi "così esterni", che presentano ovvie difficoltà pratiche di calcolo occorrerebbe rinunciare a generalizzare gli algoritmi vorticosi, che si bene funzionano a $d = 2$, ai fluidi 3-dimensionali. Tuttavia è opportuno notare che le difficoltà numeriche non sembrano davvero insormontabili come dimostra l'esistenza di metodi di integrazione della equazione di Navier Stokes (che è un'equazione di equivalente o superiore complessità, *c.f.r.* [Ch], [Ch2]).

(D) *Filamenti irregolari: filamenti quasi periodici.*

Un'altra strada da perseguire per una alternativa generalizzazione degli algoritmi vorticosi 2-dimensionali si ottiene se la vorticità del campo di velocità approssimante viene concentrata, anziché su linee chiuse, su linee non chiuse che riempiono densamente superfici 2-dimensionali ovvero addirittura tridimensionali.

Tali campi di velocità sono spesso osservati in pratica: si pensi agli anelli di fumo che si muovono nell'aria.

Se le linee del filamento si distribuiscono densamente sulla superficie di un toro bidimensionale o riempiono l'interno di un tale toro, la circolazione di \underline{u} per ognuna di esse deve essere infinitesima ed avrà senso solo la loro densità.

Consideriamo, come esempio, il caso di un filamento che riempie densamente la superficie di un toro \mathcal{T} .

Conviene considerare un caso semplice. Si immagini che \mathcal{T} sia un toro 2-dimensionale e che su \mathcal{T} la linea di flusso di $\underline{\omega}$ sia semplicemente una traiettoria densa quasi periodica.

Immaginiamo che il toro \mathcal{T} sia tangente al piano x_1, x_2 all'origine e che abbia ivi una normale esterna parallela all'asse x_3 . Il toro sarà rappresentato parametricamente come:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(\xi_1, \xi_2), \quad x_2 = X_2(\xi_1, \xi_2), \quad x_3 = X_3(\xi_1, \xi_2) \quad \text{with} \\ X_1(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1 + O(\underline{x}^2), \quad X_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2 + O(\underline{x}^2), \quad X_3(\xi_1, \xi_2) = O(\underline{x}^2) \end{aligned} \quad (11.33)$$

11.33

ove i parametri $\underline{\xi}$ sono angoli su un toro standard $\underline{\xi} \in [0, 2\pi]^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}$.

Su \mathcal{T} immaginiamo la curva φ con equazioni $s \rightarrow \underline{x}(s) = (s, \eta s)$ con η irrazionale e $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n$ ove p_n e q_n sono i "convergenti" della frazione continua per η (*c.f.r.* [G], p.81). Si noti che la curva φ riempirà densamente il toro e che, pertanto, se n è grande la curva chiusa φ_n con equazioni $s \rightarrow \underline{x}(s) = (s, p_n s/q_n)$ "disegnerà essenzialmente" il toro.

Sia $\underline{\tau}$ il vettore unitario tangente all'origine a \mathcal{T} nella direzione della curva φ e sia $\underline{\nu}$ il vettore unitario ortogonale a $\underline{\tau}$ e tangente al toro nell'origine.

Si consideri un elemento di superficie $d\sigma = dh d\ell$ attorno all' origine, ove dh ne è la lunghezza in direzione $\underline{\tau}$ e dh nella direzione $\underline{\nu}$.

La somma delle lunghezze dei segmenti della curva φ_n che sono contenuti in $d\sigma$ saranno $N = q_n d\sigma / S$, asintoticamente in n , ove S è una costante geometrica (per l' "ergodicità" dei moti quasi periodici).

Immaginiamo ora un campo di vorticità $\underline{\omega}_n$ sia concentrato sulla curva φ_n e sia parallelo ad essa così che $\underline{\omega}_n = \gamma q_n^{-1} \underline{\tau} \delta_{\varphi_n}(\underline{x})$, ove δ_{φ_n} è una delta di Dirac uniformemente distribuita lungo la curva φ_n . Se or si pensa che $n \rightarrow \infty$ si vede che per ogni funzione regolare $f(\underline{x})$ si ha:

$$11.34 \quad \int f(\underline{x}) \underline{\omega}_n(\underline{x}) d\underline{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \underline{\omega}(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x}, \quad \underline{\omega}(\underline{x}) = \underline{\tau}(\underline{x}) \delta_{\mathcal{T}}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (11.34)$$

ove $\delta_{\mathcal{T}}$ è una distribuzione di Dirac concentrata sulla superficie \mathcal{T} e ivi proporzionale all' area (la costante di proporzionalità è una funzione su \mathcal{T} che dipende dalla forma di \mathcal{T} e il cui integrale di superficie su \mathcal{T} è la costante S sopra menzionata).

Interpretiamo $\underline{\omega}(\underline{x})$ come un campo di vorticità concentrato sul filamento quasi periodico φ su \mathcal{T} .

Questa distribuzione di vorticità induce una velocità $\underline{u}(\xi)$ che, è finita. Invero calcoliamola all' origine, supponendo prima che il toro sia piatto in vicinanza dell' origine e si ponga $\underline{\rho} = (l, h, z)$, $\underline{\tau} = (0, 1, 0)$, $\underline{\nu} =$ (normale al toro nel punto scelto (origine)), allora il contributo alla velocità da parte di un intorno di taglia di ordine ε intorno all' origine è, per la formula di Biot-Savart (11.8), proporzionale all' integrale (improprio)

$$11.35 \quad \int_{|\ell| < \varepsilon} \gamma \frac{\underline{\tau} \wedge \underline{\rho}}{|\underline{\rho}|^3} \delta(z) dh dz d\ell = \int_{|\ell| < \varepsilon} \gamma \frac{l \underline{\nu} dh d\ell}{(h^2 + \ell^2)^{3/2}} \equiv 0 \quad (11.35)$$

per ε piccolo, per parità. Nel caso generale in cui il toro ha curvatura all' origine o presso di essa questo significa che l' integrale della formula di Biot-Savart (che sarebbe *a priori* logicamente divergente) che definisce \underline{u} risulterà in realtà (impropriamente) convergente.

Se invece concentrassimo realmente la vorticità su φ_n , allora vedremmo che la interpretazione di cui sopra del limite per $n \rightarrow \infty$ del campo di velocità consiste semplicemente nel limite per $n \rightarrow \infty$ del campo di velocità \underline{u}_n privato di una parte che è impropriamente definita per $n \rightarrow \infty$: questo è analogo alla prescrizione vista nel caso dei vortici puntiformi in $d = 2$ in cui la parte cancellata (ultimo termine in (10.9), poteva essere interpretata come una rotazione del vortice su se stesso con velocità angolare infinita.

Similmente se \mathcal{T} è un dominio limitato da un toro riempito e densamente di linee di flusso e se la vorticità al suo interno può essere considerata come distribuita con una densità $\underline{\omega}$ allora \underline{u} risulta addirittura sommabile.

C'è dunque anche la possibilità di studiare l' evoluzione di un tubo di flusso 2 o 3-dimensionale riempito densamente da un singolo (o più di uno) filamento facendolo evolvere in modo da essere trasportato dalle linee di corrente da lui stesso generate.

Ovvero si può pensare di studiare casi in cui la vorticità è concentrata su superfici (“fogli di vorticità”) o in volumi (“tubi”) ed è tale da approssimare un campo regolare di vorticità. In tali casi non ci sarebbe problema per dare un significato all’ integrale di Biot–Savart, almeno all’ istante iniziale.

L’ algoritmo è in pratica più semplice nel caso di un filamento di vorticità concentrato su una linea densa su una superficie rispetto al caso che si otterrebbe supponendo direttamente la vorticità distribuita uniformemente sul toro. Ma le questioni di convergenza di questo algoritmo, come di quelli che usano addirittura campi di vorticità concentrati in tubi tridimensionali (sottili) di flusso, sono assai poco studiate se non su basi empiriche (numeriche). ■

Problemi.

[1] Si consideri una curva γ chiusa in movimento. Si mostri che la terna $\underline{T} = (\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ evolve in modo che esistano tre funzioni A, B, C tali che:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} M \underline{T} \quad (11.36)$$

(Idea: poichè la terna è ortonormale deve evolvere come $t \rightarrow O(t)\underline{T}(t)$ ove $O(t)$ è una matrice di rotazione. Allora la matrice $\dot{O}(t) = MO(t)$ con M matrice antisimmetrica).

[2] Si consideri il suo moto per curvatura (11.15) di una curva (necessariamente inestensibile) ■ γ . Allora i punti $\underline{x} = \underline{r}(s)$ sono individuati dalla loro ascissa curvilinea s e quindi al variare del tempo si esprimono via una funzione $\underline{x} = \underline{r}(s, t)$. Scrivendo $\partial_s \underline{T} = F \underline{T}$ e $\partial_t \underline{T} = M \underline{T}$ le formule di Frenet, (11.17) e le relazioni in [1], si mostri che le identità $\partial_t \partial_s \underline{T} = \partial_s \partial_t \underline{T}$ implicano le relazioni:

$$\begin{aligned} \partial_t R^{-1} &= \partial_s A + B\tau \\ 0 &= \partial_s B - R^{-1}C - \tau A \\ \partial_t \tau &= -\partial_s C - R^{-1}B \end{aligned}$$

e, posto $\Omega' = \Omega/4\pi$, che le $\partial_t \underline{\rho} = \underline{u} = \Omega' R^{-1} \underline{b}$, c.f.r. (11.15), implicano $\partial_s(R^{-1} \underline{b}) = \partial_t(\partial_s \underline{\rho})$ che a loro volta implicano

$$A = \Omega' \frac{\tau}{R}, \quad B = \Omega' \partial_s R^{-1}$$

e quindi A, B, C sono univocamente determinati da R, τ . (Idea: per le prime relazioni semplicemente si derivi la (11.36) rispetto a t e (11.16) rispetto a s usando le (11.16) e, rispettivamente, (11.36) per esprimere le ∂_t e, rispettivamente, le ∂_s dei versori: si trovano sei relazioni di cui solo tre diverse. Si proceda in modo simile per le seconde relazioni che esprimono $\partial_t \partial_s \underline{\rho} = \partial_s \partial_t \underline{\rho}$, tenendo conto che $\partial_s \underline{\rho} = \underline{t}$.)

[3] A partire dalle espressioni in [2] per A, B, C si constati che le equazioni per R, τ si scrivono:

$$\partial_t \begin{pmatrix} R^{-1} \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_s A + B\tau \\ -\partial_s C + R^{-1}B \end{pmatrix} \quad \partial_s B = R^{-1}C + \tau A$$

e si constati che, posto $\psi = R^{-1} e^{i\sigma}$, $\sigma = \kappa(t) + \int_0^s \tau(s') ds'$, $\kappa(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} R(0, t')^{-2} - C(0, t') \right) dt'$, vale l’ identità di Hasimoto, ossia la ψ verifica l’ equazione di Schrödinger non lineare, (11.18).

[4] Si considerino le funzioni periodiche in $L_2([0, 2\pi])$, $\alpha \rightarrow \varepsilon(\alpha)$ a media nulla e con solo N armoniche. Sono le funzioni esprimibili come: $\varepsilon_N(\alpha) = \sum_{k=1}^N (c_k \cos k\alpha +$

$s_k \sin k\alpha$). E si definisca una distribuzione di probabilità sull'insieme delle funzioni del tipo considerato, assegnando ai coefficienti c_k, s_k la distribuzione gaussiana:

$$\prod_{k=1}^N \frac{e^{-\frac{1}{2}(c_k^2 + s_k^2)k^2} dc_k ds_k}{\sqrt{2\pi k^{-2}}}$$

e si faccia vedere che $\langle (\varepsilon_N(\alpha) - \varepsilon_N(\beta))^2 \rangle = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} (1 - \cos k(\alpha - \beta)) \equiv C_N(\alpha - \beta) < \pi |\alpha - \beta|_{2\pi}$ ove $|\alpha - \beta|_{2\pi} = \min_n |\alpha - \beta - 2\pi n|$ e anche $C_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \pi(|\alpha - \beta|_{2\pi} + O(|\alpha - \beta|_{2\pi}^2))$. (*Idea*: si osservi che la serie limite per $N \rightarrow \infty$ di quella per C_N è la serie di Fourier di $|x|_{2\pi} - \frac{|x|_{2\pi}^2}{2}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$)

[5]: Nel contesto del problema [4] si mostri che la probabilità che $|\varepsilon(\alpha) - \varepsilon(\beta)|$ sia maggiore di $\sqrt{\gamma C_N(\alpha - \beta)}$ è $2 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} d\gamma}{\sqrt{2\pi}}$ (*Idea*: basta osservare che $\varepsilon(\alpha) - \varepsilon(\beta)$ deve avere una distribuzione gaussiana con dispersione (“covarianza”) $C_N(\alpha - \beta)$, perchè è una combinazione lineare di variabili aleatorie a distribuzione gaussiana (le c_k, s_k).)

[6]: Si deduca che la probabilità che, dati due punti “diadici” $\alpha, \beta < \pi$ di ordine p , $\alpha = 2\pi h 2^{-p}$ e $\beta = \alpha + 2\pi 2^{-p}$ *adiacenti*, si abbia $|\varepsilon(\alpha) - \varepsilon(\beta)| > \gamma p 2^{-p/2}$ è maggiorata da $P_p = c 2^p p \exp -\gamma^2 p^2 / 2$ con c costante opportuna. (*Idea*: la probabilità della validità simultanea di un qualsiasi numero di eventi è maggiorata dalla somma delle rispettive probabilità: e quindi il risultato discende immediatamente dal problema [5] perchè in questo caso il numero di eventi è 2^p .)

[7]: Dati due punti $\alpha = 2\pi h 2^{-p}$ e $\beta = 2\pi k 2^{-q}$ diadici ma non necessariamente dello stesso ordine si faccia vedere, supponendo ad esempio $\alpha < \beta$ e $q < p$, che esiste una successione di $n \leq -2 \log_2 |\alpha - \beta|$ punti $\alpha = x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_n = \beta$ tali che $x_{i+1} - x_i = 2^{-(p-i)} \sigma_i$ con $\sigma_i = 0, 1$ opportuni. Questo significa che x_i e x_{i+1} o sono gli stessi oppure sono adiacenti “su scala $2^{-(p-i)}$ ”. Dedurre che la probabilità che $|\varepsilon(\alpha) - \varepsilon(\beta)| < \gamma |\alpha - \beta|^{1/2} \log |\alpha - \beta|^{-1}$ per una qualunque coppia di punti diadici è stimabile con $1 - C \gamma e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}$, con $C > 0$ costante opportuna (teorema di Wiener).

(*Idea*: si noti che $(\beta - \alpha)/2\pi = (k 2^{p-q} - h)/2^p$ e quindi sviluppando in base 2 il numeratore $k 2^{p-q} - h = \sum_{j=0}^{<p} n_j 2^j$ con $n_j = 0, 1$ si trova la rappresentazione $(\beta - \alpha)/2\pi = \sum_j \sigma_j 2^{-j}$, con $\sigma_j = 0, 1$ banalmente collegati agli n_j).

basta scrivere $\varepsilon(\alpha) - \varepsilon(\beta) = \sum (\varepsilon(x_{i+1}) - \varepsilon(x_i))$ e notare che la probabilità che, per tutti gli i , sia $|\varepsilon(x_{i+1}) - \varepsilon(x_i)| < \gamma (p - i) 2^{-(p-i)/2}$ è stimata, grazie al problema precedente, dalla quantità $1 - C \gamma e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}$. Inoltre $\sum 2^{-(p-i)} \sigma_i \equiv |\beta - \alpha|/2\pi$ e quindi vale la disuguaglianza:

$$\sum 2^{-(p-i)/2} (p - i) \sigma_i \leq 12 (|\beta - \alpha|/2\pi)^{1/2} \log_2 4\pi |\beta - \alpha|^{-1}$$

infatti se \bar{p} è il più piccolo p_j per cui $\sigma_j = 1$ si ha $2^{-\bar{p}} \leq |\beta - \alpha|/2\pi < 2^{-\bar{p}+1}$ e $\sum_j p_j \sigma_j 2^{-p_j/2} \leq \sum_{m=\bar{p}}^{\infty} m 2^{-m/2} \leq 12 \bar{p} 2^{-\bar{p}/2}$ da cui segue l'ultima disuguaglianza.)

[8]: Dunque le funzioni aleatorie (definite sui diadici) $\varepsilon_N(\alpha)$ sono *uniformemente* Hölder continue, con esponente $\sim \frac{1}{2}$, con “modulo di continuità”:

$$\gamma = \sup_{\alpha, \beta} \frac{|\varepsilon(\alpha) - \varepsilon(\beta)|}{(|\alpha - \beta|_{2\pi} \log |\alpha - \beta|_{2\pi}^{-1})^{1/2}}$$

che è finito con una probabilità che tende a 1 per $\gamma \rightarrow \infty$. Ha allora senso considerare il limite per $N \rightarrow \infty$ della distribuzione di probabilità sullo spazio $C([0, 2\pi])$ delle funzioni continue generate dalla distribuzione gaussiana P_N introdotta nel problema

[4]. Gli insiemi misurabili saranno definiti dall'insieme delle funzioni che in m angoli prefissati $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ hanno valori in intervalli I_1, \dots, I_m prefissati. Tali insiemi vengono chiamati "cilindri", per ovvie ragioni, e giocano il ruolo degli intervalli nella teoria dell'integrazione in una variabile. Saranno inoltre (in analogia alla teoria ordinaria dell'integrazione) misurabili tutti gli insiemi approssimabili a mezzo di una infinità al più numerabile di operazioni di unione ed intersezione e complementazione a partire da insiemi cilindrici. Si verifichi che la probabilità di ciascun insieme cilindrico è convergente ad un limite per $N \rightarrow \infty$. Non è difficile dimostrare (usando il teorema di Wiener) che la misura così definita sui cilindri è completamente additiva (cioè se un cilindro può essere pensato come una unione numerabile di altri cilindri allora la sua misura è la somma della serie delle misure dei cilindri che lo compongono); e che l'insieme delle funzioni Hölder continue è misurabile, ed ha probabilità 1. Si definisce quindi una distribuzione di probabilità ("moto browniano periodico") sullo spazio delle funzioni periodiche che è "concentrata" sulle funzioni Hölder continue (con esponente $\frac{1}{2}$).

Bibliografia: la teoria dei filamenti tenui è tratta principalmente da [DoS1] che ne presenta notevoli estensioni sempre integrabili; si veda anche [H] e la importante estensione della teoria del moto per curvatura al caso di curve discrete, [DoS2]. Altri riferimenti pertinenti sono [BCM], [N],[CD]

§12 Il metodo spettrale e teoremi di esistenza, regolarità e unicità locali per le equazioni di E e NS, $d \geq 2$.

Una delle più immediate ed elementari applicazioni del metodo spettrale del §9 è la teoria della esistenza, regolarità ed unicità *locali* delle soluzioni delle equazioni di E e NS, in dimensione arbitraria.

Illustriamo la teoria solo nel caso in cui Ω sia un cubo di lato L e con lati opposti identificati.

Consideriamo dati iniziali $\underline{u}_0(\underline{x})$ e densità di forza *analitici* in \underline{x} e quindi tali che:

$$\begin{aligned} \underline{u}^0(\underline{x}) &= \sum_{\underline{k} \neq \underline{0}} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}}, & \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 &= \overline{\underline{\gamma}_{-\underline{k}}^0}, & \underline{k} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 &\equiv 0, & |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| &\leq G e^{-\xi|\underline{k}|} \\ \underline{g}(\underline{x}) &= \sum_{\underline{k} \neq \underline{0}} \underline{g}_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}}, & \underline{g}_{\underline{k}} &= \overline{\underline{g}_{-\underline{k}}}, & \underline{k} \cdot \underline{g}_{\underline{k}} &\equiv 0, & |\underline{g}_{\underline{k}}| &\leq \Phi e^{-\xi|\underline{k}|} \end{aligned} \quad (12.1)$$

ove G, Φ e ξ sono opportune costanti > 0 e \underline{k} è un vettore *non nullo* a componenti multiple intere di $k_0 = 2\pi L^{-1}$ e $|\underline{k}|$ denoterà $\sum_i |k_i|$.¹ Le medie \underline{u}_0 e \underline{g}_0 sono supposte nulle, come al solito. Per semplificare i calcoli supporremo $\xi \equiv \xi_0/k_0$ con $\xi_0 \leq 1$, che evidentemente non è restrittivo.

Vale allora la seguente proposizione:

Proposizione: Esiste t_0 tale che l'equazione di NS in d dimensioni ($d = 2, 3$):

$$\underline{\dot{u}} = \nu \Delta \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} - \rho^{-1} \underline{\partial} p + \underline{g}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \quad (12.2)$$

con dato iniziale e forza verificanti (12.1), ammette una soluzione analitica in \underline{x} e t , $\underline{u}(\underline{x}, t)$, per $0 \leq t \leq t_0$, $\underline{x} \in \Omega$; e inoltre esiste una costante B_0 tale che t_0 può essere scelto in modo che, per $0 \leq t \leq t_0$, valgano le:

$$\begin{aligned} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| &\leq G_0 e^{-\xi_0 |\underline{k}|/2k_0}, & \text{con} \\ G_0 &= B_0 (G + \Phi L^2 \nu^{-1}) \xi_0^{-(d+1)}, & t_0 = \nu (B_0 G_0 \xi_0^{-d-1})^{-2} \end{aligned} \quad (12.3)$$

e, nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$, la soluzione è unica.

Osservazione:

(1) vale dunque un teorema di esistenza e regolarità locali, e stime esplicite della durata dell'intervallo di esistenza e di regolarità: "dati iniziali analitici" evolvono restando analitici per un tempo abbastanza piccolo". Questo lo si evince dalla dimostrazione che segue.

¹ che è una definizione naturale quando \underline{k} sono gli indici della trasformata di Fourier di una funzione analitica, c.f.r. problema 0).

(2) l'unicità vale addirittura nella classe più estesa delle soluzioni $t \rightarrow \underline{u}(\underline{x}, t)$, $p(\underline{x}, t)$ di classe $C^1([0, t_0] \times \Omega)$. Si veda il problema 5), alla fine del paragrafo.

(3) La esistenza, regolarità e unicità possono essere studiate anche in altre classi di funzioni. Ad esempio se $\underline{u}^0 \in W^m(\Omega)$ e $m \geq 4$, (cosicché essendo $4 > \frac{3}{2} + 1$ si ha (cfr. problema 20) del §9) che $\underline{u}^0 \in C^1(\Omega)$), si può facilmente dimostrare che esiste un tempo T_m tale che la equazione (12.3) ammette una soluzione in $W^m(\Omega)$ per ogni $t \in (0, T_m)$: si vedano i problemi. Il caso analitico qui considerato è più complicato: ma il risultato è forse più interessante, soprattutto per la tecnica che viene utilizzata e che illustra un metodo che viene spesso impiegato in altri problemi di Fisica.

dim: La parte concernente l'unicità è assolutamente elementare e, come osservato, mostra in realtà l'unicità delle soluzioni di classe $C^1([0, t_0] \times \Omega)$ (e quindi, *a fortiori* di classe analitica del tipo considerato nell'enunciato della proposizione). Dette \underline{u}_1 e \underline{u}_2 due soluzioni di classe $C^1([0, t_0] \times \Omega)$ sia $\delta \underline{u} = \underline{u}_1 - \underline{u}_2$ e si consideri la relazione ottenuta eseguendo la differenza fra i due membri delle equazioni che ciascuna delle \underline{u}_i verifica, moltiplicandola membro a membro scalarmente per $\delta \underline{u}$ e integrando su Ω . Si trova:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\delta \underline{u})^2 d\underline{x} = -\nu \int_{\Omega} \delta \underline{u}^2 d\underline{x} + \int_{\Omega} (-(\underline{u}_1 \cdot \underline{\partial} \delta \underline{u} - (\delta \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_2)) \cdot \delta \underline{u} d\underline{x} \quad (12.4)$$

perchè il termine di pressione scompare per integrazione per parti (usando la proprietà di divergenza nulla) e così pure scomparirà il primo termine nel terzo integrale della (12.4) (perchè si scrive $\frac{1}{2} \int_{\Omega} -\underline{u}_1 \cdot \underline{\partial} (\delta \underline{u})^2 d\underline{x}$ ed è quindi nullo per lo stesso motivo).

Allora detto $D = \int_{\Omega} (\delta \underline{u})^2 d\underline{x}$ si ha, per $0 \leq t \leq t_0$:

$$\frac{1}{2} \dot{D} \leq D \max_{\underline{x}, 0 \leq t \leq t_0} |\underline{\partial} \underline{u}_2(\underline{x}, t)| \stackrel{def}{=} D M \quad (12.5)$$

ove M è il massimo indicato ($M < \infty$ perchè $\underline{u}_2 \in C^1([0, t_0] \times \Omega)$): e la (12.5) implica $D(t) \leq D(0)e^{2Mt}$; quindi $D(0) = 0$ implica $D(t) = 0$ per ogni $0 \leq t \leq t_0$ e cioè si ha unicità delle soluzioni delle (12.2) verificanti (12.3).

Si noti che in (12.5) non si è tratto profitto dal fatto che il termine proporzionale alla viscosità è non positivo: dunque la proprietà di unicità appena vista resta valida nel caso della equazione di Eulero. Però nel resto della discussione si farà esplicitamente uso dell'ipotesi $\nu \neq 0$, *c.f.r.* problema [5].

Passiamo ora alla questione assai più interessante della esistenza. Scriveremo la (12.2) nella forma spettrale (9.10):

$$\dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}} = -\nu \underline{k}^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} + \underline{g}_{\underline{k}} \quad (12.6)$$

ove la $\underline{\varphi}_{\underline{k}}$ della (9.10) è qui chiamata $\underline{g}_{\underline{k}}$ e riscriviamola come:

$$\gamma_{\underline{k}}(t) = \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 e^{-\nu \underline{k}^2 t} + \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \left(\underline{g}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}(\tau) \right) d\tau \quad (12.7)$$

Porremo $\bar{\gamma}_{\underline{k}}^0(\tau) \equiv \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 e^{-\nu \underline{k}^2 \tau} + \frac{(1-e^{-\nu \underline{k}^2 \tau})}{\nu \underline{k}^2} \underline{g}_{\underline{k}}$ e allora, si ha:

$$|\bar{\gamma}_{\underline{k}}^0(\tau)| < \bar{G}_0 e^{-\xi_0 |\underline{k}|/k_0}, \quad \bar{G}_0 \equiv G + \frac{\Phi}{\nu k_0^2} \quad (12.8)$$

ove $k_0 = 2\pi/L$, c.f.r. (12.1).

Immaginiamo ora di risolvere la (12.7) ricorsivamente, ponendo $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0(t) \equiv \bar{\gamma}_{\underline{k}}^0(t)$ e:

$$\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{n+1}(t) = \bar{\gamma}_{\underline{k}}^0(t) - i \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^n(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^n(\tau) d\tau \quad (12.9)$$

per $n \geq 0$. Si "iteri" (12.9); si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^{n+1}(t) &= \bar{\gamma}_{\underline{k}}^0(t) + \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \left(-i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \bar{\gamma}_{\underline{k}_1}^0(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \bar{\gamma}_{\underline{k}_2}^0(\tau) \right) + \\ &- i \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} d\tau \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \int_0^\tau d\tau' \left(-i \sum_{\underline{k}'_1 + \underline{k}'_2 = \underline{k}_1} e^{-\nu \underline{k}'_1 (\tau-\tau')} \right. \\ &\left. \underline{\gamma}_{\underline{k}'_1}^{n-1}(\tau') \cdot \underline{k}'_2 \Pi_{\underline{k}_1} \underline{\gamma}_{\underline{k}'_2}^{(n-1)}(\tau') \right) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \bar{\gamma}_{\underline{k}_2}^{(0)}(\tau) + \\ &- i \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} d\tau \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} -i \int_0^\tau e^{-\nu \underline{k}_2 (\tau-\tau')} \sum_{\underline{k}'_1 + \underline{k}'_2 = \underline{k}_2} \\ &\bar{\gamma}_{\underline{k}_1}^{(0)}(\tau') \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \left(\underline{\gamma}_{\underline{k}'_1}^{n-1}(\tau') \cdot \underline{k}'_2 \Pi_{\underline{k}_2} \bar{\gamma}_{\underline{k}'_2}^{(n-1)}(\tau') \right) d\tau' \quad (12.10) \\ &- i \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} d\tau \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \\ &\left(-i \sum_{\underline{k}'_1 + \underline{k}'_2 = \underline{k}_1} \int_0^\tau e^{-\nu \underline{k}'_1 (\tau-\tau_2)} \left(\underline{\gamma}_{\underline{k}'_1}^{(n-1)}(\tau_2) \cdot \underline{k}'_2 \Pi_{\underline{k}_1} \underline{\gamma}_{\underline{k}'_2}^{(n-1)}(\tau_2) \right) d\tau_2 \right) \cdot \underline{k}_2 \\ &\Pi_{\underline{k}} \left(-i \sum_{\underline{k}''_1 + \underline{k}''_2 = \underline{k}} \int_0^\tau e^{-\nu \underline{k}_2 (\tau-\tau_3)} \underline{\gamma}_{\underline{k}'_1}^{(n-1)}(\tau_3) \cdot \underline{k}''_2 \Pi_{\underline{k}_2} \underline{\gamma}_{\underline{k}''_2}^{(n-1)}(\tau_3) d\tau_3 \right) \end{aligned}$$

per $n \geq 1$.

La (12.10) può essere ulteriormente iterata: ovviamente si rende necessaria una notazione migliore perché (12.10) è una banale conseguenza di (12.9) e, tuttavia, appare piuttosto involuta e promette di diventarlo molto di più, al punto da essere inutile, se ulteriormente iterata.

Pertanto discutiamo come trovare una rappresentazione più semplice per $\underline{\gamma}_k^n(t)$: si troverà che può essere rappresentata graficamente al modo seguente:

$$12.11 \quad \underline{\gamma}_k^n = \underline{\gamma}_k^0(t) + \sum_{1 \leq m < 2^n} \sum_{\Theta \in m\text{-alberi decorati}} \text{Val}(\Theta) \quad (12.11)$$

ove Θ è un albero con m vertici interni (“ m -albero decorato”), e $\text{Val}(\Theta)$ è il suo “*valore*” (che definiremo); l’albero ha inoltre una radice e ogni ramificazione avviene per sdoppiamento, ossia in ogni vertice interno entrano due rami dell’albero e ne esce uno.

Per comprendere la notazione in dettaglio definiamo un *albero* come un insieme connesso di $2m + 1$ linee orientate, che chiamiamo “rami”, privo di cicli. Denotiamo con (v, v') una linea orientata posta su un piano e che va dall’estremo v all’estremo v' .

(a) Date $2m + 1$ linee orientate e fissato un punto r nel piano, poniamo sul piano una prima linea orientata (v_0, r) in modo che finisca in r . Diremo che r è la *radice* dell’albero.

(b) Poniamo poi sul piano altre due linee orientate in modo che terminino in v_0 . Siano (v_1, v_0) e (v_2, v_0) queste linee.

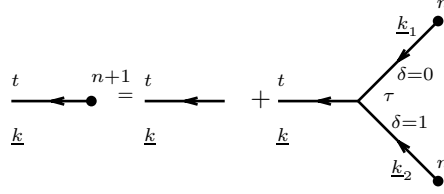
(c) continuiamo la costruzione attaccando ad alcuni dei vertici iniziali delle ultime linee disegnate coppie di linee orientate con il vertice finale in comune. Fino a che (dopo m passi) si è ottenuta una figura che chiameremo *albero* con radice r e $2m + 1$ rami, o *m -albero* Θ .

(d) Chiameremo *vertici interni* o *nodi* i vertici nei quali entrano due linee (e ne esce necessariamente una). Mentre il vertice r si chiamerà radice e i vertici da cui esce un’unica linea e nessuna entra si diranno *vertici finali* o *esterni* e il loro insieme si denoterà V_f .

(e) Qui consideriamo, dunque, solo alberi con tre rami per nodo, uno uscente e due entranti: in questi alberi il numero di nodi è m ed è di una unità inferiore al numero di vertici esterni (radice esclusa perchè *non sarà considerata un vertice dell’albero*). Gli alberi vengono pensati con i rami entranti in ogni nodo contrassegnati e diversificati fra loro da un indice $\delta = 0, 1$; inoltre alberi sovrapponibili (indici inclusi) mediante una successione di rotazioni delle linee entranti nei nodi sono da considerarsi identici.

In termini di questa definizione e aggiungendo agli alberi un certo numero di altri indici o *decorazioni* che descriveremo in seguito nello spiegare come le figure vanno lette, è possibile reinterpretare la (12.9) in modo che sia

rappresentata dal seguente grafico:

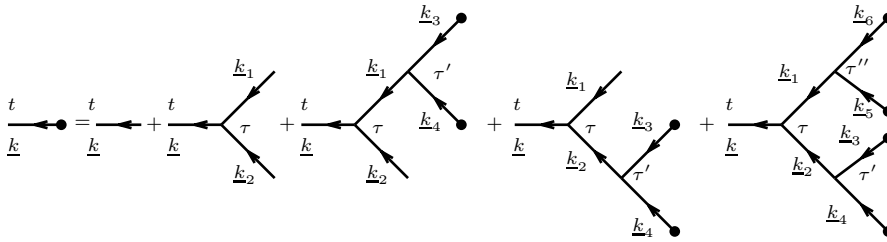


Il modo di leggere questa figura è il seguente: il membro di sinistra rappresenta il membro di sinistra della (12.9): dunque reca le decorazioni $t, \underline{k}, n+1, t$ necessarie a individuarlo (è una notazione “alternativa” a $\underline{\gamma}_k^{n+1}(t)$). Il primo grafico a destra (è uno 0–albero) rappresenta $\overline{\gamma}_k^0(t)$, ossia il primo termine del membro di destra della (12.9). Si noti che non reca l’indice \bullet sul vertice finale: questa è una notazione che serve a ricordare che questo ramo rappresenta un termine “noto”.

Il secondo termine si legge interpretando la linea con indice $\delta = 0$ e indice \underline{k}_1 , che termina nel nodo che porta indice τ e inizia in un vertice finale con indice \bullet^n , come $\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^n(\tau) \cdot \underline{k}_2$; l’altra linea (con $\delta = 1$) invece si interpreta come $\Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^n(\tau)$ ove $\underline{k} \equiv \underline{k}_1 + \underline{k}_2$ è l’indice della linea uscente dal nodo in cui le due linee in questione entrano: e questo nodo si deve interpretare come l’operazione $-i \int_0^t d\tau e^{-\nu \underline{k}^2(t-\tau)}$ eseguita in (12.9).

Dunque il nodo rappresenta un’operazione di integrazione e gli indici δ_ρ distinguono i due fattori con $\underline{\gamma}^n$ in (12.9): è un indice reso necessario dal loro ruolo non simmetrico. Vediamo che le decorazioni e la forma dell’albero identificano univocamente le operazioni da eseguire e sono quindi una notazione alternativa per le quantità in (12.9).

Allo stesso modo la (12.10), ottenuta sostituendo le funzioni $\underline{\gamma}_k^n(\tau)$ con la espressione che è fornita dalla (12.9) stessa (con n sostituito da $n - 1$), è suscettibile di una interpretazione grafica. Un attento esame della (12.10) infatti ci fornisce la seguente rappresentazione, consistente con la precedente.



ove i vertici contrassegnati da \bullet dovrebbero recare l’indice $n+1$ nel membro di sinistra e $n - 1$ in quello di destra e le linee entranti nei nodi dovrebbero recare l’indice $\delta_\rho = 0, 1$ (*non segnati nella figura per semplicità*).

Si deve notare che la seconda figura si ottiene dalla prima semplicemente sostituendo nelle linee finali (ossia con vertice iniziale in V_f , senza linee entranti) contraddistinte dall’indice \bullet^n uno dei due alberi del membro di destra della prima figura.

Dunque la seconda figura può essere ulteriormente “sviluppata” iterando il procedimento. Ad ogni iterazione gli alberi che rappresentano $\underline{\gamma}_k^n(t)$ avranno vertici finali senza \bullet e vertici finali ancora con questo indice che, però, al passo k -mo sarà \bullet^{n-k} . Quindi il procedimento si arresterà quando $k = n$ se i vertici con indice \bullet^0 saranno semplicemente disegnati *senza* questo indice. Gli oggetti grafici che si ottengono in tal modo sono alberi nel senso definito da (a)%(e) decorati opportunamente (e con i rami finali privi di indici \bullet).

È chiaro che il risultato della iterazione della (12.9), ossia della iterazione spinta fino a far sparire le $\underline{\gamma}_k^{(j)}(\tau)$ con $j > 0$, si può scrivere nella forma (12.11), come già si vede nel caso della (12.10). Per questo scopo elenchiamo formalmente le ulteriori “decorazioni” che è necessario apporre agli alberi. La decorazione naturale, suggerita dalla lettura delle (12.9) e (12.10)

(1) Si appone un indice \underline{k}_ρ ad ogni ramo ρ di Θ : tali indici vettoriali dovranno essere sottoposti al vincolo che la somma dei \underline{k}_ρ relativi ai (due) rami ρ che entrano in un nodo sia uguale al \underline{k}_ρ del ramo che ne esce. In tal modo gli indici \underline{k}_ρ dei rami finali (ossia quelli che iniziano in vertici $v \in V_f$) determinano tutti gli indici degli altri rami. Porremo però la restizione che l’indice \underline{k}_ρ del ramo che finisce nella radice sia \underline{k} , se si vuol calcolare $\underline{\gamma}_k(t)$.

(2) Ad ogni nodo v si associa un tempo $\tau_v \in [0, t]$ in modo che la funzione $v \rightarrow \tau_v$ sia crescente come funzione di v (secondo l’ordinamento dell’albero, dai vertici finali verso la radice). Alla radice si associa il tempo t maggiore di tutti i τ_v .

(3) infine si ricorda che, per costruzione, ogni ramo ρ che precede un nodo v porta un indice $\delta_\rho = 0, 1$.

Chiameremo, in analogia con i “grafici di Feynman” della teoria dei campi il vettore \underline{k}_ρ il *momento che fluisce* nella linea ρ e il momento della linea che termina nella radice sarà il *momento totale* dell’albero. Si noti che $\underline{k} = \sum_\rho^* \underline{k}_\rho$ ove la somma è ristretta ai soli rami finali (ossia con vertice iniziale in V_f).

Se ρ_v è il ramo che ha v come estremo inferiore e v'_ρ, v_ρ denotano gli estremi superiore e inferiore del ramo ρ , si consideri la seguente quantità che chiamiamo il *valore* dell’albero:

$$(-i)^m \int \left(\prod_{v \text{ nodi}} d\tau_v \right) \left(\prod_{\rho \text{ int}} e^{-\nu \underline{k}_\rho^2 (\tau_{v'_\rho} - \tau_{v_\rho})} \Pi_{\underline{k}_\rho} \right) \left(\prod_{v \in V_f} \underline{\gamma}_{\underline{k}_{\rho_v}}^0(\tau_v) \right) \left(\prod_{\rho, \delta_\rho=1} \underline{k}_\rho \right) \quad (12.12)$$

12.12

ove il primo prodotto è sui vertici non banali, cioè interni, dell’albero (in numero di m); il secondo prodotto è sugli m rami interni (ossia sui rami che non iniziano in un vertice terminale $v \in V_f$); il terzo prodotto su $v \in V_f$ concerne gli m vertici dell’insieme V_f dei vertici finali dell’albero e l’ultimo prodotto è sugli m rami con indice $\delta_\rho = 1$.

Il dominio degli integrali sui τ_v è descritto dalle condizioni in (2).

Gli indici dei vettori \underline{k} e $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0$ e dei tensori $\Pi_{\underline{k}_\rho}$ che proiettano sui piani

ortogonali a \underline{k}_ρ devono essere contratti fra loro in modo opportuno (che si inferisce dalla lettura delle (12.9), (12.10) e che qui non interessa esplicitare) e allora la somma (12.11) dei valori (dati dalla (12.12)) degli m -alberi decorati Θ con $m < 2^n$ da il valore di $\gamma_{\underline{k}}^{(n)}(t)$, e quella su tutti gli alberi è esattamente il limite per $n \rightarrow \infty$ di $\gamma_{\underline{k}}^{(n)}(\tau)$.

Ossia la (12.12) da una formula, in guisa di sviluppo in serie, per la soluzione dell'equazione di Navier-Stokes, ovviamente a meno di problemi di convergenza e purchè non si facciano errori di doppio conteggio. Questi ultimi sono semplicemente evitati se si impone di considerare solo il contributo di alberi decorati "diversi", riguardando come uguali due alberi decorati che possono essere sovrapposti permutando i rami che entrano in uno stesso nodo (con le decorazioni rigidamente apposte).

Volendo ora eseguire una stima della convergenza della serie per $t \leq t_0$, con $t_0 > 0$, osserviamo che ogni fattore $\bar{\gamma}_{\underline{k}}^0$ può essere maggiorato da $\bar{G}_0 e^{-\xi_0 |\underline{k}|/k_0}$ per (12.8), con $\bar{G}_0 = G + \Phi(\nu k_0)^{-2}$.

Scrivendo $e^{-\xi_0 |\underline{k}|/k_0} \equiv e^{-\frac{\xi_0}{2} |\underline{k}|/k_0} e^{-\frac{\xi_0}{2} |\underline{k}|/k_0}$ e ricordando che la somma dei \underline{k}_ρ su ogni vertice si conserva, si vede che $\underline{k} = \sum_{v \in V_f} \underline{k}_{\rho_v}$ e quindi il contributo alla somma in (12.12) dovuto agli alberi con n vertici non banali (e, quindi, n vertici finali) si maggiora con:

$$\begin{aligned} & \bar{G}_0^{n+1} e^{-\xi_0 |\underline{k}|/2k_0} \cdot \sum_{\underline{k}_\rho} \int \left(\prod_{v \in \text{nodi}} d\tau_v \right) \left(\prod_{v \ni V_f} e^{-\nu \underline{k}_{\rho_v}^2 (\tau_{v'} - \tau_v)} \right) \left(\prod_{v \in V_f} e^{-\xi_0 |\underline{k}_v|/2k_0} \right) \left(\prod_{\rho, \delta_\rho=1} |\underline{k}_\rho| \right) \end{aligned} \quad (12.13)$$

e la somma verte solo sui \underline{k}_{ρ_v} con ρ_v ramo terminale, (gli altri \underline{k}_ρ essendo fissati dalla regola di conservazione ai nodi). Si ricordi qui che i vertici finali $v \in V_f$ non sono nodi (che sono solo i vertici interni).

Gli integrali su τ_v possono essere stimati, ampliandone i domini di integrazione e per tutti gli alberi, da:

$$\prod_{\rho} \frac{1 - e^{-\nu \underline{k}_\rho^2 t}}{\nu \underline{k}_\rho^2} \leq \prod_{\rho} t^\varepsilon (\nu \underline{k}_\rho^2)^{-(1-\varepsilon)} \quad (12.14)$$

per $\varepsilon \in [0, 1]$ arbitrario (perchè $(1 - e^{-ab})/a$ è maggiorato sia da $\frac{1}{a}$ che da b , per tutti gli $a, b > 0$); il prodotto in (12.14) verte sui rami ρ non finali, c.f.r. sopra.

Quindi scegliendo $\varepsilon = 1/2$ vediamo che (12.12), relativa ad un albero con $2n + 1$ rami e n nodi, quindi, $n + 1$ vertici finali, è maggiorata da:

$$e^{-\xi_0 |\underline{k}|/2k_0} 2^{4n} (t\nu^{-1})^{n/2} \bar{G}_0^{n+1} \left(\sum_{\underline{k}'} \frac{|\underline{k}'|}{k_0} e^{-\xi_0 |\underline{k}'|/2k_0} \right)^{n+1} \quad (12.15)$$

perchè i fattori $|\underline{k}_\rho|$ corrispondenti ai rami interni con indice $\delta_\rho = 1$ e (in (12.13)) sono compensati dai corrispondenti $|\underline{k}_\rho|^{-1}$, (che sono generati

dalla (12.14) con $\varepsilon = \frac{1}{2}$), con $\delta_\rho = 1$. I fattori $|\underline{k}_\rho|$ relativi ai rami con indice $\delta_\rho = 1$ ma che escono dai vertici finali invece non possono essere compensati in questo modo (dal momento che i fattori in (12.14), necessari, semplicemente sono assenti) e quindi li lasciamo indicati scrivendoli come $k_0 \frac{|\underline{k}_\rho|}{k_0}$ che mettiamo insieme alla stima sugli $\underline{\gamma}_{\underline{k}_\rho}^0$ associati agli $n+1$ rami finali (ossia $\overline{G}_0 e^{-\xi_0 |\underline{k}_\rho|/2k_0}$) generando un certo numero $n' < n+1$ dei fattori che costituiscono l'ultimo termine in (12.15); gli altri $n+1-n'$ potrebbero essere stimati ciascuno dalla stessa somma privata del termine $\frac{|\underline{k}'|}{k_0}$ che però possiamo lasciare per semplicità dal momento che è ≥ 1 . I restanti $|\underline{k}_\rho|^{-1}$, corrispondenti ai rami con indice $\delta_\rho = 0$ si stimano banalmente con k_0^{-1} . E il fattore 2^{4n} stima il numero di alberi con $2n+1$ rami.²

Si trova:

$$12.16 \quad |\underline{\gamma}_{\underline{k}}| \leq e^{-\xi_0 |\underline{k}|/2k_0} \overline{G}_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{G}_0 t^{1/2} \nu^{-1/2})^n \xi_0^{-(d+1)(n+1)} B^{n+1} 2^{4n} \quad (12.16)$$

se $\xi_0^{-d-1} B$ è una stima di $\sum_{\underline{k}} \frac{|\underline{k}|}{k_0} e^{-\xi_0 |\underline{k}|/2k_0}$ (si ricordi che stiamo supponendo $\xi_0 \leq 1$, per semplicità, c.f.r. il commento alla (12.1)).

Quindi $t \leq \bar{t}_0 = \nu (16B\overline{G}_0 \xi_0^{-d-1})^{-2}$ è la condizione di convergenza della serie in (12.16). Il teorema segue scegliendo $t_0 = \bar{t}_0/4$, quindi tale che la somma su n è stimata da 2, e $G_0 = B\overline{G}_0 \xi_0^{-d-1}$.

Alla fine si possono ridefinire le costanti numeriche in modo che le stime (12.3) si possano esprimere in termini di una sola costante numerica B_0 .

*

mbe

Osservazione: si noti che se si definisce l'operatore $(-\Delta)^\alpha$, con α reale, come l'operatore che moltiplica per $|\underline{k}|^{2\alpha}$ la armonica di modo \underline{k} della trasformata di Fourier di una funzione in $L_2(\Omega)$, allora se il termine di attrito $\nu \Delta \underline{u}$ in (12.2) è sostituito da $-\nu(-\Delta)^\alpha$ con $\alpha > 0$ la proposizione resta valida, con alcune ovvie modifiche. Il punto centrale della dimostrazione è infatti la stima (12.14) che può essere sostituita da:

$$12.17 \quad \frac{|e^{-\nu |\underline{k}|^{2\alpha} t} - 1|}{\nu |\underline{k}|^{2\alpha}} \leq t^\varepsilon (\nu |\underline{k}|^{2\alpha})^{-(1-\varepsilon)} \quad (12.17)$$

e l'argomento può essere adattato purchè si possa scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $2(1-\varepsilon)\alpha > 1$, ossia se $\alpha > 1/2$. Questa restrizione è invero necessaria

² Si vede subito, infatti, che il numero di alberi con m rami è non maggiore del numero di cammini sul reticolo degli interi positivi con $2(m-1)$ passi di 1 (un numero stimato da $2^{2(m-1)}$): dato un albero si pensi di camminare sui suoi rami a partire dalla radice girando sempre a sinistra se possibile e altrimenti tornando indietro, mai percorrendo più di due volte lo stesso ramo; si associa poi ad ogni ramo un passo in avanti sul reticolo degli interi, ovvero un passo indietro le volte che non potendo girare a sinistra si è costretti a tornare indietro. Nel nostro caso un m -albero contiene $2m+1$ rami.

perchè solo così si possono eliminare dalle stime i fattori $|\underline{k}_\rho|$ dovuti ai rami finali con indice $\delta_\rho = 1$ che non sono compensabili altrimenti.

Dunque in un certo senso il termine di attrito in NS è "più grande del necessario", almeno al fine di poter garantire che a dati iniziali analitici segua sempre un moto analitico, almeno per un tempo abbastanza piccolo.

Per l'equazione di Eulero incomprimibile, essendo $\nu = 0$, il metodo ora illustrato non porta a conclusioni, dal momento che non si può mostrare la convergenza della serie. È tuttavia possibile una teoria locale della equazione di Eulero che illustriamo nei problemi.

Problemi. *Teoria locale classica per le equazioni di Eulero e Navier-Stokes con condizioni periodiche.*

[0] Se $\underline{x} \rightarrow f(\underline{x})$ è una funzione analitica e periodica sul toro $[0, L]^d$, allora esiste $\xi > 0$ ed una funzione olomorfa F di d variabili complesse che estende la funzione f ad un intorno di C^d costituito dai punti \underline{x} tali che $|\operatorname{Im} x_i| < \xi$. Inoltre se $|F| \leq \Phi$ per $|\operatorname{Im} x_i| < \xi$ la trasformata di Fourier di f verifica $|f_{\underline{k}}| \leq \Phi e^{-\xi|\underline{k}|}$ se $|\underline{k}|$ si definisce $|\underline{k}| = \sum_i |k_i|$. Inoltre si cerchi la connessione fra questo risultato e la teoria delle serie di Laurent. (*Idea:* Si studi prima il caso $d = 1$. Si scriva la trasformata $f_{\underline{k}}$ come un integrale sul toro, applicando la definizione, e poi "si sposti il cammino di integrazione" alle linee $\operatorname{Im} x_j = \pm \xi_0$ a seconda del segno di k_j . Ossia si usi il teorema di Cauchy sulle funzioni olomorfe. La connessione con la teoria delle serie di Laurent avviene pensando la formula che da la trasformata di Fourier come un integrale sulle variabili $\zeta_j = e^{ix_j}$.)

[1] Si mostri che se \underline{u} è un campo di velocità in $C^\infty(\Omega)$ allora:

$$\sum_{|\underline{m}|=m} \int_{\Omega} \tilde{\partial}^{\underline{m}} \underline{u} \cdot \tilde{\partial}^{\underline{m}} (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) d\underline{x} = \sum_{|\underline{m}|=m} \sum_{\substack{\underline{a} \leq \underline{m} \\ |\underline{a}| > 0}} \int_{\Omega} (\tilde{\partial}^{\underline{m}} \underline{u}) \cdot (\tilde{\partial}^{\underline{a}} \underline{u}) \cdot (\underline{\partial} \tilde{\partial}^{\underline{m}-\underline{a}} \underline{u}) d\underline{x}$$

ossia il termine $\underline{a} = \underline{0}$ manca. (*Idea:* il termine con $\underline{a} = \underline{0}$ ha la forma di una somma di termini come $\int \underline{w} \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{w} d\underline{x} \equiv \frac{1}{2} \int \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}^2 d\underline{x}$ con \underline{w} opportuni e questa quantità si annulla integrando per parti, al solito.)

[2] Se $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$ si noti che, per il problema [20] del §9, se $|\underline{a}| < m - d/2$ (con $|\underline{a}| = \sum |a_i|$ per $\underline{a} = (a_1, \dots, a_d)$) allora $|\underline{\partial}^{\underline{a}} \underline{u}(\underline{x})| \leq \Gamma L^{-|\underline{a}|} \|\underline{u}\|_{W_m(\Omega)}$. Si deduca, se $m > d + 1$, che:

$$\left| L^{2m-d+1} \sum_{|\underline{m}|=m} \int_{\Omega} \underline{\partial}^{\underline{m}} \underline{u} \cdot \underline{\partial}^{\underline{m}} (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) d\underline{x} \right| \leq \Gamma_1 \|\underline{u}\|_{W_m(\Omega)}^3, \quad m > d + 1$$

se Γ_1 è una opportuna costante. (*Idea:* si applichi [1] e poi la disuguaglianza di Schwartz ad ogni addendo riducendosi alla stima di $\mathcal{N} = \|\tilde{\partial}^{\underline{a}} \underline{u} \cdot \underline{\partial} \tilde{\partial}^{\underline{m}-\underline{a}} \underline{u}\|_{L_2(\Omega)}$ con $|\underline{a}| \geq 1$. Si osservi che se $|\underline{a}| < m - d/2$ allora la stima nel problema (20) del §9 implica: $L^{|\underline{a}|} |\tilde{\partial}^{\underline{a}} \underline{u}(\underline{x})| < \Gamma_2 \|\underline{u}\|_{W_m(\Omega)}$, consentendo di maggiorare il primo dei due fattori nella \mathcal{N} ; se invece $|\underline{a}| \geq m - d/2$ allora $|\underline{m} - \underline{a}| + 1 \equiv m - |\underline{a}| + 1 \leq \frac{d}{2} + 1$ e quindi se $m > d + 1 \equiv (\frac{d}{2} + 1) + \frac{d}{2}$ si trova, sempre per il problema (20), §9, che:

$$L^{(m-|\underline{a}|)+1} |\underline{\partial} \tilde{\partial}^{\underline{m}-\underline{a}} \underline{u}(\underline{x})| \leq \Gamma_3 \|\underline{u}\|_{W_m(\Omega)}$$

consentendo la maggiorazione del secondo fattore in \mathcal{N} .)

[3] Si faccia vedere che se \underline{u}^N è una soluzione delle equazioni regolarizzate di Eulero ottenute con taglio ultravioletto (nel senso del §9) a $|\underline{k}| < N$ si ha, se $m > d + 1$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\underline{u}^N\|_{W_m(\Omega)}^2 \leq G_m \|\underline{u}^N\|_{W_m(\Omega)}^3$$

con G_m indipendente da N . (*Idea:* segue immediatamente da [2] derivando \underline{m} volte l'equazione di Eulero e moltiplicando membro a membro per $\partial^{\underline{m}}\underline{u}$, sommando su \underline{m} con $|\underline{m}| \leq m$ e integrando su \underline{x} ; si deve notare che le operazioni di troncamento non interferiscono con la deduzione delle conclusioni di [2].)

[4] si mostri che se $\underline{u}^0 \in C^\infty$ allora dato $m > d + 1$ si ha, posto $W_m = W_m(\Omega)$:

$$\|\underline{u}^N(t)\|_{W_m} \leq \frac{\|\underline{u}^0\|_{W_m}}{1 - 4G_m\|\underline{u}^0\|_{W_m}t}, \quad 0 \leq t < T_m$$

con $T_m = (4G_m\|\underline{u}^0\|_{W_m})^{-1}$ e se \underline{u}^N è la soluzione dell'equazione regolarizzata con taglio a $|\underline{k}| < N$ e dato iniziale \underline{u}^0 (troncato con lo stesso taglio).

[5] (Graffi) Si mostri che l'equazione di Eulero non ammette più di una soluzione continua in \underline{x}, t con derivate prime rispetto alle \underline{x} e t continue e limitate nelle \underline{x} , in ogni intervallo finito $[0, T]$ di tempo, e verificanti lo stesso dato iniziale. (*Idea:* se \underline{u}^1 e \underline{u}^2 sono due soluzioni $\underline{\delta} \equiv \underline{u}_1 - \underline{u}_2$ e $D(t)$ è l'integrale di $\underline{\delta}^2$ su Ω si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} D(t) \equiv - \int_{\Omega} \underline{\delta} \cdot (\underline{\delta} \cdot \underline{\partial} \underline{u}_1) d\underline{x} - \int_{\Omega} \underline{\delta} \cdot (\underline{u}_2 \cdot \underline{\partial}) \underline{\delta} d\underline{x} \leq U \int_{\Omega} \underline{\delta}^2 d\underline{x} = U D(t)$$

perché il secondo termine nel passaggio intermedio si annulla per il solito motivo, se $U = \max |\underline{\partial} \underline{u}_1|$ e se $D(t)$ è definito dalla prima identità. e quindi $D(t) \leq D(0)e^{2Ut}$, $t \in [0, T]$, e se $D(0) = 0$ si ha $D(t) \equiv 0$.)

[6] Si mostri che se \underline{u}^0 è in $C^\infty(\Omega)$ allora il $\lim_{N \rightarrow \infty} \underline{u}^N(t)$, $t \in [0, T]$, esiste ed è soluzione di classe C^m dell'equazione di Eulero per $T < T_{m+1+d/2}$, con T_m definito in [4], per ogni $m > 1 + d/2$. (*Idea:* si consideri una sottosuccessione \underline{u}^{N_i} convergente uniformemente insieme alla sua derivata prima (si noti che si ha una stima uniforme sulle derivate di ordine $m > d/2$, cioè $m \geq 2$ e quindi le successioni di \underline{u}^N e di $\underline{\partial} \underline{u}^N$ sono

successioni equilimitate ed equicontinue e si applichi il lemma di Ascoli Arzelà). Si noti che il limite della sottosuccessione è una soluzione delle equazioni di Eulero limitata con la sua derivata prima e continua in \underline{x} e t (la continuità in t si deduce dalla uniforme continuità delle \underline{u}^N in t dovuta alla stima della derivata temporale che segue dal fatto che le \underline{u}^N verificano l'equazione troncata). Per [5] esiste una sola tale funzione e quindi tutte le sottosuccessioni devono avere lo stesso limite.)

[7] Si dimostri che la soluzione di cui al [6] è tale che se $\underline{u}_0, \underline{u}'_0 \in C^\infty(\Omega)$ sono due dati iniziali e $\|\underline{u}_0\|_{W_{h+1}}, \|\underline{u}'_0\|_{W_{h+1}} < R$, per un fissato $h > d + 1$, si ha $\|\underline{u}\|_{W_h} \leq 2\|\underline{u}_0\|_{W_h}$, $\|\underline{u}'\|_{W_h} \leq 2\|\underline{u}'_0\|_{W_h}$ e:

$$\|\underline{u} - \underline{u}'\| \leq \lambda_{h+1}(R) \|\underline{u}_0 - \underline{u}'_0\|_{W_h}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{8G_{h+1}R} \equiv \tau_h(R)$$

con G_m introdotta al [4] e $\lambda_h(R)$ opportuna. (*Idea:* sia $\underline{\delta} = \underline{u} - \underline{u}'$ e si noti che se $|\underline{m}| \leq h$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\partial^{\underline{m}} \underline{\delta})^2 d\underline{x} &= - \int_{\Omega} \partial^{\underline{m}} \underline{\delta} \partial^{\underline{m}} (\underline{\delta} \cdot \underline{\partial} \underline{u} + \underline{u}' \cdot \underline{\partial} \underline{\delta}) d\underline{x} \\ &\leq C_{|\underline{m}|} R \|\underline{\delta}\|_{W_h}^2, \quad h > d + 1 \end{aligned}$$

per la cancellazione del problema [1], ossia perché $\partial^{|\underline{m}|+1} \underline{\delta}$ non appare mai, e per l'argomento del problema [2]: risulta allora $\lambda_{h+1}(R) = \exp(R \sum_{|\underline{m}| \leq h} L^{2m-d} C_{\underline{m}} \tau_h(R))$, indipendente da R .)

[8] Similmente si mostri che la soluzione di cui al [6] gode della proprietà:

$$\|\underline{u} - \underline{u}^N\|_{W_h} \leq \lambda_{h+1} \|\underline{u}_0 - \underline{u}_0^N\|_{W_h} + \frac{\tilde{C}_p \lambda_{h+1}}{N^{p-2d}} \|\underline{u}_0\|_{W_{h+p}}^2$$

con \tilde{C}_p opportuna e $p > 2d$. Dedurre che è possibile un algoritmo costruttivo per la approssimazione nel senso della distanza in W_h valido per tempi $t \leq \tau_{h+p}$, con τ_m definito in [7] e $p > 2d$. (*Idea*: si scrivano le equazioni per \underline{u} e \underline{u}^N tenendo conto che ora $\underline{u}^N = -\underline{u}^N \cdot \partial \underline{u}^N + (\underline{u}^N \cdot \partial \underline{u}^N)^{>N}$ ove $f^{>N}$ denota la parte di f ottenuta come somma delle armoniche di f con $|k| > N$. Si stimi questa parte "ultravioletta" usando il risultato di [4] (sottraendo le equazioni per \underline{u} e \underline{u}^N) ottenendo una disuguaglianza simile a quella dell'idea per il problema [7] con un termine addizionale).

[9] I problemi precedenti si riassumono dicendo che, dato $h > d + 1$ e $\underline{u}_0 \in C^\infty(\Omega)$, $\|\underline{u}_0\|_{W_{h+1}} \leq R$ esiste una soluzione locale dell'equazione di Eulero, definita per $0 \leq t \leq \tau_h(R)$ tale che:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|\underline{u}\|_{W_h} \leq 2R & 0 \leq t \leq \tau_h(R) \\ (2) \quad & \|\underline{u} - \underline{u}'\|_{W_h} \leq \lambda_{h+1} \|\underline{u}_0 - \underline{u}_0'\|_{W_h} \\ (3) \quad & \|\underline{u} - \underline{u}^N\|_{W_h} \leq \lambda_{h+1} \|\underline{u}_0 - \underline{u}_0^N\|_{W_h} + \frac{C_p \lambda_{h+1}}{N^{p-2d}} \|\underline{u}_0\|_{W_{h+p}}^2 \end{aligned}$$

quindi l'errore di approssimazione di \underline{u} con \underline{u}^N non è stimabile costruttivamente su tutto l'intervallo di tempo $\tau_h(R)$ lungo il quale si può garantire *a priori* l'esistenza di una soluzione con grandezza in W_h stimata in termini di quantità note. Osservare che, sulla base di quanto detto finora, questo non sarebbe possibile *neppure* se si avesse a disposizione una stima *a priori* di $\|\underline{u}\|_{W_k}$, con k arbitrario, in termini delle sole proprietà di \underline{u}_0 . Sembra che per una dimostrazione costruttiva occorranza anche stime di $\|\underline{u}^N\|_{W_k}$ in termini della sola \underline{u}_0 . Si mostri che se tali stime esistessero allora sarebbe possibile un algoritmo costruttivo di \underline{u} , valido per tutti i tempi coperti dalle stime in questione su \underline{u} e \underline{u}_0 . La rilevanza di questo commento sta nel fatto che l'esistenza della \underline{u} per tutti i tempi può essere dimostrata con argomenti astratti, e anche una stima *a priori* delle $\|\underline{u}\|_{W_k}$ in termini di t e di \underline{u}_0 . Purtroppo però non si conosce una analoga stima per \underline{u}^N .

I seguenti problemi sono dedicati alla deduzione di stime a priori sulla soluzione \underline{u} che ne mostrano l'esistenza, unicità e regolarità globali, e anche di stime a priori della grandezza di $\|\underline{u}\|_{W_h}$ valide a tutti i tempi e dipendenti solo da \underline{u}_0 , se si accetta, come già al problema [5] precedente, il tristo assioma della scelta (cosa che viene sconsigliata a chiunque). La parte costruttiva della teoria (come anche il resto se si decide di accettare l'assioma) è dovuta a Wolibner, Judovic e Kato, [K]. In quel che segue Ω viene scelto $\Omega = [0, L]^2$ con condizioni al contorno periodiche; inoltre per semplicità, si suppone $\underline{g} = \underline{0}$. Infine si considererà l'equazione di Eulero in un intervallo arbitrariamente prefissato $[0, T]$ di tempo. Data una funzione $f(\underline{x})$ su Ω o una $f(\underline{x}, t)$ su $\Omega \times [0, T]$ diremo che è di classe $C^h(\Omega)$ o $C^{h,k}(\Omega \times [0, T])$ se è dotata di h derivate continue in \underline{x} e k derivate continue in t ; diremo che è di classe $C^h(\Omega \times [0, T])$ se ha h derivate continue in \underline{x} o t . Porremo:

$$\begin{aligned} \|f\|_h &= \sum_{0 \leq |\underline{a}| \leq h} \max_{\underline{x} \in \Omega} L^{|\underline{a}|} |\partial_{\underline{x}}^{\underline{a}} f(\underline{x})| \\ \|f\|_{h,k} &= \sum_{\substack{0 \leq |\underline{a}| \leq h \\ 0 \leq \beta \leq k}} \max_{(\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T]} L^{|\underline{a}|} T^\beta |\partial_{\underline{x}}^{\underline{a}} \partial_t^\beta f(\underline{x}, t)| \end{aligned}$$

[10] Se $\omega(\underline{x}, t) = \text{rot } \underline{u}(\underline{x}, t) \in C^\infty$ allora $\omega(\underline{x}, t)$ è uno scalare a media nulla per ogni t . Si mostri l'equivalenza fra le soluzioni delle equazioni di Eulero in $C^\infty(\Omega \times [0, T])$ nella forma delle (12.2) con $\nu = 0$ e (10.3):

$$\begin{aligned} \partial_t \omega + \underline{u} \cdot \partial \omega &= 0, & \underline{u} &= -\partial^\perp \Delta^{-1} \omega \\ \int_\Omega \omega(\underline{x}, t) d\underline{x} &= 0, & \omega(\underline{x}, 0) &= \omega_0(\underline{x}) \end{aligned}$$

ove $\omega_0 = \text{rot } \underline{u}_0$. Si mostri che la condizione $\int_{\Omega} \omega d\underline{x} = 0$ è necessaria perchè abbia senso $\Delta^{-1}\omega$. (*Idea*: il solo punto delicato è la verifica dell'esistenza della pressione p dall'osservazione che la prima equazione può essere riscritta $\text{rot}(\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) = 0$, perchè il toro Ω non è semplicemente connesso. Si noti che l'annullamento del rotore implica che le circuitazioni del campo vettoriale $\underline{w} \equiv \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}$ lungo i cicli del toro:

$C_1(y) \equiv \{(x, y); y = \text{cost}\}$ e $C_2(x) = \{(x, y); x = \text{cost}\}$, definite da $I_1(y) = \oint_{C_1(y)} \underline{w} \cdot d\underline{l}$ e $I_2(x) = \oint_{C_2(x)} \underline{w} \cdot d\underline{l}$, sono indipendenti da x e y rispettivamente e quindi sono uguali alle loro medie su queste coordinate e cioè: $\underline{I} = L^{-1} \int_{\Omega} (\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) d\underline{x}$ che si vede facilmente essere nullo, in conseguenza del fatto che \underline{u} verifica le equazioni di Eulero e $\int_{\Omega} \underline{u} d\underline{x} = \underline{0}$.

[11] Consideriamo lo spazio $\mathcal{M}_0 \subset C^\infty$ definito dalle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \zeta \in C^\infty(\Omega \times [0, T]), & (3) \quad & \int_{\Omega} \zeta(\underline{x}, t) d\underline{x} = 0 \\ (2) \quad & \zeta(\underline{x}, 0) = \omega_0(\underline{x}), & (4) \quad & \max_{(\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T]} |\zeta(\underline{x}, t)| \leq \|\omega_0\|_0 \end{aligned}$$

Si dimostri che il campo vettoriale $\underline{v}^\zeta(\underline{x}, t) = -\underline{\partial}^\perp \Delta^{-1} \zeta(\underline{x}, t)$ è di classe $C^\infty(\Omega \times [0, T])$. E che le equazioni per la corrente che passa all'istante t per il punto \underline{x} :

$$\partial_s U_{s,t}^\zeta(\underline{x}) = \underline{v}^\zeta(U_{s,t}^\zeta(\underline{x}), s), \quad U_{t,t}^\zeta(\underline{x}) \equiv \underline{x}$$

ammettono una soluzione globale di classe C^∞ in $\underline{x} \in \Omega$, $s, t \in [0, T]$. (*Idea*: la soluzione è globale perchè Ω non ha frontiera).

[12] Si usi il problema precedente per mostrare che la seguente definizione definisce un operatore \mathcal{R} su \mathcal{M}_0 :

$$\mathcal{R}\zeta(\underline{x}, t) = \omega_0(U_{0,t}^\zeta(\underline{x}))$$

e che $\mathcal{R}\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$. (*Idea*: si usi il fatto che $\underline{\zeta}$ è un campo a divergenza nulla e quindi la trasformazione $U_{0,t}^\zeta(\underline{x}) = \underline{x}'$ conserva il volume e allora $\int_{\Omega} \mathcal{R}\zeta(\underline{x}, t) d\underline{x} \equiv \int_{\Omega} \omega_0(\underline{x}) d\underline{x}$).

[13] Se esiste $\omega \in \mathcal{M}_0$ che è punto fisso di \mathcal{R} allora ω verifica l'equazione di Eulero. Dunque possiamo scrivere tale equazione $\omega = \mathcal{R}\omega$. (*Idea*: si noti che l'equazione di Eulero dice appunto che la vorticità è trasportata dalla corrente e cioè all'istante t ha in \underline{x} il valore che all'istante 0 aveva nel punto \underline{x}' che è trasportato dalla corrente in \underline{x} nel tempo t : ossia proprio $U_{0,t}^\omega(\underline{x})$).

[14] Si faccia vedere che il campo vettoriale \underline{v}^ζ verifica le seguenti proprietà:

$$\|\underline{v}^\zeta(\underline{x}, t)\|_0 \leq C_0 L \|\zeta\|_0, \quad \frac{|\underline{v}^\zeta(\underline{x}, t) - \underline{v}^\zeta(\underline{x}', t)|}{(L^{-1}|\underline{x} - \underline{x}'|) \log_+(L|\underline{x} - \underline{x}'|^{-1})} \leq C_0 L \|\zeta\|_0$$

ove $\log_+ z \equiv \log(e+z)$ (qui \log_+ può ovviamente essere sostituito con qualunque funzione di z che sia positiva crescente, continua e asintotica a $\log z$ per $z \rightarrow \infty$). (*Idea*: si osservi che $\underline{v}^\zeta = -\underline{\partial}^\perp \Delta^{-1} \zeta$ e l'operatore $\underline{\partial} \Delta^{-1}$ può essere calcolato come operatore integrale a partire dalla funzione di Green del laplaciano, ossia $\frac{1}{2\pi} \log |\underline{x} - \underline{y}|^{-1}$, a mezzo del metodo delle immagini. Si ottengono formule contenenti serie, (*somme sulle immagini di Ω*), che non sono assolutamente convergenti:

$$\sum_{\underline{n}} \int_{\Omega} \frac{d\underline{y}}{2\pi} \frac{(\underline{x} - \underline{y} + \underline{n}L)^\perp}{|\underline{x} - \underline{y} + \underline{n}L|^2} \zeta(\underline{y}) \equiv \sum_{\underline{n}} \int_{\Omega} d\underline{y} \underline{K}(\underline{x} - \underline{y} + \underline{n}L) \zeta(\underline{y})$$

ma la ipotesi che ζ abbia media nulla fa sì che esse possono essere riscritte in modo da dare luogo a somme assolutamente convergenti e questo permette di ridurre il problema alla dimostrazione della validità delle stime termine a termine nella somma sulle immagini (ossia sul vettore intero \underline{n}). Anzi la somma su tutti gli \underline{n} con $|\underline{n}| > 2$ da luogo a stime banali e il caso veramente da capire è solo il caso che corrisponde a $\underline{n} = \underline{0}$. Questo caso è anche esso banale per quel che concerne la prima stima. La seconda stima, termine con $\underline{n} = \underline{0}$, si ottiene scrivendo la differenza dei due integrali per $\underline{v}^\zeta(\underline{x}, t)$ e $\underline{v}^\zeta(\underline{x}', t)$ come un integrale su Ω della differenza degli integrandi. Si decomponga poi l'integrale su Ω nell'integrale esteso alla sfera di raggio $2r = 2|\underline{x} - \underline{x}'|$ e con centro in \underline{x} e nell'integrale esteso al complementare. Il primo integrale si stima introducendo il modulo sotto il segno di integrazione e stimando separatamente i due termini e produce un risultato proporzionale a $r\|\zeta\|_0$ mentre il secondo integrale si stimerà via il teorema di Lagrange valutando la differenza $\underline{K}(\underline{x} - \underline{y}) - \underline{K}(\underline{x}' - \underline{y})$ come $r|\underline{y}|^{-2}$, perchè ora $|\underline{y} - \underline{x}|$ e $|\underline{y} - \underline{x}'|$ sono stimabili come una costante per $|\underline{y}|$ perchè \underline{y} è "lontano" sia da \underline{x} che da \underline{x}' , e allora l'integrale sul complemento della sferetta si stima evidentemente con $\log Lr^{-1}$, conducendo alla seconda disuguaglianza).

[15] Si mostri che le proprietà del problema [14] implicano che le correnti generate da due campi $\underline{v}^\zeta, \underline{v}^{\zeta'}$ con $\zeta, \zeta' \in \mathcal{M}_0$ sono tali che esistono C_0 e δ dipendenti solo da $M_0 \equiv \|\omega_0\|_0$ (ossia dal massimo di ω_0 , e non dalle derivate successive di ω_0 !) per cui:

$$|U_{s,t}^\zeta(\underline{x}) - U_{s,t}^{\zeta'}(\underline{x})| \leq C_0(M_0 T) (\|\zeta - \zeta'\|_0 M_0^{-1})^\delta L$$

Quindi la \mathcal{R} può essere pensata definita sulla chiusura $\overline{\mathcal{M}_0}$ di \mathcal{M}_0 rispetto alla metrica della convergenza uniforme: e quindi estesa a tutti i campi continui ζ , senza alcuna proprietà di differenziabilità, verificanti le proprietà (2),(3),(4) del problema [11]. (Idea: posto $\rho_s = L^{-1}(U_{s,t}^\zeta(\underline{x}) - U_{s,t}^{\zeta'}(\underline{x}))$, si noti che per le stime di [14], e aggiungendo e sottraendo $\underline{v}^\zeta(U_{s,t}^{\zeta'}(\underline{x}), s)$:

$$\begin{aligned} |\partial_s \rho_s| &= L^{-1} |\underline{v}^\zeta(U_{s,t}^\zeta(\underline{x}), s) - \underline{v}^{\zeta'}(U_{s,t}^{\zeta'}(\underline{x}), s)| \leq C_1 |\rho_s| \log_+ |\rho_s|^{-1} + \\ &L^{-1} |\underline{v}^\zeta(U_{s,t}^{\zeta'}(\underline{x}), s) - \underline{v}^{\zeta'}(U_{s,t}^{\zeta'}(\underline{x}), s)| \leq \\ &\leq C_1 |\rho_s| \log_+ |\rho_s|^{-1} + C_2 \|\zeta - \zeta'\|_0 \end{aligned}$$

e $\rho_t = \underline{0}$. Se ne deduca che, poichè $0 \leq s \leq T$, $|\rho_s|$ si mantiene $\leq R$ se R è dato da:

$$\int_0^R \frac{d\rho}{\rho \log_+ \rho^{-1} + \|\zeta - \zeta'\|_0 M_0^{-1}} = C_0 M_0 T$$

che si vede subito verifica $R \leq K(M_0 T) (\|\zeta - \zeta'\|_0 M_0^{-1})^\delta$ con $K(M_0 T)$ funzione crescente continua e $\delta = \exp - M_0 C_0 T$.

[16] Si dimostri che le linee di corrente hanno la proprietà:

$$\frac{|U_{s,t}^\zeta(\underline{x}) - U_{s',t'}^\zeta(\underline{x}')|}{(L^{-1}|\underline{x} - \underline{x}'|)^\delta + (T^{-1}|s - s'|)^\delta + (T^{-1}|t - t'|)^\delta} \leq F(M_0 T) L$$

ove F è una funzione crescente del suo argomento e continua; $M_0 \equiv \|\zeta\|_0$. (Idea: Posto $\rho_s = L^{-1}(U_{s,t}^\zeta(\underline{x}) - U_{s,t}^\zeta(\underline{x}'))$ si trova, usando la disuguaglianza in [14], che:

$$|\partial_s \rho_s| \leq C_0 M_0 |\rho_s| \log_+ |\rho_s|^{-1}, \quad \rho_t \equiv \underline{x} - \underline{x}'$$

e allora $|\rho_s| \leq R$ ove R è tale che:

$$\int_{L^{-1}|\underline{x} - \underline{x}'|}^R \frac{d\rho}{\rho \log_+ \rho^{-1}} = M_0 C_0 T \quad \Rightarrow \quad R \leq (L^{-1}|\underline{x} - \underline{x}'|)^\delta F'(M_0 T)$$

dove F' é una opportuna funzione continua crescente e δ é come nel problema precedente. Inoltre si noti che, per la prima delle disuguaglianze del problema (14): $L^{-1}|U_{s,t}^\zeta(\underline{x}') - U_{s',t}^\zeta(\underline{x}')| \equiv |L^{-1} \int_s^{s'} \underline{v}^\zeta(U_{\sigma,t}^\zeta(\underline{x}')) d\sigma| \leq C_0 M_0 |s - s'|$. Infine se $\underline{x}'' = U_{t,t'}^\zeta(\underline{x}')$ allora:

$$L^{-1}|U_{s',t}^\zeta(\underline{x}') - U_{s',t'}^\zeta(\underline{x}')| \equiv L^{-1}|U_{s',t}^\zeta(\underline{x}') - U_{s',t}^\zeta(\underline{x}'')| \leq (L^{-1}|\underline{x}' - \underline{x}''|)^\delta F'(M_0 T)$$

per quanto gia' visto. Ma $|\underline{x}' - \underline{x}''| \equiv |\int_t^{t'} \underline{v}^\zeta(U_{\sigma,t'}^\zeta(\underline{x}'), \sigma) d\sigma| \leq L M_0 C_0 |t - t'|$ e quindi segue quanto voluto).

[17] Si mostri che la \mathcal{R} trasforma $\overline{\mathcal{M}}_0$ nel sottospazio $\overline{\mathcal{M}}_0^\delta$ delle funzioni continue verificanti le 2),3),4) del problema (11) e la:

$$\|\zeta\|_\delta \equiv \sup_{\Omega \times [0,T] \times \Omega \times [0,T]} \frac{|\zeta(\underline{x}, t) - \zeta(\underline{x}', t')|}{(L^{-1}|\underline{x} - \underline{x}'|)^\delta + (T^{-1}|t - t'|)^\delta} \leq M_0 F''(M_0 T) \quad (!)$$

con una opportuna funzione F'' . Quindi la trasformazione continua \mathcal{R} trasforma in se l'insieme convesso $\overline{\mathcal{M}}_0^\delta$; inoltre tale insieme è, come si suol dire, compatto nella topologia della convergenza uniforme (perchè è costituito da un insieme di funzioni equicontinue e limitate, (Ascoli Arzelà)) e dunque utilizzando il tristo assioma della scelta (e il teorema del punto fisso di Schauder, sua conseguenza) esiste un campo $\omega \in \overline{\mathcal{M}}_0^\delta$ tale che $\omega = \mathcal{R}\omega$. (*Idea*: basta osservare che tutto quanto detto segue dalla forma della \mathcal{R} , dalla regolarità di ω_0 e dalla disuguaglianza del problema [16]. Inoltre lo spazio delle funzioni che verificano la disuguaglianza (*) è chiuso nella topologia della convergenza uniforme).

[18] Il risultato del problema (16) può essere generalizzato, con un po' di pazienza. Se si definisce per $0 < \gamma < 1$:

$$\|f\|_{k+\gamma} = \|f\|_k + \sup_{(\underline{x}, t) \in \Omega \times [0,T]} \sum_{|\alpha|+\beta=k} \frac{L^{|\alpha|} T^\beta |\partial_{\underline{x}}^\alpha \partial_t^\beta f(\underline{x}, t) - \partial_{\underline{x}}^\alpha \partial_t^\beta f(\underline{x}', t')|}{(L^{-1}|\underline{x} - \underline{x}'|)^\gamma + (T^{-1}|t - t'|)^\gamma}$$

si ha che se $\gamma + \delta < 1$:

$$\|\mathcal{R}\zeta\|_{k+\gamma+\delta} \leq F_k \|\zeta\|_{k+\gamma}$$

e se $\gamma + \delta > 1$ allora: $\|\mathcal{R}\zeta\|_{k+1} \leq F_k \|\zeta\|_{k+\gamma}$, ove F_k sono costanti opportune che dipendono da ω_0 soltanto e tramite le sue prime $k+1$ derivate.

[19] Si dimostri che il problema [18] implica che ω , punto fisso di \mathcal{R} in $\overline{\mathcal{M}}_0$ è di classe C^∞ ; e le sue derivate si stimano all'ordine k in termini delle derivate di ordine $\leq k - \delta + 1$ della funzione ω_0 . (*Idea*: \mathcal{R} "regolarizza" e quindi $\mathcal{R}\omega$ è più regolare di ω ; ma è uguale ad ω e quindi ω è C^∞).

[20] Si constati, tristemente, che quanto detto non consente di scrivere un programma di calcolo che produca la ω entro una data approssimazione ε nella metrica di C^k , qualsiasi sia k ($k = 0$ incluso). Si mediti sull' evento, e se possibile si trovi una soluzione: contrariamente a quanto si afferma sovente il problema della esistenza globale di soluzioni della equazione di Eulero è completamente aperto anche a due dimensioni! almeno se si richiede la "costruttività" del metodo impiegato.

§13 Teoremi di esistenza debole globale per NS. Autoregolarizzazione, esistenza, regolarità e unicità per $d = 2$.

Considereremo un fluido incomprimibile racchiuso in una regione $\Omega \subset R^d$ cubica di lato L , con condizioni periodiche al contorno e soggetto a una forza di volume \underline{g} indipendente dal tempo o quasi periodica (per semplicità), in $C^\infty(\Omega)$ e a risultante $\int_\Omega \underline{g} d\xi = \underline{0}$.

In questo caso il baricentro del liquido si muove di moto rettilineo uniforme. ■
Detta $\underline{v} = \int \underline{u} d\xi / L^d$ la velocità del baricentro si possono scrivere le equazioni ■
di NS nel riferimento che ruota sul toro Ω di moto rettilineo uniforme con velocità \underline{v} . La trasformazione galileiana di coordinate è:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi - \underline{v}t, & \underline{u}'(\xi', t) &= \underline{u}(\xi' + \underline{v}t, t) - \underline{v}, \\ p'(\xi', t) &= p(\xi' + \underline{v}t, t), & \underline{g}'(\xi', t) &= \underline{g}(\xi' + \underline{v}t, t) \end{aligned} \quad (13.1)$$

e allora si vede che la \underline{u}' verifica in Ω le equazioni:

$$\begin{aligned} \underline{u}' + (\underline{u}' \cdot \underline{\partial}) \underline{u}' &= -\underline{\partial} p + \nu \Delta \underline{u}' + \underline{g}' \\ \underline{\partial} \cdot \underline{u}' &= 0, & \int_\Omega \underline{u}' d\xi &= 0 \end{aligned} \quad (13.2)$$

ove le unità sono scelte in modo che la densità sia $\rho = 1$.

Dunque non è restrittivo supporre che $\underline{v} = \underline{0}$ e che \underline{g} sia quasi periodica in t , purché $\int \underline{g} d\xi \equiv \underline{0}$, come si supporrà sempre; invero $\underline{g}(\xi + \underline{v}t, t)$ è quasi periodica in t anche se \underline{g} non dipende dal tempo, a cause della sua periodicità in ξ .

La condizione $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ può essere pensata come un vincolo e possiamo eliminarla scegliendo, come già più volte visto (*c.f.r.* ad esempio il §9), opportune coordinate per rappresentare la \underline{u} . Precisamente sceglieremo come coordinate i coefficienti $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ della trasformata di Fourier definita con le convenzioni di (9.2):

$$\underline{u}(\xi, t) = \sum_{\underline{k} \neq \underline{0}} \underline{\gamma}_{\underline{k}}(t) e^{i\underline{k} \cdot \xi}, \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}} \equiv \overline{\underline{\gamma}_{-\underline{k}}}, \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}} \cdot \underline{k} \equiv 0 \quad (13.3)$$

ove $\underline{k} \neq \underline{0}$ esprime la $\int \underline{u} d\xi \equiv \underline{0}$ (conservazione della quantità di moto), $\underline{\gamma}_{\underline{k}} = \overline{\underline{\gamma}_{-\underline{k}}}$ esprime la realtà di \underline{u} e la condizione $\underline{\gamma}_{\underline{k}} \cdot \underline{k} = 0$ è equivalente a $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$. Qui, per la ipotesi di periodicità sui lati di Ω , il vettore \underline{k} ha componenti che sono multipli intere di $k_0 \equiv 2\pi L^{-1}$ e, quindi, $|\underline{k}| \geq k_0$ poichè $\underline{k} \neq \underline{0}$: questa proprietà sarà usata spesso nel seguito. Consistentemente ■
con la (9.2) denoteremo:

$$\|f\|_2^2 = \int_\Omega |f(\underline{x})|^2 d\underline{x}, \quad \text{e} \quad \|\hat{f}\|_2^2 = \sum_{\underline{k}} |\hat{f}(\underline{k})|^2 \longleftrightarrow \|f\|_2^2 = L^d \|\hat{f}\|_2^2 \quad (13.4)$$

e le $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ sono coordinate "proprie", lagrangiane, e possono essere assegnate liberamente, senza ulteriori vincoli, come discusso al §9.

Supponendo che $p, \underline{u} \in C^\infty(\Omega)$ e sostituendo in (13.3) si vede che l'eq. di NS diviene la (9.10). Ricordiamo dunque le notazioni del §9 (*c.f.r.* (9.7)%(9.11)): sia $\underline{\gamma}_{\underline{k}} = \overline{\gamma}_{-\underline{k}}$ e $\underline{k} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}} = 0$ e sia $\Pi_{\underline{k}}$ la proiezione ortogonale, in R^d , sul piano ortogonale a \underline{k} , e sia $\Pi_{\underline{k}}^{\parallel}$ la proiezione ortogonale, in R^d , su \underline{k} :

$$(13.5) \quad (\Pi_{\underline{k}} \underline{w})_i \equiv w_i - k_i \frac{\underline{k} \cdot \underline{w}}{|\underline{k}|^2}, \quad \underline{w} \equiv \frac{\underline{w} \cdot \underline{k}}{k^2} \underline{k} + \Pi_{\underline{k}} \underline{w} \equiv \Pi_{\underline{k}}^{\parallel} \underline{w} + \Pi_{\underline{k}} \underline{w} \quad (13.5)$$

Posto $\underline{\varphi}_{\underline{k}} \stackrel{def}{=} \Pi_{\underline{k}} \underline{g}_{\underline{k}}$ e definito $t_{\underline{k}}$ in modo che sia $\underline{g}_{\underline{k}} = -i \underline{k} t_{\underline{k}} + \underline{\varphi}_{\underline{k}}$, vediamo che le (9.10) si scrivono:

$$(13.6) \quad \begin{aligned} \dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}} &= -\underline{k}^2 \nu \underline{\gamma}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} + \underline{\varphi}_{\underline{k}} \stackrel{def}{=} \\ &\stackrel{def}{=} -\underline{k}^2 \nu \underline{\gamma}_{\underline{k}} + N_{\underline{k}}(\underline{\gamma}) + \underline{\varphi}_{\underline{k}} \\ p_{\underline{k}} &= -\frac{1}{\underline{k}^2} \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) (\underline{\gamma}_{\underline{k}_2} \cdot \underline{k}) + t_{\underline{k}} \end{aligned} \quad (13.6)$$

A questo proposito è imoportante notare che il termine non lineare $N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})$ in (13.6) ha senso non appena $\|\underline{u}\|_2^2$ è finito, ad esempio se $\|\underline{u}\|_2^2$ è limitato da una costante E_0 , per ogni t e, invero, si ha:

$$(13.7) \quad |N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})| \leq |\underline{k}| \|\underline{\gamma}\|_2^2 \quad (13.7)$$

come si vede (dalla prima somma in (13.7)) osservando che $\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \equiv \underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}$ poiché $\underline{k}_2 = \underline{k} - \underline{k}_1$ e $\underline{k}_1 \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}_1} = 0$ e, quindi, applicando la disuguaglianza di Schwartz alla somma $\sum_{\underline{k}_1}$ in (13.6), mantenendo $\underline{k}_2 \equiv \underline{k} - \underline{k}_1$.

Osservazione: una assai utile proprietà di $N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})$, apparsa nella derivazione della (13.7) è legata alla ortogonalità di \underline{k} e $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$, che consente di scrivere due espressioni equivalenti per N :

$$(13.8) \quad N_{\underline{k}}(\underline{\gamma}) = -i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} \equiv -i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}) \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} \quad (13.8)$$

che sarà una proprietà usata molte volte in quel che segue.

Pertanto il problema consiste nel risolvere la prima delle (13.6) soggette alle condizioni $\underline{\gamma}_{\underline{k}} = \overline{\gamma}_{-\underline{k}}$ e alla condizione iniziale $\underline{\gamma}_{\underline{k}}(0) = \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0$ (la seconda equazione deve essere considerata come una definizione di p , come già

notato nel §9, *c.f.r.* (9.10)). La condizione iniziale è automaticamente imposta se si scrive l'equazione come:

$$13.9 \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}}(t) = e^{-\nu \underline{k}^2 t} \underline{\gamma}_{\underline{k}}(0) + \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \cdot \left[\underline{\varphi}_{\underline{k}}(\tau) - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}(\tau) \right] d\tau \quad (13.9)$$

(*c.f.r.* (9.11)). Poniamo dunque la seguente definizione:

1 *Definizione:* Si dirà che $t \rightarrow \underline{u}(\underline{x}, t)$ è una soluzione debole della (13.2) con dato iniziale $\underline{u}^0(\underline{x}) \in L_2$ se esiste $E_0 > 0$ tale che:

- (1) per ogni $t \geq 0$ si ha: $\|\underline{u}\|_2^2 \leq E_0$,
- (2) le funzioni $t \rightarrow \underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)$ sono funzioni continue di t e verificano (13.9).

Osservazioni: Vedremo che soluzioni deboli con dato iniziale $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$ esistono sempre; ma in generale ne possono esistere molte pur con lo stesso dato iniziale.

(1) Se \underline{u} è una soluzione debole allora le (13.9), (13.7) implicano che $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ è differenziabile quasi ovunque¹ in t e che le derivate verificano la prima delle (13.6). Inoltre $\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)$ è l'integrale della sua derivata ossia, come dir si suole, è assolutamente continua.

(2) La maggior parte di quanto segue sarà discusso in relazione a soluzioni deboli con dato iniziale in $C^\infty(\Omega)$. Si potrebbe avere interesse a studiare soluzioni in cui il dato iniziale \underline{u}^0 è meno regolare che C^∞ : la maggior parte di quanto segue può essere facilmente esteso al caso in cui il dato iniziale è tale che $\partial \underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$ (cioè, con le notazioni del problema [20] del §9 $\underline{u}^0 \in$

$W_1(\Omega)$) o anche solo $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$. Basterà, come sottolineeremo quando sarà opportuno, semplicemente seguire le dimostrazioni supponendo questa sola ipotesi. Tuttavia si deve notare che la stessa derivazione delle equazioni della fluidodinamica (*c.f.r.* §1) assume regolarità del campo di velocità così che dati iniziali non regolari hanno poco significato fisico ovvero, almeno, richiedono una discussione fisica del loro significato.

(3) Tuttavia vedremo che *solo* se $d = 2$ si potrà dimostrare che la regolarità iniziale delle soluzioni è mantenuta a tempi $t > 0$. Invero in tal caso vedremo che anche se il dato iniziale è solo in $L_2(\Omega)$ esisteranno soluzioni deboli che diverranno immediatamente “regolarizzate” diventando C^∞ per ogni tempo positivo, e addirittura analitiche come un recente teorema ha mostrato (si veda il seguito).

(4) Possono *a priori* esistere soluzioni che, a partire da un dato iniziale regolare, evolvono in un campo di velocità singolare, cioè diventano non

¹ Questo è il “teorema di Torricelli–Barrow”: si noti che la continuità di $\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)$ in t per ogni \underline{k} non implica necessariamente continuità in t di $N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})$ così che il “quasi ovunque” è qui necessario ed esprime un importante aspetto della scarsa comprensione che si ha dell'equazione NS.

regolari (intendiamo con una qualche derivata di qualche ordine non definita). Tali soluzioni possono essere rilevanti e avere un interessante significato fisico. Ad esempio possono segnalare casi in cui il modello di continuo, entrando in contraddizione con se stesso, potrebbe non essere più valido e quindi il moto dovrebbe essere considerato in modo meno fenomenologico (rispetto alla trattazione del §1) eventualmente retrocedendo su un modello basato sulla struttura microscopico del liquido.

(5) Una conseguenza della uniforme limitatezza supposta per $\|\underline{\gamma}\|_2$ e della (13.7) è che ogni soluzione debole verificherà, per tutti i $t_0 \geq 0$:

$$13.16a \quad \begin{aligned} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^\infty(t) &= e^{-\nu \underline{k}^2(t-t_0)} \underline{\gamma}_{\underline{k}}(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t e^{-\nu \underline{k}^2(t-\tau)} \left[\varphi_{\underline{k}}(\tau) - i \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k} \\ |\underline{k}_i| \leq \infty}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^\infty(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^\infty(\tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (13.10)$$

che chiameremo la “*proprietà di autoconsistenza*” delle soluzioni deboli della definizione 1: ossia la soluzione, $t \rightarrow \underline{\gamma}(t)$, pensata come una funzione definita in $[t_0, \infty)$ è ancora una soluzione delle equazioni di NS con dato iniziale $\underline{\gamma}(t_0)$.²

Per mostrare l’esistenza di soluzioni deboli con dati iniziali $\underline{u}^0 \in C^\infty$ si sostituisce la (13.6) con una sua “regolarizzazione” parametrizzata da un parametro che chiameremo R :

$$13.10 \quad \begin{aligned} \dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}}^R &= -\nu \underline{k}^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}}^R - i \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k} \\ |\underline{k}_i| \leq R}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R \cdot \underline{k}_2) \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R + \varphi_{\underline{k}} \equiv \\ &\equiv -\nu \underline{k}^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}}^R + N_{\underline{k}}^R(\underline{\gamma}^R) + \varphi_{\underline{k}}, \quad |\underline{k}| \leq R \end{aligned} \quad (13.11)$$

ove si noti che, come per la (13.7), si ha $|N_{\underline{k}}^R(\underline{\gamma})| \leq |\underline{k}| \|\underline{\gamma}\|_2^2$ *indipendentemente da R* ; e si comincia con il dimostrare la seguente proposizione che descrive proprietà della (13.11) *indipendenti dal valore del parametro di regolarizzazione R* :

I. Proposizione:

(1) *la (13.11) ammette una soluzione globale per $t \geq 0$ con dato iniziale $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0$, $|\underline{k}| \leq R$, e tale soluzione verifica la stima a priori:*

$$13.11 \quad \|\underline{\gamma}^R(t)\|_2 \equiv \left(\sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 \right)^{1/2} \leq \max \left(\|\underline{\gamma}^0\|_2, \frac{\|\underline{\varphi}\|_2}{\nu k_0^2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{E_0 L^{-d}} \quad (13.12)$$

per ogni $t \geq 0$, $R > 0$, ove E_0 è definito dalla (13.12); quindi se $\underline{\varphi} \equiv \underline{0}$ si ha che $E_0 \equiv \|\underline{u}^0\|_2^2$, c.f.r. (13.4).

² Poiché non si ha necessariamente unicità questa proprietà richiede una verifica (immediata in questo caso). Questo segue dalla (13.9), dall’additività degli integrali e dalla continuità di $\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)$ per ogni \underline{k} .

(2) Inoltre:

$$13.12 \quad \int_0^T d\tau \sum_{\underline{k}} k^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R(\tau)|^2 \leq \frac{1}{2} E_0 L^{-d} \nu^{-1} + T \nu^{-1} \sqrt{E_0 L^{-d}} \|\underline{\varphi}\|_2 \quad (13.13)$$

per ogni $T > 0$ e $R > 0$.

dim: L'equazione (13.11) è un'equazione ordinaria e basta moltiplicare membro a membro la (13.11) per $\overline{\underline{\gamma}_{\underline{k}}} \equiv \underline{\gamma}_{-\underline{k}}$ e sommare su $|\underline{k}| \leq R$ per trovare, se $(\underline{f}, \underline{h})$ denota il solito prodotto scalare in $L_2(\Omega)$ fra i campi vettoriali $\underline{f}, \underline{h}$:

$$\begin{aligned} 13.13 \quad & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\underline{\gamma}^R\|_2^2 = -\nu \sum_{|\underline{k}| \leq R} k^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 + (\underline{\varphi} \cdot \underline{\gamma}^R) - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = 0} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R \cdot \underline{k}_2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}_3}^R \\ & \equiv -\nu \sum_{|\underline{k}| \leq R} k^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 + (\underline{\varphi} \cdot \underline{\gamma}^R) - \frac{i}{2} \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = 0} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R \cdot (\underline{k}_2 + \underline{k}_3) \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}_3}^R \equiv \\ & \equiv -\nu \sum_{|\underline{k}| \leq R} k^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 + (\underline{\varphi} \cdot \underline{\gamma}^R) \end{aligned} \quad (13.14)$$

avendo usato, nel secondo passaggio, la simmetria fra gli indici di somma \underline{k}_2 e \underline{k}_3 e, nel terzo passaggio, la proprietà che $\underline{k}_2 + \underline{k}_3$ è parallelo a \underline{k}_1 mentre $\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R$ è, invece, ortogonale a \underline{k}_1 .

Ne consegue che il membro di destra è ≤ 0 se $\sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 > E_0 L^{-d}$ e quindi vale la (13.12). Inoltre integrando (13.14):

$$13.14 \quad \frac{1}{2} (\|\underline{\gamma}^R(t)\|_2^2 - \|\underline{\gamma}^R(0)\|_2^2) \leq -\nu \int_0^t \sum_{|\underline{k}| \leq R} k^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 d\tau + \int_0^t \|\underline{\varphi}\|_2 \|\underline{\gamma}^R\|_2 d\tau \quad (13.15)$$

che implica:

$$13.15 \quad \int_0^t \sum_{|\underline{k}| \leq R} k^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 d\tau \leq \frac{1}{2} L^{-d} E_0 \nu^{-1} + t \nu^{-1} \|\underline{\varphi}\|_2 \sqrt{E_0 L^{-d}} \quad (13.16)$$

*

mbe

Come corollario, sempre supponendo che $\underline{u}^0 \in C^\infty(\Omega)$ otteniamo:

II. Corollario: Considerando l'equazione regolarizzata (13.11) si ha:

(i) Le funzioni $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R(t)$ sono limitate da $\sqrt{E_0 L^{-d}}$ e hanno la derivata prima rispetto a t che può essere stimata dalla quantità $\nu k^2 \sqrt{E_0 L^{-d}} + |\underline{k}| E_0 L^{-d} + \|\underline{\varphi}\|_2$. Dunque esiste una successione $R_j \rightarrow \infty$ tale che i limiti $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{R_j}(t) \rightarrow \underline{\gamma}_{\underline{k}}^\infty(t)$ esistono, per ogni \underline{k} , uniformemente in ogni intervallo limitato di $t \geq 0$. Chiameremo ogni tale $\underline{\gamma}^\infty(t)$ un limite debole per $R \rightarrow \infty$ di $\underline{\gamma}^R(t)$.

(ii) Ogni limite debole $\underline{\gamma}^\infty$ verifica:

$$\begin{aligned} \|\underline{\gamma}^\infty\|_2 &\leq \sqrt{E_0 L^{-d}} \quad \text{for all } t \geq 0 \\ 13.16 \quad \int_0^T d\tau \sum_{\underline{k}} k^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\infty(\tau)|^2 &\leq \frac{1}{2} E_0 L^{-d} \nu^{-1} + T \nu^{-1} \sqrt{E_0 L^{-d}} \|\underline{\varphi}\|_2 \end{aligned} \quad (13.17)$$

e verifica la (13.9) e, pertanto, sarà una soluzione debole.

dim. La limitatezza delle $\dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}}(t)$ segue immediatamente dalla (13.11) e dalla osservazione successiva ad essa; le proprietà (i) e (ii) seguono. La (iii) è un po' più delicata; riscrivendo ora la (13.11) per $|\underline{k}| \leq R$ come:

$$\begin{aligned} 13.17 \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}}^R(t) &= e^{-\nu \underline{k}^2 t} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 + \\ &+ \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \left[\varphi_{\underline{k}}(\tau) - i \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k} \\ |\underline{k}_i| \leq R}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R(\tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (13.18)$$

si tratta di passare al limite sotto il segno di integrale in (13.18). Dato che la prima stima in (13.17) garantisce la convergenza della serie ottenuta eseguendo il limite termine a termine, il passaggio al limite voluto sarà possibile se riusciremo a mostrare che la serie in (13.18) è uniformemente convergente per $R \rightarrow \infty$ (ossia il resto di una sua somma parziale di ordine N tende a zero uniformemente in R per $N \rightarrow \infty$).

Fissato $N > 0$ e ricordando la (13.8) e l'osservazione in (13.13) notiamo che se $|\underline{k}_1|$ o $|\underline{k}_2|$ sono $\geq N/2$ allora $|\underline{k}_1| \geq N/2$ e $|\underline{k}_2| \geq k_0 \equiv 2\pi L^{-1}$ o viceversa, quindi:

$$\begin{aligned} 13.18 \quad \int_0^t \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k} \\ |\underline{k}_1| + |\underline{k}_2| > N}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R(\tau) \cdot \underline{k}_2| |\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R(\tau)| &\leq \int_0^t |\underline{k}| \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k} \\ |\underline{k}_1| + |\underline{k}_2| \geq N}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R(\tau)| |\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R(\tau)| \leq \\ &\leq \frac{2|\underline{k}|}{N k_0} \int_0^t \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} |\underline{k}_1| |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R(\tau)| |\underline{k}_2| |\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R(\tau)| \leq \frac{2|\underline{k}|}{N k_0} \int_0^t \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R(\tau)|^2 \leq \\ &\leq \frac{2|\underline{k}|}{N k_0} \left(\frac{E_0 L^{-d}}{2\nu} + \frac{t}{\nu} \|\underline{\varphi}\|_2 \sqrt{E_0 L^{-d}} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (13.19)$$

ove gli integrali sono rispetto a $d\tau$ e si deve intendere $\underline{\gamma}_{\underline{k}_i}^R \equiv \underline{0}$ se $|\underline{k}_i| \geq R$ ovvero se $|\underline{k}_i| = 0$; nel primo passaggio della seconda riga si è moltiplicato e diviso per $|\underline{k}_1| |\underline{k}_2|$ e si è minorato il denominatore $|\underline{k}_1|^{-1} |\underline{k}_2|^{-1}$ con $\frac{1}{2} N k_0$; e, infine, \underline{k}_2 , nella prima disuguaglianza è sostituita da \underline{k} in base alla (13.8) ottenendo (iii). La proprietà (iv), evidente per $\underline{\gamma}^R(t)$, si ottiene allo stesso modo. dimostrazione.

*

mbe

Le (13.9) hanno dunque una soluzione debole, verificante le (13.17) e (13.10) e quindi, quasi ovunque in t , la (13.6), e dunque le equazioni di

NS hanno una soluzione debole, indipendentemente dalla dimensione $d \geq 2$ dello spazio in cui si muove il fluido, per qualunque dato iniziale $\underline{u} \in L_2(\Omega)$, (con $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ nel senso delle distribuzioni, ossia $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 \cdot \underline{k} = 0$). Questa soluzione è autoconsistente nel senso (13.10).

Osservazioni: (1) Le equazioni (13.9) hanno dunque una soluzione debole verificante (13.17) e (13.10): quindi, quasi ovunque in t , anche la prima delle (13.6). In conseguenza si può dire che le equazioni ammettano, indipendentemente dalla dimensione $d \geq 2$ dello spazio in cui il fluido si muove, per tutti i dati iniziali $\underline{u}^0 \in C^\infty(\Omega)$ (con $\underline{\partial} \cdot \underline{u}^0 = 0$). Tale evoluzione è autoconsistente nel senso della (13.10).

(2) (caso non regolare): Tuttavia la stessa dimostrazione varrebbe se si supponesse solo che $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$ (con $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ nel senso delle distribuzioni, i.e. $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 \cdot \underline{k} = 0$). Le soluzioni discusse nel corollario hanno vorticità totale finita $S(t) = \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)|^2$ (e così ogni momento di ordine superiore) per quasi tutti i tempi t : per la (13.17) non dobbiamo neppure supporre che $\underline{u}^0 \in W_1(\Omega)$ perché (3.12) pone una stima sull' integrale del quadrato della norma in $W_1(\Omega)$ della soluzione, stima che dipende solo dalla norma L_2 di \underline{u}^0 . Così le equazioni NS ammettono, in dimensione $d = 2, 3$, una soluzione debole per tutti i dati iniziali in $L_2(\Omega)$ e tale soluzione ha vorticità finita a quasi tutti i tempi.

Le soluzioni discusse in precedente corollario II potrebbero non essere uniche e potrebbe essere possibile, seguendo altri metodi, mostrare l' esistenza di altre soluzioni deboli. È pertanto conveniente assegnare loro un nome che le distingua da soluzioni deboli ottenute (in seguito) per altra via e che potrebbero essere differenti. Quindi poniamo la seguente definizione:

2 Definizione:: Una soluzione debole ottenuta attraverso i limiti in (i) del corollario II con dati iniziali $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$, ossia dalle soluzioni delle equazioni (13.11), regolarizzate con un "taglio ultravioletto", sarà chiamata una "soluzione C-debole" delle equazioni di NS.

Vedremo che ci potrebbero essere soluzioni deboli diverse da queste almeno se $d > 2$, c.f.r. below and §16.

Le (13.9) hanno altre conseguenze interessanti. La più notevole è il teorema di autoregolarizzazione valido per tutte le soluzioni deboli (quindi in particolare per le soluzioni C-deboli della definizione 2:

III. Proposizione: Sia $\underline{u}(t)$ una soluzione debole con dato iniziale $\underline{u}^0 \in C^\infty(\Omega)$. Dato $T > 0$ se, per $\alpha \geq 0$, esiste una costante $C_\alpha > 0$ tale che per ogni $0 \leq t \leq T$ si abbia $\sup_{\underline{k}} |\underline{k}|^\alpha |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| \leq C_\alpha$ e se $\alpha > d - 1$, allora $C_\beta < \infty$ per tutti i valori di $\beta > 0$: quindi $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$.

Osservazione: Ossia $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ è la trasformata di Fourier di una soluzione di classe C^∞ dell' equazione di NS se è la trasformata di Fourier di un soluzione abbastanza regolare. Si noti che se $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$ è una soluzione debole considerata nel corollario II allora \underline{u} è anche C^∞ in t perché le

derivate temporali possono essere espresse in termini delle derivate in \underline{x} semplicemente differenziando un numero sufficiente di volte le equazioni verificate da $\underline{\gamma}_k$ o \underline{u} (*i.e.* le equazioni NS).

dim: Data la (13.9), basta studiare la stima del termine non lineare:

$$\begin{aligned}
 |N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})| &\leq \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}| |\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}| |\underline{k}| \leq C_\alpha^2 |\underline{k}| \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \frac{1}{|\underline{k}_1|^\alpha |\underline{k}_2|^\alpha} \leq \\
 &\leq \begin{cases} \infty & \alpha \leq d/2 \\ |\underline{k}| C_\alpha^2 B_\alpha |\underline{k}|^{-(2\alpha-d)} & d/2 < \alpha < d \\ |\underline{k}| C_\alpha^2 B_\alpha |\underline{k}|^{-\alpha} \log |\underline{k}| & \alpha = d \\ |\underline{k}| C_\alpha^2 B_\alpha |\underline{k}|^{-\alpha} & \alpha > d \end{cases} \quad (13.20)
 \end{aligned}$$

ove tutti i vettori $\underline{k}, \underline{k}_i$ sono diversi da $\underline{0}$.

Poiché $\int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 \tau} d\tau \leq 1/\nu \underline{k}^2$ allora, se $\alpha > d/2$ e se teniamo conto della (13.8), troviamo una stima di $\int_0^t N_{\underline{k}}(\underline{\gamma}(\tau)) d\tau$ data da:

$$\left| \int_0^t d\tau \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} e^{-\underline{k}^2 \nu (t-\tau)} \right| \leq \frac{C_\alpha^2 B_\alpha}{\nu |\underline{k}|} \begin{cases} |\underline{k}|^{-(2\alpha-d)} & \alpha < d \\ |\underline{k}|^{-\alpha} \log |\underline{k}| & \alpha = d \\ |\underline{k}|^{-\alpha} & \alpha > d \end{cases} \quad (13.21)$$

Supponendo $\underline{\gamma}^0 \in C^\infty(\Omega)$, quindi $\sup_{\underline{k}} |\underline{k}|^\beta |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| \stackrel{def}{=} C_\beta^0 < \infty$ per tutti i $\beta \geq 0$, e supponendo $|\underline{k}|^\alpha |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| = C_\alpha < \infty$, per qualche $\alpha > d-1$ allora posto $\eta = \min(\alpha - d + 1, 1) > 0$ abbiamo mostrato, per la (13.21), che esiste una costante $C'_{\alpha+\eta}$ tale che

$$|\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| \leq \frac{C_{\alpha+\eta}^0}{|\underline{k}|^{\alpha+\eta}} + \frac{C'_{\alpha+\eta}}{|\underline{k}|^{\alpha+\eta}} \quad (13.22)$$

ove il primo termine deriva dalla stima del primo termine in (13.9) con $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| e^{-\underline{k}^2 \nu t} \leq C_{\alpha+\eta}^0 |\underline{k}|^{-\alpha-\eta}$: quindi l'asserto del teorema segue (ripetendo indefinitamente l'argomento e "guadagnando" ogni volta una potenza di $|\underline{k}|$).

*

mbe

Osservazioni:

(1) È importante notare che se C_{α_0} è una costante tale che $|\underline{k}|^{\alpha_0} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}| \leq C_{\alpha_0}$ e $\alpha_0 > d-1$, allora non solo segue che $|\underline{k}|^\alpha |\underline{\gamma}_{\underline{k}}| \leq C_\alpha$ per tutti gli $\alpha > \alpha_0$ e un opportuna C_α , ma anche che la costante C_α può essere stimata *esplicitamente* in termini di C_{α_0} e delle quantità C_α^0 relative al dato iniziale (ossia $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| |\underline{k}|^\alpha \leq C_\alpha^0$) da una funzione di C_{α_0}, C_α^0 che chiameremo $B_\alpha(\alpha_0, C_{\alpha_0}, C_\alpha^0)$. Si noti che una esplicita stima per B_α può essere facilmente dedotta da (13.20): ma non ne avremo necessità ora (*c.f.r.* la dimostrazione della proposizione IX).

(2) Inoltre le stime sopra descritte valgono anche per le equazioni regolarizzate con parametro $R < \infty$: cioè $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R| |\underline{k}|^{\alpha_0} \leq C_{\alpha_0}$ e $\alpha_0 > d-1$, implicano $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R(t)| |\underline{k}|^\alpha \leq B_\alpha(\alpha_0, C_{\alpha_0}, C_\alpha^0)$ ove la funzione B è la stessa del caso non regolarizzato. Vedremo che queste ultime osservazioni ci consentiranno di

stimare, nel caso $d = 2$, la differenza fra $\underline{\gamma}$ e $\underline{\gamma}^R$.

(3) Nella dimostrazione l'ipotesi che $\underline{u}^0 \in C^\infty$ è solo stata usata per assicurare che $\sup |\underline{k}|^\alpha |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| \stackrel{def}{=} C_\alpha^0 < \infty$ per tutti gli $\alpha \geq 0$. In realtà abbiamo dimostrato molto di più. Invero il primo termine in (13.9) può esseree alternativamente stimato piuttosto che da $C_{\alpha+\eta}^0 |\underline{k}|^{-\alpha-\eta}$ (che potrebbe essere ∞ se si suppone solo che $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$) dalla quantità (certamente finita) $\sqrt{L^{-d}E_0}e^{-\nu \underline{k}^2 t}$ che è una ottima stima per $t > 0$ e, sotto la sola ipotesi che $\underline{u}^0 \in L_2$ e (la non banale ipotesi) $|\underline{k}|^\alpha |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| < C_\alpha$ con $\alpha > d-1$, implica

$$\begin{aligned}
 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| &\leq \sqrt{L^{-d}E_0}e^{-\nu \underline{k}^2 t} + \frac{C'_{\alpha+\eta}}{|\underline{k}|^{\alpha+\eta}} \\
 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| &\leq \frac{k_0^{\alpha+\eta} \sqrt{L^{-d}E_0} \max_{x \geq 0} x^{\alpha+\eta} e^{-x^2}}{(k_0^2 \nu t)^{(\alpha+\eta)/2} |\underline{k}|^{\alpha+\eta}} + \frac{C'_{\alpha+\eta}}{|\underline{k}|^{\alpha+\eta}} \leq \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{(k_0^2 \nu t)^{(\alpha+\eta)/2}}\right) \frac{C''_{\alpha+\eta}}{|\underline{k}|^{\alpha+\eta}} \\
 C''_{\alpha+\eta} &= C'_{\alpha+\eta} + k_0^{\alpha+\eta} \sqrt{L^{-d}E_0} \max_{x \geq 0} x^{\alpha+\eta} e^{-x^2}
 \end{aligned} \tag{13.23}$$

13.20a

Ricorsivamente questo, naturalmente, significa che la soluzione sarà C^∞ per ogni $t > 0$ *anche se* il dato iniziale \underline{u}^0 è solo L_2 e *se* per qualche $\alpha > d-1$ si ha l'ulteriore (in generale assai non banale, se $d > 2$, si veda il seguito) informazione che $\sup_{\underline{k}} |\underline{k}|^\alpha |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| < \infty$. Le quantità $\sup_{\underline{k}} |\underline{k}|^\beta |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)|$ sono $< \infty$ per tutti i $\beta \geq 0$ e possono essere stimate da una quantità che dipende da t e che diverge per $t \rightarrow 0$ come una potenza inversa, facilmente calcolabile, di t (c.f.r. (13.23)).

Questi teoremi di regolarizzazione sono molto utili nel caso $d = 2$: in tal caso infatti implicano il seguente teorema:

IV. Proposizione: Se $d = 2$ le soluzioni C-deboli³ con dato iniziale $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$ sono campi di velocità di classe C^∞ in \underline{x} e t , per $t > 0$, e addirittura per $t \geq 0$ qualora si supponga che \underline{u}^0 sia esso stesso di classe C^∞ . Inoltre se $\underline{u}^0 \in W_1(\Omega)$ (cioè tale che $\underline{\partial} \underline{u} \in L_2(\Omega)$, c.f.r. [20] del §10) e se si

pone: $F_{-1} = (\sum_{\underline{k}} |\varphi_{\underline{k}}|^2 |\underline{k}|^2)^{1/2}$ e $S = \sum_{|\underline{k}| < R} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2$, si ha per $R \leq \infty$

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{|\underline{k}| \leq R} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R(t)|^2 \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq \min \left[(F_{-1} \nu^{-1} k_0^{-2}), \left(\sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(0)|^2 \right)^{1/2} \right] \stackrel{def}{=} \sqrt{S_0}
 \end{aligned} \tag{13.24}$$

13.25

ove k_0 è il minimo di $|\underline{k}|$ (cioè $k_0 = 2\pi L^{-1}$).

³ Si veda la definizione 2 e le osservazioni precedenti la proposizione III.

dim: Si supponga dapprima che $\underline{u}^0 \in W_1(\Omega)$ così che $S_0 < \infty$. Si noti che:

$$13.21 \quad \sum_{|\underline{k}_3| \leq R} N_{\underline{k}_3}(\underline{\gamma}^R) \cdot \overline{\underline{\gamma}}_{\underline{k}_3}^R |\underline{k}_3|^2 \equiv 0, \quad \text{se } d = 2 \quad (13.25)$$

che si dimostra osservando che in questo caso:

$$13.22 \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}} = \gamma_{\underline{k}} \frac{\underline{k}^\perp}{|\underline{k}|}, \quad \gamma_{\underline{k}} = -\overline{\gamma}_{-\underline{k}}, \quad \text{se } \underline{k}^\perp = (k_2, -k_1), \quad \underline{k} = (k_1, k_2) \quad (13.26)$$

con $\gamma_{\underline{k}}$ scalare e dunque:

$$13.23 \quad \underline{k}_3^2 (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) (\underline{\gamma}_{\underline{k}_2} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}_3}) = \frac{(\underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2) (\underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_3)}{|\underline{k}_1| |\underline{k}_2| |\underline{k}_3|} \underline{k}_3^2 \gamma_{\underline{k}_1} \gamma_{\underline{k}_2} \gamma_{\underline{k}_3} \quad (13.27)$$

e sommando sulle permutazioni di $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$ e usando $\underline{k}_1^\perp \cdot \underline{k}_2 = \underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_3 = \underline{k}_3^\perp \cdot \underline{k}_1$ si trova zero (si vedano anche le (9.27) che implicano le (9.34) per un modo rapido e interessante di pervenire a questa conclusione). Dunque lo stesso argomento usato in occasione della precedente stima a priori conduce a:

$$13.24 \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{|\underline{k}| \leq R} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 = -\nu \sum_{|\underline{k}| \leq R} |\underline{k}|^4 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|^2 + \sum_{\underline{k}} \underline{k}^2 \varphi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^R \quad (13.28)$$

Quindi si trova $\dot{S}/2 \leq -\nu k_0^2 S + F_{-1} \sqrt{S}$: cioè $\dot{S}/2 \leq 0$ se $S > S_0$ con S_0 definito in (13.24) e quindi la disuguaglianza (13.24) è dimostrata.

Quindi le soluzioni deboli debbono verificare:

$$13.26 \quad S(t) = \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)|^2 \leq S_0, \quad \forall t \geq 0 \quad (13.29)$$

il che implica, per la disuguaglianza di Schwartz:

$$13.27 \quad \begin{aligned} |N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})| &\leq |\underline{k}| \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}| |\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}| \leq \\ &\leq |\underline{k}| \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \frac{|\underline{k}_1| |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}| |\underline{k}_2| |\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}|}{|\underline{k}_1| |\underline{k}_2|} \leq \frac{2S_0}{k_0} \end{aligned} \quad (13.30)$$

perchè se $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}$ allora almeno uno fra \underline{k}_1 e \underline{k}_2 ha modulo $\geq |\underline{k}|/2$ (ed entrambi hanno modulo $\geq k_0$, essendo non nulli) e pertanto si può dire che: $|\underline{k}_1| |\underline{k}_2| \geq k_0 |\underline{k}|/2$.

Quindi, per le (13.30), (13.9), e se $|\underline{\varphi}_{\underline{k}}| \leq G_\alpha |\underline{k}|^{-\alpha}$, si deduce:

$$13.28 \quad |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| \leq e^{-\nu \underline{k}^2 t} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(0)| + \left(\frac{G_0}{\nu \underline{k}^2} + \frac{2S_0}{\nu \underline{k}^2 k_0} \right) (1 - e^{-\nu \underline{k}^2 t}) \quad (13.31)$$

e anzi si vede anche $|\underline{\gamma}^\infty(t) - e^{-\underline{k}^2 \nu t} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| \leq (G_0 \nu^{-1} + 2S_0/k_0)/|\underline{k}|^2$, che sarà anche utile.

Allora esiste una costante $C_2(t)$ tale che $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| \leq C_2(t)/|\underline{k}^2|$ con $C_2(t) = \text{const}(\nu t)^{-1}$ e possiamo applicare il teorema di autoregolarizzazione per $\alpha > d - 1$ (poiché $\alpha = 2$ e $d - 1 = 1$). E possiamo applicare il teorema di autoregolarizzazione per $\alpha > d - 1$ (visto che $\alpha = 2$ e $d - 1 = 1$) all'evoluzione considerata per $t \geq t_0 > 0$ (usando la proprietà di autoconsistenza del corollario II).

Pertanto la soluzione debole (che, nella seguente proposizione VI, mostreremo essere unica) $\underline{u}(\underline{x}, t)$ è C^∞ in \underline{x} per ogni t , e ogni sua derivata è stimata uniformemente nel tempo (in termini delle costanti $C_\alpha(t)$ che però potrebbero divergere per $t \rightarrow 0$ ma che restano finite se $\underline{u}^0 \in C^\infty(\Omega)$). Differenziando rispetto a t ambi i membri delle (13.9) deduciamo che \underline{u} è di classe C^∞ in \underline{x}, t , per $t > 0$.

Il caso in cui $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$ (e quindi S_0 potrebbe essere ∞) si riduce facilmente al caso trattato, perché la stima (13.17) resta valida anche se il dato iniziale è solo L_2 e implica che $\underline{u}(t) \in W_1(\Omega)$ per quasi tutti i $t > 0$: allora basta prendere come dato iniziale il valore della soluzione debole $\underline{u}(t)$ a un tale istante e usare la proprietà di autoconsistenza del corollario II, *c.f.r.* (13.10).

*

mbe

Osservazioni:

(1) Si noti che la deduzione appena discussa mostra che (13.31) vale anche per $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R(t)$ se $R < \infty$, fatto che sarà utile nel seguito, *c.f.r.* proposizione VII.

(2) Si conclude, dalla proprietà di autoregolarizzazione con $\alpha = 2$ e $d = 2$, che dati iniziali C^∞ evolvono in soluzioni C^∞ per $t \geq 0$ e anzi si conclude anche che dati iniziali in L_2 evolvono in soluzioni che per $t > 0$ sono in C^∞ . Quindi l' analogia con l' equazione del calore e con l' equazione di Stokes (*c.f.r.* §9, (C)) è piuttosto forte se $d = 2$.⁴

Un altro teorema di autoregolarizzazione, per $d \geq 2$ e *valido per tutte le soluzioni deboli*, emerge se si pondera la dimostrazione precedente ed è il seguente:

V. Proposizione: Si supponga che $t \rightarrow \underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)$ verifichi per $t \in [0, T]$ le (13.9) o (13.11) con $d \leq 3$ e con dato iniziale \underline{u}^0 di classe C^∞ . Inoltre, dato $T > 0$, si supponga che $\sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)|^2 \leq S_1$ per $0 \leq t \leq T$. Allora per ogni $\alpha \geq 0$ esiste C_α per cui si ha: $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| \leq C_\alpha |\underline{k}|^{-\alpha}$: ossia la \underline{u} è di classe C^∞ in \underline{x} e quindi è C^∞ anche in $t \geq 0$. Si veda il seguente commento (4) per il caso in cui $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$.

dim: ovviamente, per l' ipotesi, il risultato vale per $\alpha \leq 1$ e $C_1 \equiv S_1^{1/2}$. Dall' espressione del termine inerziale $N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})$ in (13.9) si evince (sostituendo,

⁴ Anche se non si può ora affermare che dati in L_2 divengono analitici per $t > 0$, ma solo che divengono C^∞ , si veda tuttavia le proposizioni VIII e IX seguenti.

come spesso già fatto, \underline{k}_2 con $-\underline{k}$, prima di maggiorare il termine di sinistra) la validità della (13.30):

$$13.29 \quad |N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})| \leq \frac{2}{k_0} S_1 \quad (13.32)$$

e così l'integrale in (13.21) è stimato da $S_1/k_0 \nu \underline{k}^2$ e ne segue, dalle (13.9) o (13.11), che esiste C'_2 per cui $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}| \leq e^{-\nu \underline{k}^2 t} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| + C'_2 |\underline{k}|^{-2}$.

Poiché $\underline{u}^0 \in C^\infty$ allora $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}| \leq C_2 |\underline{k}|^{-2}$ per un C_2 conveniente. Ma allora di nuovo:

$$13.30 \quad \begin{aligned} |N_{\underline{k}}(\underline{\gamma})| &\leq \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} |\gamma_{\underline{k}_1}| |\underline{k}_2| |\gamma_{\underline{k}_2}| \leq \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \frac{|\underline{k}_1| |\gamma_{\underline{k}_1}| |\underline{k}_2|^2 |\gamma_{\underline{k}_2}|}{|\underline{k}_1| |\underline{k}_2|} \leq \\ &\leq C_2 S_1^{1/2} \left(\sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \frac{1}{|\underline{k}_1|^2 |\underline{k}_2|^2} \right)^{1/2} \leq C_2 \sqrt{S_1} \frac{2^{1/4} B}{k_0^{1/4} |\underline{k}|^{1/4}} \end{aligned} \quad (13.33)$$

perchè l'ultima somma è stimata da $2^{1/4} (k_0 |\underline{k}|)^{-1/4}$ moltiplicato per la radice di $(\sum (|\underline{k}_1| |\underline{k}_2|)^{-(2-1/4)})$; e quest'ultima quantità è stimata a mezzo della disuguaglianza di Schwartz da $B = \sum_{\underline{k}} \frac{1}{|\underline{k}|^{4-1/2}}$; e quindi procedendo come prima si stima di nuovo l'integrale in (13.21) e si trova $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}| < C_{2+\frac{1}{4}} \sqrt{S_1} |\underline{k}|^{-(2+\frac{1}{4})}$. Ma $2 + \frac{1}{4} > d - 1$ se $d \leq 3$, e allora si applica il teorema generale di autoregolarizzazione precedente.

*

mbe

Osservazioni: Il risultato è particolarmente interessante se $d = 3$ ma è valido anche se $d = 2$.

(1) Pertanto ogni soluzione debole con vorticità totale limitata in ogni intervallo finito di tempo è di classe C^∞ ; i valori massimi delle derivate si stimano esplicitamente in termini dei dati iniziali e della stima sulla vorticità. Questo avviene, ad esempio, se $d = 2$. c.f.r. proposizione IV.

(2) la differenza fra il caso $d = 2$ e $d = 3$ è che se $d = 3$ non sappiamo controllare *a priori* la quantità $\sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)|^2$ ossia non sappiamo mostrare che esiste una quantità S_1 che la maggiora; mentre se $d = 2$ la conservazione della vorticità garantisce questa proprietà. Per $d = 2$ questo è il contenuto della proposizione IV.

(3) Si noti che il teorema è valido sia per (13.9) che per (13.11) *con le stesse stime*, indipendenti da R .

(4) (*Caso non regolare*): A ben vedere la dimostrazione precedente fornisce informazioni anche sui casi in cui \underline{u}^0 è solo in W_1 : in tali casi si può trovare infatti (sfruttando il fattore $e^{-\nu \underline{k}^2 t}$ che viene a moltiplicare $\underline{\gamma}^0$ rendendolo rapidamente decrescente in t per $t > 0$) che per ogni $\alpha \geq 0$ la dimostrazione della proposizione V implica che esiste $C_\alpha(t)$ per cui si ha: $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| \leq C_\alpha(t) |\underline{k}|^{-\alpha}$, e $C_\alpha(t)$ può essere scelta continua per $T \geq t > 0$, ossia escludendo $t = 0$. Quindi in $d = 2, 3$ le soluzioni deboli con vorticità

limitata sono C^∞ per $t > 0$.

L'analisi sopra descritta può essere modificata fino a dare il seguente risultato di analiticità)

VI. Proposizione: Se $d \geq 2$ e se $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^1$ e $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^2$ sono due soluzioni (deboli) a decrescenza rapida per $|\underline{k}| \rightarrow \infty$, nel senso che entrambe sono stimate in un dato intervallo $0 \leq t \leq T$ da $C_\alpha |\underline{k}|^{-\alpha}$ per ogni \underline{k} e per un $\alpha > d - 1$, allora le due soluzioni coincidono se hanno lo stesso dato iniziale $\underline{u}^0 \in C^\infty(\Omega)$.

dim: Per il teorema di autoregolarizzazione allora $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^i| \leq C_\alpha |\underline{k}|^{-\alpha}$ per ogni $\alpha > 0$ (e con C_α opportuno).

La loro differenza verificherà, se si definiscono $\Delta \equiv \|\underline{\gamma}^1 - \underline{\gamma}^2\|_2^2$ e $\Delta_1 \equiv \|(\underline{\gamma}^1 - \underline{\gamma}^2) \cdot \underline{k}\|_2^2$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \Delta &\leq -\nu \Delta_1 + \sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^2| \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^1 \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^2 \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^2| \\
 &\leq -\nu \Delta_1 + \sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^2| \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} |(\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^2) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^1| + \\
 &\quad + \sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^2| \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} |(\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^2 \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^2))|
 \end{aligned} \tag{13.34}$$

e se si sostituisce \underline{k}_2 con \underline{k} e si usa la proprietà di regolarità $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^i| \leq C_\alpha |\underline{k}|^{-\alpha}$ con, ad esempio, $\alpha = 4$ (si ricordi che nelle ipotesi attuali questa disuguaglianza è vera per ogni $\alpha > 0$) troviamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\dot{\Delta} &\leq -\nu\Delta_1 + \\
&+ 2 \sum_{\underline{k}} \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (|\underline{k}| |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^2|) (|\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^2|) \frac{C_4}{|\underline{k}_2|^4} \leq \\
13.32 \quad &\leq -\nu\Delta_1 + \\
&+ 2 \sum_{\underline{k}} \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (|\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^2|^2 \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\varepsilon} |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^2|^2) \frac{C_4}{\underline{k}_2^4}
\end{aligned} \tag{13.35}$$

avendo usato la disuguaglianza $|ab| \leq a^2/(2\varepsilon) + \varepsilon b^2/2$ (valida per ogni $\varepsilon > 0$) e $|\underline{k}| \geq k_0$. E quindi, se $B = \sum_{\underline{k}} C_4 |\underline{k}|^{-4}$:

$$13.33 \quad \frac{1}{2}\dot{\Delta}(t) \leq -\nu\Delta_1 + \varepsilon B\Delta_1 + B\varepsilon^{-1}\Delta \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0 \tag{13.36}$$

e, scegliendo ε in modo che $\varepsilon B = \nu$, deduciamo:

$$13.34 \quad \dot{\Delta} \leq 2B^2\nu^{-1}\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta(t) \leq \Delta(0)e^{2B^2\nu^{-1}t} \tag{13.37}$$

pertanto $\Delta(0) = 0$ implica $\Delta(t) \equiv 0$, for $t > 0$.

*

mbe

Osservazioni: Il teorema può anche essere dimostrato direttamente notando che $\underline{u}^i(t)$ devono essere C^∞ per la proposizione V; quindi devono coincidere per un teorema di unicità che si ottiene come nel caso dell' equazione di Eulero, *c.f.r.* [5] del §12. La dimostrazione presentata è interessante perchè conduce alle seguenti osservazioni e suggerisce la dimostrazione della proposizione VII seguente.

(1) *Caso non regolare*: Se si suppone che le due soluzioni deboli corrispondono a un dato iniziale $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$ solamente e *inoltre* che $\lim_{t \rightarrow 0} \|\underline{u}^i(t) - \underline{u}^0\|_2 = 0$, $i = 1, 2$ allora si conclude che le due soluzioni deboli coincidono. Invero si potrà prendere come istante iniziale un tempo $t_0 > 0$ in cui le soluzioni sono divenute C^∞ (per la proposizione III): naturalmente $\Delta(t_0)$ potrebbe essere $\neq 0$ e per dimostrare l' unicità occorrerà ancora verificare che $\Delta(t_0) \rightarrow 0$ per $t_0 \rightarrow 0$. Questo sarebbe implicato da $\lim_{t \rightarrow 0} \|\underline{u}^i(t) - \underline{u}^0\|_2 = 0$, $i = 1, 2$.

Tuttavia se $\underline{u}(t)$ è una soluzione debole con dato iniziale in L_2 non è noto se in generale $\underline{u}(t)$ tende a \underline{u}^0 in L_2 per $t \rightarrow 0$.

Se invece $\underline{u}^0 \in W_1(\Omega)$ e $d = 2$ dalla relazione $|\underline{\gamma}(t) - e^{-\underline{k}^2\nu t} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| \leq (G_0 + 2S_0/k_0)/|\underline{k}|^2$, *c.f.r.* il commento alla (13.31), si deduce che $\lim_{t \rightarrow 0} \|\underline{u}(t) - \underline{u}^0\|_2 = 0$. Quindi se $d = 2$ si ha unicità della soluzione debole con dato in $W_1(\Omega)$. Il solo caso in cui soluzioni deboli in $d = 2$ potrebbero essere non uniche é che $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$ ma $\underline{u}^0 \notin W^1(\Omega)$: il problema é a mia conoscenza non risolto in questo caso.

(2) Lo stesso argomento usato nella dimostrazione precedente ci consente di dare una stima esplicita dell' errore che si commette troncando l' equazione di NS. Vale invero il seguente *teorema di approssimabilità spettrale*:

VII. *Proposizione:* Sia $d = 2$ e si supponga che \underline{u}^0 sia di classe C^∞ ; detto $\Delta_R(t)$ il quadrato della norma L_2 della differenza fra la soluzione delle equazioni regolarizzate con parametro di regolarizzazione R (cfr. (13.11)) e la soluzione di classe C^∞ di cui alla proposizione precedente, si ha che $\Delta_R(t)$ può essere stimato per ogni intero $q > 0$ da:

$$\Delta_R(t) \leq V_q e^{Mt} R^{-q} \quad (13.38)$$

ove V_q, M sono opportune costanti calcolabili in termini del dato iniziale ma non dipendono dal tempo t al quale si considerano le soluzioni.

Osservazione: La (13.38) mostra che il metodo dei troncamenti, o "metodo spettrale", fornisce un *vero algoritmo costruttivo* per la soluzione delle equazioni di NS *bidimensionali*. Si noti che la stima dell'errore è esponenzialmente crescente con il tempo t : è questa una proprietà che in generale non ci si può aspettare di migliorare, perchè nelle equazioni differenziali dati che inizialmente differiscono di poco vanno differendo sempre più al crescere del tempo divergendo esponenzialmente, anche se evolvono secondo la stessa equazione differenziale (nel nostro caso, in più, l'equazione troncata che descrive $\underline{\gamma}^R$ è anche un pò diversa da quella non troncata). Questa divergenza esponenziale è ben stabilita sul piano fenomenologico e sperimentale nel caso delle equazioni di NS a numero di Reynolds anche solo moderatamente alto, c.f.r. i capitoli 3,4 seguenti.

dim: Per semplicità supponiamo che non ci sia una forza esterna: $\underline{g} = \underline{0}$. La (13.31) vale, come già osservato, anche per $\underline{\gamma}^R$. Si chiami allora C_2 la costante che maggiora $|\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}|$, e la (13.31) mostra che una scelta possibile è:

$$C_2 = C_2^0 + \nu^{-1} G_0 + 2S_0 \nu^{-1} k_0^{-1} \quad (13.39)$$

ove C_p^0 e G_p sono stime superiori di $|\underline{k}|^p |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0|$ e di $|\underline{k}|^p |\underline{g}_{\underline{k}}|$, rispettivamente, per ogni \underline{k} .

Sia $C_p = B_p(C_2, C_p^0, G_p)$ la costante, indipendente da t , tale che:

$$|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R|, |\underline{\gamma}_{\underline{k}}| < C_p |\underline{k}|^{-p} \quad (13.40)$$

che esiste per il teorema di autoregolarizzazione ed è $< \infty$ per tutti i $p \geq 0$; e consideriamo $p \geq 4$.

Allora l'equazione verificata da $\underline{\gamma} - \underline{\gamma}^R$ è, per $|\underline{k}| \leq R$:

$$\dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}} - \dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}}^R = -\nu \underline{k}^2 (\underline{\gamma}_{\underline{k}} - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^R) - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} - \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R) \quad (13.41)$$

in cui $\underline{\gamma}_{\underline{k}_i}^R \equiv \underline{0}$ se $|\underline{k}_i| > R$: ovviamente anche per valori sì grandi di $|\underline{k}_i|$ la $\underline{\gamma}_{\underline{k}_i}$ è in generale non nulla.

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\underline{\gamma}_{\underline{k}} - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^R$ e sommando su \underline{k} , si trova, con le notazioni e il procedimento delle (13.36), (13.37):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Delta_R &\leq -\nu \Delta_R^1 + \varepsilon B \Delta_R^1 + \\
 &\quad + B \varepsilon^{-1} \Delta_R + \sum_{\underline{k}} \frac{2C_p}{|\underline{k}|^p} \sum_{\substack{|\underline{k}_1| \circ |\underline{k}_2| > R \\ \underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}}} |\underline{k}| |\gamma_{\underline{k}_1}| |\gamma_{\underline{k}_2}| \leq \\
 &\leq B^2 \nu^{-1} \Delta_R + \frac{4C_p^3}{(2\pi L^{-1})^{p-1}} \left(\sum_{|\underline{k}_1| > R} \frac{1}{|\underline{k}_1|^p} \right) \left(\sum_{\underline{k}_2} \frac{1}{|\underline{k}_2|^p} \right) \leq \\
 &\leq B^2 \nu^{-1} \Delta_R + \frac{4C_p^3 K_p}{(2\pi L^{-1})^{p-1} R^{p-2}} \quad (13.42)
 \end{aligned}$$

ove $\Delta_R(t) = \sum_{\underline{k}} |\gamma_{\underline{k}} - \gamma_{\underline{k}}^R|^2$ e $\Delta_R^1 = \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\gamma_{\underline{k}} - \gamma_{\underline{k}}^R|^2$; e K_p stima la quantità $(\sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^{-p})^2$. Ossia:

$$\begin{aligned}
 \Delta_R(t) &\leq e^{2B^2 \nu^{-1} t} \Delta_R(0) + \int_0^t e^{2B^2 \nu^{-1} (t-\tau)} \frac{8C_p^3 K_p}{(2\pi L^{-1})^{p-1} R^{p-2}} d\tau \leq \\
 &\leq e^{2B^2 \nu^{-1} t} \Delta_R(0) + \frac{8C_p^3 K_p}{2(2\pi L^{-1})^{p-1} B^2 \nu^{-1}} \frac{1}{R^{p-2}} \quad (13.43)
 \end{aligned}$$

ricordando che $B \equiv C_4 \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^{-4}$ (cfr. (13.36)).

Ma $\Delta_R(0)$ è piccolo per R grande: infatti la $\Delta_R(0) \equiv \sum_{|\underline{k}| \geq R} |\gamma_{\underline{k}}(0)|^2$ è maggiorata da $C_r^{02} \sum_{|\underline{k}| \geq R} |\underline{k}|^{-2r}$, se $|\gamma_{\underline{k}}(0)| |\underline{k}|^r \leq C_r^0$ per tutte le scelte di $r \geq 0$; e quindi $\Delta_R(0) \leq C_r^{02} R^{-2r+2} B'_r$ per una B'_r opportuna e:

$$\Delta_R(t) \leq e^{2B^2 \nu^{-1} t} \left(\frac{B'_r}{R^{2r-2}} + \frac{B''_p}{R^{p-2}} \right) \quad (13.44)$$

con una B''_p opportuna. Questo dà, in particolare, una stima esplicita della differenza fra $\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)$ e $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^R(t)$ a \underline{k} fisso, $|\underline{k}| \leq R$ e la (13.38) segue scegliendo il parametro arbitrario r come $2r - 2 = p - 2$, ossia $r = p/2$.

*

mbe

Mostriamo ora che se $d = 2$ le soluzioni deboli con dati iniziali moderatamente regolari divengono analitiche a tempo positivo

Proposizione VIII. (Mattingly, Sinai): Se $d = 2$ la (unica) soluzione delle equazioni di NS con dato iniziale \underline{u}^0 e forza di volume \underline{g} tali che $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}(0)| < U |\underline{k}|^{-3}$, $|\underline{g}_{\underline{k}}| < F e^{-\kappa |\underline{k}|}$ with $U, F, \kappa > 0$, ànalitica per $t \in (0, T]$, con T arbitrariamente fissato.

dim.: Qui seguiamo e realizziamo nel nostro contesto l'idea proposta in [MS99]. Consideriamo le equaioni regolarizzate con taglio ultravioletto R ;

per le proposizioni III, IV e *psr tutti i tempi* si ha: $|\underline{\gamma}_k^R(t)| \leq \frac{C(t)}{|\underline{k}|^3}$ ove $C(t) > 0$ è una funzione monotona non decrescente, finita, dipendente da U ma non da R .

Quindi, scegliendo ε sufficientemente piccolo, per $i, j = 1, 2$ (i è l'indice di componente, j distingue la parte reale o immaginaria) si ottiene⁵

$$13.42 \quad |\underline{\gamma}_k^{(i,j)R}(t)| < 2 \cdot e^{-|\underline{k}|\varepsilon t} \frac{C(T)}{|\underline{k}|^3} \quad (13.45)$$

per $|\underline{k}| \leq K_0 \equiv 8\nu^{-1}2^3C(T)2B$ e $t \in [0, T]$, con $B = \sum_{|\underline{k}| \neq 0} |\underline{k}|^{-3}$. Questo significa che si può prendere $\varepsilon = (K_0T)^{-1} \log(U/2C(T))$.

Ma naturalmente la (13.45) vale *per tutti i* $|\underline{k}| \leq R$ se t è abbastanza piccolo.

Scegliamo, *solo per semplicità*, $f = \underline{0}$. Allora supponendo che esista un tempo $t < T$ in cui la (13.45) viene violata per qualche $\bar{k} > K_0$ e definiamo $\bar{t}_R, 0 < \bar{t}_R < T$ come il primo tempo in cui per $t = \bar{t}_R$ “per la prima volta” si ha $\underline{\gamma}_k^{(i,j)R}(\bar{t}) = \pm 2 \cdot e^{-|\underline{k}|\varepsilon \bar{t}} C(T) |\underline{k}|^{-3}$ per almeno un $\underline{k} = \bar{k}$ ($|\underline{k}| > K_0$) e $i, j = 1$ or 2 ; nel caso +, ad esempio, $\dot{\underline{\gamma}}_k^{(i,j)R}$ sarà stimato da:

$$13.43 \quad \begin{aligned} \dot{\underline{\gamma}}_k^{(i,j)R}(\bar{t}) &\leq -\nu |\underline{k}|^2 \underline{\gamma}_k^{(i,j)R} + |\underline{k}| \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^R| \cdot |\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^R| \leq \\ &\leq -2\nu |\underline{k}|^2 \cdot e^{-|\underline{k}|\varepsilon \bar{t}} \frac{C(T)}{|\underline{k}|^3} + e^{-|\underline{k}_1|\varepsilon \bar{t}} \cdot e^{-|\underline{k}_2|\varepsilon \bar{t}} \cdot \frac{C(T)}{|\underline{k}|^3} 2^3 C(T) \cdot B |\underline{k}|^4 \end{aligned} \quad (13.46)$$

perché se $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \bar{k}$ allora o $|\underline{k}_1| > |\bar{k}|/2$ oppure $|\underline{k}_2| > |\bar{k}|/2$.

Questa, essendo $|\bar{k}| \leq |\underline{k}_1| + |\underline{k}_2|$, sarà una quantità che per $|\bar{k}| > K_0$ è inferiore a $-\frac{1}{2} |\bar{k}| \nu |\underline{\gamma}_k^{(i,j)R}|$, perché K_0 è stato definito proprio perché questo fosse vero.

Quindi la derivata di $\underline{\gamma}_k^{(i,j)R}$ è inferiore alla rapidità di contrazione della frontiera della regione ove (13.45) is soddisfatta per tutti gli $|\underline{k}| < R$: pertanto per ogni R , $\bar{t}_R = T$. Dal momento che le soluzioni regolarizzate convergono per $R \rightarrow \infty$, e *per ogni* \underline{k} , alla soluzione delle equazioni di NS, la soluzione ora descritta verifica (13.45) *per tutti i* \underline{k} . Quindi è analitica.

*

mbe

Osservazione: (Caso non regolare) Quindi, se $d = 2$, le soluzioni deboli con dati $L_2(\Omega)$ divengono analitiche a tempi positivi perché per la proposizione IV divengono immediatamente C^∞ .

Naturalmente la grandezza ε della “striscia di analiticità” dipende dal valore prefissato per T e tende a 0 per $T \rightarrow \infty$: questa è una differenza rispetto alla natura regolarizzante dell'equazione del calore o di Stokes. Allora ci si può domandare se ci sia una proprietà più debole di regolarizzazione ■

⁵ La scelta del fattore 2 è arbitraria: una costante > 1 andrebbe ugualmente bene per lo scopo.

che sia uniforme in T e acquisita non appena il tempo è positivo, diciamo per $t > t_0 > 0$.

Un risultato (piuttosto debole) di regolarizzazione di questo tipo segue immediatamente dalle stime di autoregolizzazione, indipendentemente dalla proposizione VIII:

Proposizione IX: Sia $\underline{u}^0 \in L_2$, $d = 2$, e sia $\underline{u}(t)$ una soluzione C-debole corrispondente⁶ delle equazioni di NS. Esistono due funzioni $H(t), h(t)$ finite e non crescenti $t > 0$, divergenti per $t \rightarrow 0$, tali che

$$13.45 \quad |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| \leq H(t_0) \cdot e^{-(\log |\underline{k}|)^2 / h(t_0)}, \quad \text{per tutti i } t \geq t_0 > 0 \quad (13.47)$$

dim.: Invero la costante C_α nella proposizione III può essere stimata (per la (13.21)) come $C_{\alpha+1} < \alpha! B' + 2^\alpha B'' C_\alpha$ per alcune scelte delle costanti B', B'' and $\alpha > d$. Questo da immediatamente: $C_\alpha \leq \alpha! 2^{\alpha^2} D$ per qualche $D > 0$, e conseguentemente (come nella deduzione della (13.23)) abbiamo ottenuto la stima

$$13.46 \quad |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)| \leq H(t_0) \cdot e^{-(\log |\underline{k}|)^2 h(t_0)^{-1}}, \quad \text{per tutti i } t \geq t_0 > 0 \quad (13.48)$$

con $H(t_0), h(t_0) < +\infty$ costanti dipendenti dalle condizioni iniziali e da ν, \underline{f} , ma non dal tempo $t > t_0$.

*

mbe

Osservando che $\exp -(\log |\underline{k}|)^2 / h$ tende a 0 per $|\underline{k}| \rightarrow \infty$ più rapidamente di ogni potenza, ciò significa che la soluzione C-debole considerata (unica almeno se $\underline{u}^0 \in W_1(\Omega)$ grazie alla proposizione VI) ha una trasformata di Fourier che acquisisce una regolarità C^∞ espressa quantitativamente dai parametri H, h in (13.47) a ogni istante $t_0 > 0$ e la mantiene indefinitamente con gli stesi parametri (almeno).

Problemi.

[1]: Si stimi la funzione B_α , descritta nella osservazione (1) seguente la dimostrazione della proposizione III, nei casi $d = 2, \alpha_0 = 2$ e $d = 3, \alpha_0 = 2$ per $\alpha = \alpha_0 + 1, \alpha_0 + 2$.

[2]: Si stimino le costanti B_α in (13.20).

[3]: Si dimostri la proposizione VII senza supporre l' assenza di forza esterna determinando la dipendenza da \underline{g} delle costanti V_q, M .

Bibliografia: Questo paragrafo è basato sulle note delle mie lezioni sul lavoro [FP67] (*c.f.r.* [Bo72]) che discute gli argomenti di cui sopra in un dominio con frontiera e condizioni al vordo di “non scivolamento” (ossia $\underline{u} = \underline{0}$). La proposizione VIII è, però, un risultato recente in [MS98].

⁶ Ricordiamo che abbiamo dimostrato unicità delle soluzioni deboli, in $d = 2$, solo sotto l' ipotesi (leggermente) più forte che $\underline{u}^0 \in W_1(\Omega)$.

┐

┐

178 §13 Autoregolarizzazione per NS. Esistenza ($d = 2$)

.

└

└

§14 *Regolarità: risultati parziali per l'equazione di NS a $d = 3$. La teoria di Leray.*

La teoria del §13 è molto insoddisfacente nel caso $d = 3$, perchè è *non costruttiva* e *manca* addirittura un teorema di unicità.

E l'ambiguità conseguente non sta *solo* nel fatto che la soluzione è stata trovata a mezzo di un limite per sottosuccessioni su una famiglia di soluzioni approssimate e, quindi, si può temere che scegliendo sottosuccessioni diverse si pervenga a soluzioni diverse. Invero è chiaro che si possono *concepire* altre regolarizzazioni, che attraverso procedimenti di limite, potrebbero condurre ad altre soluzioni.

Considereremo il caso di un contenitore cubico Ω di lato L , con condizioni al contorno periodiche, e fissiamo le unità di misura in modo che la densità sia unitaria: $\rho = 1$. Al sistema sono allora associate due scale intrinseche: una scala di tempo T_c ed una di velocità V_c :

$$14.1 \quad V_c \equiv \frac{\nu}{L}, \quad T_c \equiv \frac{L^2}{\nu} \quad (14.1)$$

ove ν è la viscosità cinematica. Per motivi ovvii chiameremo queste scale "scale caratteristiche della geometria del sistema".

(A) *Regolarizzazione di Leray.*

Un' interessante regolarizzazione diversa da quella *di troncamento* puro e semplice, finora usata, è la seguente, introdotta da Leray.

Sia $\underline{x} \rightarrow \chi(\underline{x}) \geq 0$ una funzione di classe C^∞ definita su Ω e non nulla in un piccolo intorno dell'origine e con integrale $\int \chi(\underline{x}) d\underline{x} \equiv 1$: la funzione $\chi(\underline{x})$ può essere pensata sia come una funzione periodica su Ω oppure come una funzione su R^3 nulla fuori di Ω , perché immaginiamo che Ω sia centrato all'origine (per fissare le idee). Per $\lambda \geq 1$ anche la funzione $\chi_\lambda(\underline{x}) \stackrel{def}{=} \lambda^3 \chi(\lambda \underline{x})$ può essere vista come funzione periodica su Ω o come una funzione su R^3 : è una "funzione δ di Dirac approssimata".

È rilevante osservare che c'è una semplice relazione fra la trasformata di Fourier della funzione χ considerata come definita su Ω e la sua trasformata di Fourier quando la si pensa come funzione su R^3 : cioè se $\hat{\chi}(\underline{k})$, $\underline{k} \in R^3$ è la trasformata di Fourier di χ pensata definita su R^3 : invero la trasformata di Fourier di χ pensata come funzione su Ω è semplicemente $\hat{\chi}(\underline{k})$ calcolata a $\underline{k} = \underline{n} k_0$ con $k_0 = 2\pi L^{-1}$ e \underline{n} è un vettore a componenti intere (basta scrivere le definizioni per la verifica). Si noti anche che $\hat{\chi}(\underline{k})$ decresce più rapidamente di ogni potenza per $|\underline{k}| \rightarrow \infty$.

Esamineremo la regolarizzazione con parametro λ (adimensionale) delle equazioni di NS "nel senso di Leray" definita da

$$14.2 \quad \dot{\underline{u}} = \nu \Delta \underline{u} - \langle \underline{u} \rangle_\lambda \cdot \underline{\partial} \underline{u} - \underline{\partial} p + \underline{g}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0, \quad \int_\Omega \underline{u} d\underline{x} = \underline{0} \quad (14.2)$$

ove $\langle \underline{u} \rangle_\lambda \equiv \int_{R^3} \chi_\lambda(\underline{y}) \underline{u}(\underline{x} + \underline{y}) d^3 \underline{y}$, \underline{u} è un campo di velocità a divergenza e media nulle e \underline{g} è una forza di volume a divergenza e media nulle. E

senza perdita di generalità si potrà supporre che non abbia componente di gradiente (ossia $\underline{k} \cdot \hat{\underline{\gamma}}_{\underline{k}} \equiv 0$, c.f.r. il commento dopo la (9.11)).

Nella (14.2) si vede che l'approssimazione corrispondente alla regolarizzazione consiste nel far eseguire il trasporto del campo di velocità in un punto \underline{x} *non già dalla velocità stessa*, come nelle equazioni di Eulero e Navier Stokes, bensì dalla media della velocità su una regione dell'ordine di grandezza di λ^{-1} attorno a \underline{x} .

Riscriviamo la (14.2) come un'equazione per le componenti di Fourier $\underline{\gamma}_{\underline{k}} \equiv \underline{\gamma}_{-\underline{k}}$ del campo di velocità (cfr. §9):

$$14.3 \quad \hat{\underline{\gamma}}_{\underline{k}}^{\lambda} = -\nu \underline{k}^2 \underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda} + i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k} = \underline{0}} \hat{\chi}(\underline{k}_1 \lambda^{-1}) \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^{\lambda} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^{\lambda} + \underline{g}_{\underline{k}} \quad (14.3)$$

ove $\hat{\chi}(0) = 1$ e $\underline{k} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda} = 0$, $\underline{\gamma}_{\underline{0}}^{\lambda} \equiv \underline{g}_{\underline{0}} \equiv \underline{0}$ e le funzioni $\underline{\gamma}_{\underline{k}}(0) \equiv \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0$ e $\underline{g}_{\underline{k}}$ sono assegnate come trasformate di Fourier (secondo le convenzioni stabilite in (9.2)):

$$14.4 \quad \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 = L^{-3} \int_{\Omega} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \underline{u}^0(\underline{x}) d\underline{x}, \quad \underline{g}_{\underline{k}} = L^{-3} \int_{\Omega} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} \underline{g}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (14.4)$$

di un dato iniziale $\underline{u}^0 \in C^{\infty}(\Omega)$ e della densità di forza esterna $\underline{g} \in C^{\infty}(\Omega)$. Usiamo la convenzione sulla trasformata di Fourier per cui $\underline{u}^0 = \sum_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}}$, e quindi $\sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0|^2 = L^{-3} \int |u^0(\underline{x})|^2 d\underline{x}$. Sia \underline{u} che la sua trasformata di Fourier $\underline{\gamma}$ hanno la dimensione di una velocità.

Osservazioni:

(1) La (14.3) è simile alle regolarizzazioni per troncamento, considerate nel paragrafo precedente, perchè i grandi valori di \underline{k}_1 , $|\underline{k}_1| \gg \lambda$, sono *soppressi* in (14.3). Tuttavia la (14.3) *non* si riduce alla regolarizzazione per troncamento neppure nel caso in cui $\hat{\chi}(\underline{k}_1/\lambda)$ è scelta come funzione caratteristica di $|\underline{k}| < \lambda$: invero con questa scelta di $\hat{\chi}$ i vettori \underline{k}_2 e \underline{k} in (14.3) restano liberi e solo $|\underline{k}_1|$ è forzato ad essere $\leq \lambda L^{-1}$. Nelle equazioni ottenute per troncamento della equazione di NS discusse nel paragrafo precedente, invece, anche $|\underline{k}_2|$ e $|\underline{k}|$ sono vincolati ad essere $\leq \lambda$ (λL^{-1} corrisponde a R del paragrafo §13).

(2) Non abbiamo, però, scelto χ in modo che $\hat{\chi}$ sia una funzione caratteristica di una sfera perchè la corrispondente $\chi(\underline{x})$ avrebbe decrescita così lenta all' ∞ da rendere, in generale, improprio l'integrale che definisce la $\langle \underline{u} \rangle_{\lambda}(\underline{x})$ e anche perchè non sarebbe in generale vera la seguente disuguaglianza, fondamentale nel seguito:

$$14.5 \quad |\langle \underline{u} \rangle_{\lambda}(\underline{x})| \leq \max_{\underline{y} \in \Omega} |\underline{u}(\underline{y})| \quad (14.5)$$

Con la nostra scelta per χ come una funzione δ approssimata l'equazione (14.5) è corretta e di dimostrazione molto semplice: *ma* si basa sulla

positività della $\chi(\underline{y})$ e sull' essere il suo integrale su tutto lo spazio uguale a 1.

(B) *Proprietà dell' equazione regolarizzata e nuove soluzioni deboli.*

La teoria della (14.3) a λ fisso è molto facile. Il punto fondamentale è che se $\|\underline{\gamma}\|_2 < \infty$ allora, per ogni $\lambda > 1$ e per ogni successione $\{\underline{\gamma}_{\underline{k}}\}$, resta valida un' identità che più volte si è visto essere alla base della relazione di conservazione dell' energia:

$$14.6 \quad \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = 0 \\ |\underline{k}_i| \leq N}} \hat{\chi}(\underline{k}_1 \lambda^{-1}) \mathcal{Z}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}_3} = 0 \quad (14.6)$$

per tutti gli interi N , perché è basata solo sulla simmetria di questa espressione rispetto a \underline{k}_2 e \underline{k}_3 e alla ortogonalità fra $\underline{k}_2 + \underline{k}_3 \equiv -\underline{k}_1$ e $\mathcal{Z}_{\underline{k}_1}$.

Questo significa che si può cercare di applicare lo stesso metodo usato per la soluzione della (14.3) come limite di soluzioni $\gamma_{\underline{k}}^{\lambda, N}(t)$ delle equazioni regolarizzate (qui N è un parametro di regolarizzazione il cui ruolo è completamente diverso da quello di λ dal momento che quest' ultimo è necessario per dare senso all' equazione mentre N è introdotto qui solo perché tecnicamente utile al fine di stabilire proprietà delle equazioni regolarizzate e scomparirà presto)

$$14.7 \quad \begin{aligned} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda, N}(t) = e^{-\nu \underline{k}^2 t} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0 + \int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \left(\underline{g}_{\underline{k}} - i \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k} \\ |\underline{k}_i| \leq N}} \hat{\chi}(\lambda^{-1} \underline{k}_1) \cdot \right. \\ \left. \cdot \mathcal{Z}_{\underline{k}_1}^{\lambda, N}(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \gamma_{\underline{k}_2}^{\lambda, N}(\tau) \right) d\tau \end{aligned} \quad (14.7)$$

Infatti si procede come nel §13 e il metodo fornisce una soluzione verificante le "stesse" stime a priori, discusse in (13.12) e (13.13):

$$14.8 \quad \begin{aligned} \|\underline{\gamma}^{\lambda, N}(t)\|_2^2 &\leq E_0 L^{-3}, \\ \sum_{\underline{k}} \int_0^t d\tau \underline{k}^2 |\gamma_{\underline{k}}^{\lambda, N}(\tau)|^2 &\leq \frac{1}{2} E_0 L^{-3} \nu^{-1} + t \sqrt{E_0 L^{-3}} \nu^{-1} \|\underline{g}\|_2 \end{aligned} \quad (14.8)$$

ove $E(t) = L^3 \sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}(t)|^2 = \int |\underline{u}(t)|^2 d\underline{x}$ e il parametro di regolarizzazione N gioca lo stesso ruolo di R nel §13 e λ è, per il momento, tenuto fisso.

La (14.8) a sua volta implica che esiste un limite per $N \rightarrow \infty$, $\gamma_{\underline{k}}^{\lambda}(t)$, eventualmente ottenuto su una sottosuccessione $N_j \rightarrow \infty$, verificante le (14.7) e la (14.3).

Questa volta però la proprietà di autoregolazione è più forte (perché la (14.3) non è l' equazione di NS). Infatti se $|\underline{k}|^\alpha |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda, N}(t)| \leq C_\alpha$ per tutti i \underline{k} e i $|t| \leq T$, allora $\forall |t| \leq T$:

$$14.9 \quad |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda, N}(t)| \leq e^{-\nu \underline{k}^2 t} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| + \frac{|g_{\underline{k}}|}{\nu \underline{k}^2} + \int_0^t d\tau |\underline{k}| e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)}. \quad (14.9)$$

$$\sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \hat{\chi}(\lambda^{-1} \underline{k}_1) \frac{C_\alpha^2}{|\underline{k}_1|^\alpha |\underline{k}_2|^\alpha} \leq e^{-\nu \underline{k}^2 t} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| + \frac{|\underline{g}_{\underline{k}}|}{\nu \underline{k}^2} + \frac{C_\alpha^2 B(\lambda)}{\nu |\underline{k}|^{\alpha+1}}$$

ove $B(\lambda) = 2^{1+\alpha} k_0^{-\alpha} \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^{2\alpha} \hat{\chi}(\underline{k} \lambda^{-1}) < \infty$, se $k_0 = 2\pi L^{-1}$ è il minimo valore di $|\underline{k}|$ (ma si noti che, ovviamente, $B(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$).

Quindi se $\underline{u}^0 \in C^\infty$, $\underline{g} \in C^\infty$ vediamo che $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda, N}(t)| \leq C_{\alpha+1} |\underline{k}|^{-\alpha-1}$, $\forall 0 \leq t \leq T$. E pertanto, ripetendo l'argomento, si vede che $|\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda, N}(t)| |\underline{k}|^{\alpha'} \leq C_{\alpha'}$, $\forall \alpha' \geq \alpha$, $t \leq T$.

Cioè $\underline{\gamma}^{\lambda, N}$ è di classe C^∞ , dal momento che la (14.8) garantisce banalmente la validità di questa stima per $\alpha = 0$. E si trova facilmente, come nel caso a $d = 2$, che tale soluzione della (14.3) è unica e quindi $\underline{\gamma}^\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \underline{\gamma}^{\lambda, N}$, senza necessità di considerare sottosuccessioni (cfr (13.34), (13.36)).

Se però si cerca di eseguire anche il limite $\lambda \rightarrow \infty$ è chiaro che si rischia di perdere la regolarità e si ottiene solo una soluzione debole, nello stesso senso del paragrafo precedente, come limite su una opportuna sottosuccessione $\lambda_j \rightarrow \infty$.

Questa soluzione verificherà ancora, per lo stesso argomento usato nel §13, le stime a priori (14.8) o (13.12), con gli stessi membri di destra, e l'equazione di Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_{\underline{k}}(t) = & e^{-\nu \underline{k}^2 (t-t_0)} \underline{\gamma}(t_0)_{\underline{k}} + \int_{t_0}^{t_0+t} e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \left(\underline{g}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \right. \\ & \left. \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}(\tau) \right) d\tau \end{aligned} \quad (14.10)$$

ove $t_0 \geq 0$, c.f.r. (13.10).

Osservazione: Però poichè *non abbiamo stabilito* un teorema di unicità per le soluzioni deboli non è detto che queste nuove soluzioni deboli coincidano con quelle precedentemente discusse al §13. E non è quindi troppo sorprendente che *sarà possibile* stabilire per queste soluzioni proprietà che *non sapremmo* stabilire per le altre.

(C) *Stime locali di Leray, uniformi nel parametro di regolarizzazione.*

Sia $t_0 \geq 0$ un istante qualunque e chiamiamo:

$$J_0(t_0) = \sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t_0)|^2, \quad J_1(t_0) = L^2 \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t_0)|^2, \quad G_0 = \sum_{\underline{k}} |\underline{g}_{\underline{k}}|^2 \quad (14.11)$$

e introduciamo inoltre le quantità:

$$D_m(t) = \sup_{\underline{x}, |\underline{\alpha}|=m} |L^m \partial_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}} \underline{u}^\lambda(\underline{x}, t)|, \quad J_m(t) = L^{2m} \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^{2m} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t)|^2 \quad (14.12)$$

e si noti che D hanno le dimensioni di velocità mentre J sono velocità quadrate, e $\sqrt{G_0}$ è un' accelerazione.

È utile definire, al fine di una formulazione più chiara della teoria di Leray, il *numero di Reynolds*. Vista l'importanza di questa nozione è bene dare una definizione formale.

1. *Definizione:* Se \underline{u} è un campo di velocità in Ω si definiscono il "numero di Reynolds" R e la "intensità adimensionale" R_g della forza esterna in termini delle scale "geometriche" di velocità e tempo, c.f.r. (14.1), e delle velocità $V_1 \equiv \sqrt{J_1}$ e $W_0 = T_c \sqrt{G_0}$ che chiameremo "scala di (variazione di) velocità" del campo \underline{u} e "scala di velocità della forza esterna". La definizione è:

$$14.13 \quad R \equiv \frac{V_1}{V_c}, \quad R_g = \frac{W_0}{V_c} \quad (14.13)$$

Le quantità V_1, J_1, R sono funzioni del campo di velocità \underline{u} , mentre R_g è invece funzione della densità di forza esterna.

In particolare R dipende dal tempo t se \underline{u} ne dipende; e dire che $R < \infty$ ammonta a dire che $\underline{u} \in W^1(\Omega)$. Facciamo vedere che:

I. *Proposizione:* Esistono costanti adimensionali e λ indipendenti F_m, F , $m = 0, 1, 2, \dots$ tali che se $t \rightarrow \underline{u}^\lambda(t)$ una soluzione delle equazioni di NS regolarizzate, (14.2), che all'istante t_0 ha numero di Reynolds (c.f.r. (14.13)) $R(t_0) < \infty$, allora:

$$14.14 \quad \begin{aligned} D_m(t) &\leq \left(\frac{V_c R(t_0)}{\sqrt[4]{L^{-2}\nu(t-t_0)}} + W_0 \right) \frac{F_m}{(L^{-2}\nu(t-t_0)^{\frac{m}{2}})}, \\ R(t)^2 &\leq 8(R(t_0)^2 + R_g^2) \end{aligned} \quad (14.14)$$

per $t \in [0, T_0]$, con T_0 dato da:

$$14.15 \quad T_0 = F \frac{T_c}{R(t_0)^4 + R_g^2} \quad (14.15)$$

e R_g è definito in (14.13).

Osservazione: si noti che mentre le velocità D_m dipendono da λ le loro stime e il tempo di validità di esse, non ne dipendono, e sono quindi stimate in termini del solo numero di Reynolds all'istante t_0 . In generale quest'ultimo dipende da λ , *tranne che per* $t_0 = 0$.

dim: Allo scopo riscriviamo la (14.7) nello "spazio delle coordinate", ossia per le $\underline{u}^\lambda(\underline{x}, t)$. Si trova:

$$14.16 \quad \begin{aligned} u_j^\lambda(\underline{x}, t) &= \int_{\Omega} d\underline{y} \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t - t_0) u_j^\lambda(\underline{y}, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t d\tau \int_{\Omega} \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, \tau - t_0) g_j(\underline{y}, \tau) d\underline{y} + \\ &- \sum_{p,h=1}^3 \int_{t_0}^t d\tau \int_{\Omega} d\underline{y} \partial_p T_{jh}(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) \langle u_p^\lambda(\underline{y}, \tau) \rangle_\lambda u_h^\lambda(\underline{y}, \tau) \end{aligned} \quad (14.16)$$

ove si è posto:

$$\begin{aligned} \Gamma(\underline{x}, t) &= L^{-3} \sum_{\underline{k}} e^{-\nu \underline{k}^2 t} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}, \\ T(\underline{x}, t)_{ij} &= L^{-3} \sum_{\underline{k} \neq 0} e^{-\nu \underline{k}^2 t} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\underline{k}|^2} \right) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} \end{aligned} \quad (14.17)$$

che sono funzioni di Green sul toro Ω di lato L per l'equazione del calore.

Osserviamo le seguenti proprietà di Γ, T per $t > 0$ o per $t = 0$:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \nu \Delta) \Gamma(\underline{x}, t) &= 0, & \Gamma(\underline{x}, 0) &= \delta(\underline{x}) \\ (\partial_t - \nu \Delta) T(\underline{x}, t) &= 0, & T_{jh}(\underline{x}, 0) &= \delta(\underline{x}) \delta_{jh} - \partial_j \partial_h G(\underline{x}) \end{aligned} \quad (14.18)$$

$\delta(\underline{x})$ è la funzione delta di Dirac e $G(\underline{x})$ è la funzione di Green dell'operatore di Laplace sul toro Ω . Quest'ultima può essere espressa, *c.f.r.* problemi [12]÷[14] del §10 e [14] del §12, come:

$$\begin{aligned} G(\underline{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\underline{n}} \left\{ \frac{1}{|\underline{x} + \underline{n}L|} - \frac{1}{|\underline{n}L|} + \frac{\underline{x} \cdot \underline{n}L}{|\underline{n}L|^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{|\underline{n}L|^3} \left(\underline{x}^2 - 3 \frac{(\underline{x} \cdot \underline{n}L)^2}{|\underline{n}L|^2} \right) \right\} = \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{4\pi} \sum_{|\underline{n}| \leq N} \left(\frac{1}{|\underline{x} + \underline{n}L|} - \frac{1}{|\underline{n}L|} \right), \quad \underline{n} = (n_1, n_2, n_3) \text{ in } \mathbb{Z}^3 \end{aligned} \quad (14.19)$$

ove \underline{n} è un vettore a componenti intere, che segue dal metodo delle immagini, (c.f.r. i problemi [12]÷[14] del §10 e [12] del §14.¹)

Le Γ, T possono, anche, essere calcolate (dalle (14.18)) con il metodo delle immagini:

$$\begin{aligned} \Gamma(\underline{x}, t) &= \sum_{\underline{n}} \frac{e^{-(\underline{x} + \underline{n}L)^2 / 4\nu t}}{(4\pi\nu t)^{3/2}} \\ T_{jn}(\underline{x}, t) &= \Gamma(\underline{x}, t) \delta_{jn} + \partial_j \partial_n \int_{\Omega} G(\underline{x} - \underline{y}) \Gamma(\underline{y}, t) d\underline{y} \end{aligned} \quad (14.20)$$

Infine le Γ, T verificano le seguenti disuguaglianze fondamentali:

$$0 \leq \Gamma(\underline{x}, t) \leq \frac{C_0}{(\underline{x}^2 + \nu t)^{3/2}}, \quad \int_{\Omega} \Gamma(\underline{x}, t) d\underline{x} \equiv 1 \quad (14.21)$$

¹ Si noti che dalla prima formula in (14.19) si passa alla seconda osservando che la prima espressione è assolutamente convergente e quindi la si può banalmente ottenere come limite per $N \rightarrow \infty$ della somma per $|\underline{n}| \leq N$ e se la somma su \underline{n} è ristretta agli \underline{n} tali che $|\underline{n}| \leq N$ allora i termini lineari in \underline{x} e quadratici in \underline{x} si sommano a zero (per ogni N !).

per un opportuno C_0 , e se $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_j \geq 0$ intero, e $|\underline{\alpha}| \stackrel{def}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$$14.22 \quad |\partial_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}} \Gamma(\underline{x}, t)|, |\partial_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}} T_{ij}(\underline{x}, t)| \leq \frac{C_{|\underline{\alpha}|}}{(\underline{x}^2 + \nu t)^{(3+|\underline{\alpha}|)/2}} \quad (14.22)$$

Si vedano i problemi [6] e [9] di questo paragrafo per una dimostrazione delle disuguaglianze.

Se le derivate $\partial^{\underline{\alpha}} \Gamma$ e $\partial^{\underline{\alpha}} T$ sono considerati come operatori di convoluzione su $L_2(\Omega)$ e sono definiti, quindi, da:

$$14.23 \quad \begin{aligned} (\partial^{\underline{\alpha}} \Gamma * f)(\underline{x}) &= \int_{\Omega} \partial^{\underline{\alpha}} \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t) f(\underline{y}) d\underline{y} \\ (\partial^{\underline{\alpha}} \underline{T} * \underline{f})(\underline{x}) &= \int_{\Omega} \partial^{\underline{\alpha}} \underline{T}(\underline{x} - \underline{y}, t) \underline{f}(\underline{y}) d\underline{y} \end{aligned} \quad (14.23)$$

si ha, come si vede immediatamente calcolando, via la (14.17), le norme a mezzo delle trasformate di Fourier:

$$14.24 \quad \|\partial^{\underline{\alpha}} \Gamma * \cdot\|_2, \|\partial^{\underline{\alpha}} T * \cdot\|_2 \leq \sup_{\underline{k}} |\underline{k}|^{|\underline{\alpha}|} e^{-\nu \underline{k}^2 t} \leq \frac{B_m}{(\nu t)^{m/2}} \quad (14.24)$$

se $|\underline{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m$ e B_m è un' opportuna costante.

Ora tornando alla (14.17) ricordiamo che oltre ad associare al contenitore il tempo caratteristico $T_c = L^2/\nu$ e la velocità caratteristica $V_c = \nu/L$, cfr (14.13), abbiamo associato, al fluido, le velocità $V_1 = J_1(t_0)^{1/2}$ e $W_0 = T_0 G_0^{1/2}$. E allora, in termini di queste quantità, possiamo stimare $D_0(t)$, c.f.r. (14.22), a partire dalle equazioni (14.16):

$$14.25 \quad \begin{aligned} D_0(t) &\leq \sum_{\underline{k}} \frac{e^{-\nu \underline{k}^2 (t-t_0)}}{|\underline{k}|} |\underline{k}| |\mathcal{L}_{\underline{k}}^{\lambda}(t_0)| + \int_{t_0}^t \sum_{\underline{k}} e^{-\nu \underline{k}^2 (\tau-t_0)} |g_{\underline{k}}| d\tau + \\ &+ C_1 \int_{t_0}^t d\tau \int_{\Omega} d\underline{y} \frac{D_0(\tau)^2}{(|\underline{x} - \underline{y}|^2 + \nu(t-\tau))^2} \leq \\ &\leq F'_0 \left(\frac{V_1}{\sqrt[4]{(t-t_0)/T_c}} + W_0 \right) + F''_0 \int_{t_0}^t \frac{D_0(\tau)^2}{\sqrt{(t-\tau)/T_c}} \frac{d\tau}{T_c V_c} \end{aligned} \quad (14.25)$$

ove F'_0 e F''_0 sono opportune costanti adimensionali.

La funzione $D_0(t)$ è continua in t (si tenga presente che $D_0(t)$ è il massimo della $\underline{u}^{\lambda}(\underline{x}, t)$ in \underline{x} e la \underline{u}^{λ} è di classe C^{∞} in \underline{x}, t perchè risolve l' equazione regolarizzata) per $t \geq t_0$. Quindi la disuguaglianza:

$$14.26 \quad D_0(t) < 2 \left(\frac{V_1}{((t-t_0)/T_c)^{1/4}} + W_0 \right) F'_0 \quad (14.26)$$

è ovviamente vera per $t-t_0 > 0$ abbastanza piccolo. Questa è semplicemente l' affermazione che $D_0(t)$ è continua in t : ma $t-t_0$ potrebbe essere assai piccolo e dipende in modo finora fuori controllo da λ .

Tuttavia la disuguaglianza (14.26) rimarrà vera finché la stima superiore di $D_0(t)$ in (14.25), calcolata sostituendo $D_0(t)$ con la stima (14.26), resta

più piccola del membro di destra della equazione (14.26) stessa, come un momento di riflessione mette in evidenza.

Pertanto se $t_0 + \tau_0$ è il valore massimale di t fino al quale la (14.26) è valida allora, per la (14.25), segue che il tempo τ_0 è non inferiore al valore massimo di $\tau \geq 0$ per cui:

$$\begin{aligned}
 & ((\tau/T_c)^{-1/4} V_1 + W_0) F'_0 + \\
 & + 8F''_0 F_1^2 \int_0^\tau \left(\left(\frac{T_c}{\tau'} \right)^{1/2} V_1^2 + W_0^2 \right) \left(\frac{T_c}{\tau - \tau'} \right)^{1/2} \frac{d\tau'}{T_c V_c} \leq \\
 & \leq 2((\tau/T_c)^{-1/4} V_1 + W_0) F'_0
 \end{aligned} \tag{14.27}$$

Si noti, infatti, che il membro di sinistra è una stima del membro di destra della (14.25) ottenuto sostituendo $D_0(t)$ con la (13.29).

La (14.27) è implicata, se si tiene conto della indipendenza da τ dell'integrale $\pi = \int_0^\tau [\tau'(\tau - \tau')]^{-1/2} d\tau'$, dalle:

$$8F'_0 F''_0 \pi \frac{(V_1^2 + (\tau/T_c)^{1/2} W_0^2) V_c^{-1}}{V_1 + (\tau/T_c)^{1/4} W_0} \leq \frac{1}{(\tau/T_c)^{1/4}} \tag{14.28}$$

ossia, posto $F = 1/(8\pi F'_0 F''_0)$ e $x \equiv (\tau/T_c)^{1/4}$, la condizione è:

$$x < F \frac{V_c(V_1 + xW_0)}{V_1^2 + x^2 W_0^2} \tag{14.29}$$

che è implicata da $x < F \min(V_c/V_1, V_c/(xW_0))$. Questa relazione è equivalente a $x < F \min(1, (V_c/V_1), \sqrt{(V_c/W_0)})$.

Per semplificare le notazioni imporremo quest'ultima condizione attraverso la condizione più semplice (ma più restrittiva):

$$\tau \leq T_0 \stackrel{\text{def}}{=} F \frac{T_c}{\left(\frac{V_1}{V_c}\right)^4 + \left(\frac{W_0}{V_c}\right)^2} \equiv F \frac{T_c}{R^4 + R_g^2} \tag{14.30}$$

che ha una forma convenientemente espressa (per i nostri scopi) in termini di grandezze adimensionali.

Osservazione: L'interesse principale di questa stima di T_0 è l'indipendenza di τ_0 dal parametro λ come funzione del numero R di Reynolds (il quale però in generale dipende da λ , come già osservato).

Un'altra conseguenza delle (14.16) e (14.24), che si ottiene in modo simile a quello seguito nella deduzione della (14.25), è:

$$J_1(t)^{1/2} \leq J_1(t_0)^{1/2} + T_c G_0^{1/2} + \int_{t_0}^t D_0(\tau) \frac{B_1}{\sqrt{\nu(t-\tau)}} J_1(\tau)^{1/2} d\tau \tag{14.31}$$

La $J_1(t)$ può essere stimata, secondo la stessa logica appena esposta per la stima di $D_0(t)$ nella derivazione delle (14.26), (14.27) e

$$J_1(t)^{1/2} \leq 2(J_1(t_0)^{1/2} + T_c G_0^{1/2}), \quad t \leq \tau_0 \tag{14.32}$$

Questa può anche essere stimata secondo lo tipo di argomento appena fornito per la stima di h can also be bounded by the same kind of reasoning just presented for the bound on $D_0(t)$ per ottenere (14.26), (14.27) e (14.30). Si trova l'esistenza di opportune costanti adimensionali \tilde{F}, \hat{F} tali che:

$$\begin{aligned}
 & \text{se} \quad t \leq T_0 = \tilde{F} \frac{T_c}{R^4 + R_g^2} \quad \text{allora :} \\
 14.33 \quad & D_0(t) \leq \hat{F} \left(V_1 \left(\frac{t - t_0}{T_c} \right)^{-1/4} + W_0 \right) \stackrel{def}{=} d(t - t_0) \quad (14.33) \\
 & J_1(t) \leq 8(J_1(t_0) + T_c^2 G_0) \stackrel{def}{=} j(t_0)
 \end{aligned}$$

Si noti, ancora, che il secondo membro è indipendente da λ e la funzione $d(\varepsilon)$ è decrescente in ε .

Questo mostra la proposizione nel caso $m = 0$. I casi $m > 0$ si trattano in modo analogo, ovvero seguono anche dalle successive proposizioni IV, V, VI come casi particolari.

*

mbe

(D) *Esistenza e regolarità locali. Teorema di Leray locale.*

Dimostriamo ora il seguente teorema, corollario delle stime uniformi di Leray date nella proposizione I.

II. Proposizione: se \underline{u}^0 è un campo di velocità con numero di Reynolds $R < \infty$ e se la intensità adimensionale della forza esterna è R_g , nel senso della definizione 1, (14.13), allora esiste una soluzione debole, con dato iniziale \underline{u}^0 a $t = t_0$, delle equazioni di NS che verifica le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
 14.34 \quad & (1) \quad \underline{u} \in C^\infty((t_0, t_0 + T_0) \times \Omega) \\
 & (2) \quad \|\underline{u}(t) - \underline{u}^0\|_2 \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0 \\
 & (3) \quad \int_0^{T_0} D_0(\tau)^2 d\tau < \infty
 \end{aligned} \quad (14.34)$$

ove $T_0 = (R^4 + R_g^2)^{-1} F T_c$, se F è una opportuna costante adimensionale e $D_0(t)$ è il massimo di $|\underline{u}(\underline{x}, t)|$ su \underline{x} . Due soluzioni deboli che godono delle proprietà 1, 2, 3 sono necessariamente identiche. Infine la soluzione è ottenibile a mezzo di un algoritmo costruttivo.

Osservazione: Per soluzione debole ricordiamo (c.f.r. definizione 1 del §13) che si intende una funzione $t \rightarrow \underline{u}(\underline{x}, t)$ in $L_2(\Omega)$ e con energia cinetica (cioè norma in L_2) verificante una stima uniforme in ogni intervallo finito di tempo e che rende la (14.10) una identità (e quindi rende la (13.6) una identità quasi ovunque in $t > t_0$).

dim: ponendo $t_0 = 0$ la proprietà 1) segue immediatamente dalle stime (14.14), dalla proprietà di autoregolizzazione della proposizione V del §13 e dalla osservazione (3) alla stesa proposizione.

E inoltre da (14.7), e tenendo conto che si ha $\int_0^t e^{-\nu \underline{k}^2 \tau} d\tau \leq t^\varepsilon / (\nu \underline{k}^2)^{1-\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon \in [0, 1]$, deduciamo per tutti i $\lambda \geq 0$:

$$14.35 \quad |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t) - e^{-\nu \underline{k}^2 t} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0| \leq \frac{|\underline{g}_{\underline{k}}| t^\varepsilon}{(\nu \underline{k}^2)^{1-\varepsilon}} + \frac{t^\varepsilon}{(\nu \underline{k}^2)^{1-\varepsilon}} \frac{\sqrt{E_0 L^{-3}}}{L} 2(J_1(0)^{1/2} + T_c G_0^{1/2}) \quad (14.35)$$

ove il secondo termine è ottenuto da (14.7) stimando la somma proporzionalmente a $\|\underline{\gamma}\|_2 \cdot \|\underline{k} \underline{\gamma}\|_2$ (the $\|\cdot\|_2$ is defined in (13.4)), via la stima sull'energia (13.12) e la stima (14.33). Questo ci fa vedere che (se $\varepsilon > 0$ è scelto tale che $(1 - \varepsilon) \cdot 4 > 3$):

$$14.36 \quad \|\underline{\gamma}^\lambda(t) - \underline{\gamma}(0)\|_2 \leq \left(\sum_{\underline{k}} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0|^2 (1 - e^{-\nu \underline{k}^2 t})^2 \right)^{1/2} + O(t^\varepsilon) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad (14.36)$$

e quindi $\|\underline{\gamma}^\infty(t) - \underline{\gamma}(0)\|_2 \leq \lim_{\lambda_j \rightarrow \infty} \|\underline{\gamma}^{\lambda_j}(t) - \underline{\gamma}^0(0)\|_2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. E la (2) delle (14.34) segue. La (3) segue immediatamente dalla seconda delle (14.33).

Resta da vedere l'unicità. Date invero due soluzioni \underline{u}^1 e \underline{u}^2 verificanti (14.34) sia $\Delta = \|\underline{\gamma}^1 - \underline{\gamma}^2\|_2^2$ e $\Delta_1 = \|\underline{k}(\underline{\gamma}^1 - \underline{\gamma}^2)\|_2$. Procedendo come altre volte, *c.f.r.* la proposizione VI del §13, si deduce:

$$14.37 \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\Delta}{2} &= -\nu \Delta_1 - \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = 0} i(\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^1 \cdot \underline{k}_2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^2 \cdot \underline{k}_2 \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^2) \cdot (\underline{\gamma}_{\underline{k}_3}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_3}^2) = \\ &= -\nu \Delta_1 + \sum i(\underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^2) \cdot \underline{k}_3 \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^1 \cdot (\underline{\gamma}_{\underline{k}_3}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_3}^2) + \\ &+ \sum i \underline{\gamma}_{\underline{k}_1}^2 \cdot \underline{k}_2 (\underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_2}^2) \cdot (\underline{\gamma}_{\underline{k}_3}^1 - \underline{\gamma}_{\underline{k}_3}^2) = \\ &= -\nu \Delta_1 + L^{-d} \int (\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \cdot [\underline{u}^1 \underline{\partial} \cdot (\underline{u}^1 - \underline{u}^2)] + \\ &+ L^{-d} \int [\underline{u}^2 \cdot \underline{\partial} (\underline{u}^1 - \underline{u}^2)] \cdot (\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \leq -\nu \Delta_1 + \\ &+ 2D_0(t) \sqrt{\Delta_1} \sqrt{\Delta} \leq \nu \Delta \max_{y>0} (-y^2 + 2\nu^{-1} D_0(t)y) \leq \Delta \nu^{-1} D_0^2(t) \end{aligned} \quad (14.37)$$

e quindi:

$$14.38 \quad \Delta(t) \leq \Delta(0) e^{2\nu^{-1} \int_0^t D_0(\tau)^2 d\tau} \quad (14.38)$$

e allora poichè $\Delta(0) = 0$ vediamo che la terza delle (14.34) implica $\Delta(t) \equiv 0$, per $t \leq T_0$.¹

*

mbe

¹ Parlando strettamente, *c.f.r.* definizione 2, si trova solo per $t_0 > 0$ la relazione $\Delta(t) \leq \Delta(t_0) \exp 2\nu^{-1} \int_{t_0}^t D_0(\tau)^2 d\tau$ per $t_0 > 0$ perché $\underline{u}^i \in C^\infty$ for $t > t_0$; allora segue da (2) in (14.34) che anche $\underline{u}^i(t_0)$ tende allo stesso limitie per $t_0 \rightarrow 0$, ossia a $\underline{u}(0)$, in L_2 : pertanto $\Delta(t_0)$ tende pure a $\Delta(0) = 0$ per $t_0 \rightarrow 0$ e (14.38) segue.

(E) *Eccezionalità delle singolarità. Teorema globale di Leray. Le soluzioni di Leray.*

Consideriamo ora le soluzioni $\underline{u}^\lambda(t)$, dell'equazione con regolarizzazione di Leray, con dato iniziale $\underline{u}(0) = \underline{u}^0$ di classe C^∞ e per tutti i tempi t . Sia $\lambda_j \rightarrow \infty$ una successione tale che $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda_j}(t)$ converge, per tutti i t e \underline{k} , ad una soluzione debole $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\infty(t)$ con trasformata di Fourier $\underline{u}^\infty(\underline{x}, t)$. Tali “soluzione di Leray” possono essere diverse dalle soluzioni C-deboli del §13 e le chiameremo *soluzioni L-deboli*.

Tenendo presenti le (14.11) e la successiva definizione 1, poniamo:

$$14.39 \quad R^2(t)V_c^2 \equiv J_1(t) = \liminf_{j \rightarrow \infty} L^2 \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda_j}(t)|^2 \quad (14.39)$$

ove, si noti, tutte le quantità dipendono da λ . Allora, per la seconda delle (14.8), si trova

$$14.40 \quad \begin{aligned} \int_0^T R(t)^2 \frac{dt}{T} &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^T V_c^{-2} L^2 \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^2 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^{\lambda_j}(t)|^2 \frac{dt}{T} \leq \\ &\leq \left(\frac{L^2}{T} E_0 L^{-3} \nu^{-1} + L^2 \nu^{-1} \sqrt{E_0 L^{-3}} \|\underline{g}\|_2 \right) V_c^{-2} < \infty \end{aligned} \quad (14.40)$$

e quindi $R(t)^2 < \infty$ quasi ovunque.

Sia $\mathcal{E}_n = \{t | R(t)^2 < n\}$ e poniamo:

$$14.41 \quad \tau_n = \tilde{F} \frac{T_c}{n^2 + R_g^2} \quad (14.41)$$

notando che $\cup_n \mathcal{E}_n$ ha complemento di misura nulla. Sia $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots$ una famiglia numerabile di tempi in \mathcal{E}_n tali che l'insieme $\tilde{\mathcal{E}}_n$:

$$14.42 \quad \tilde{\mathcal{E}}_n \equiv \cup_{j=1}^\infty [t_j^{(n)}, t_j^{(n)} + \tau_n) \quad \text{coincida con} \quad \cup_{t \in \mathcal{E}_n} [t, t + \tau_n) \quad (14.42)$$

(si mostra facilmente che tale famiglia esiste); e $\tilde{\mathcal{E}}_n \supset \cup_{t \in \mathcal{E}_n} (t, t + \tau_n) \equiv \mathcal{E}_n^0$, naturalmente, e inoltre \mathcal{E}_n^0 è aperto.

Come corollario delle proposizioni I e II, si vede che $u^\infty(\underline{x}, t)$ è di classe C^∞ nell'insieme \mathcal{E}_n^0 e ivi verifica con tutte le sue derivate stime che dipendono solo da n e dalla distanza di t da $\partial \mathcal{E}_n^0$.

Poichè $\cup_n \mathcal{E}_n^0$ differisce per un insieme al più numerabile² dall'insieme $\cup_n \tilde{\mathcal{E}}_n$ e $\cup_n \tilde{\mathcal{E}}_n \supset \cup_n \mathcal{E}_n$ è chiaro che $\cup_n \mathcal{E}_n^0$ è aperto e ha complemento di misura nulla.

² Poichè \mathcal{E}_n^0 è definito in termini di intervalli aperti $(t, t + \tau_n)$ invece che semichiudi $[t, t + \tau_n)$ l'insieme \mathcal{E}_n^0 potrebbe non contenere i punti $\cup_{n,j} t_j^{(n)}$.

Dunque:

III. Proposizione (Leray): esistono soluzioni deboli dell'equazione di NS a tre dimensioni che sono di classe C^∞ su un insieme, aperto, di tempi con complementare a misura nulla. Tutte le soluzioni di Leray hanno questa proprietà.

Questo è in sostanza il punto di arrivo della teoria di Leray. Si possono ottenere alcune altre proprietà sostanzialmente più forti: sono risultati molto recenti che saranno discussi nei successivi paragrafi §15, §16.

(F) *Caratterizzazione delle singolarità: teorema di Leray-Serrin.*

Un altro corollario è il seguente teorema (di Serrin).

IV. Proposizione: Sia $\underline{u}(\underline{x}, t)$ una soluzione debole dell'equazione di NS, verificante $\|\underline{u}\|_2^2 < E_0$ per $t > 0$ e:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, t) = & \int_{\Omega} \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t) \underline{u}^0(\underline{y}) d\underline{y} + \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) \underline{g}(\underline{y}) d\underline{y} + \\ & - \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \vec{\partial} \underline{T}(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) \underline{\vec{u}}(\underline{y}, \tau) \underline{u}(\underline{y}, \tau) d\underline{y} \end{aligned} \quad (14.43)$$

Dato $t_0 > 0$ si supponga che $|\underline{u}(\underline{x}, t)| \leq M$, $(\underline{x}, t) \in U_\rho(\underline{x}_0, t_0) \equiv$ sfera di raggio ρ attorno a (\underline{x}_0, t_0) , con $M < \infty$: allora $\underline{u} \in C^\infty(U_{\lambda/2}(\underline{x}_0, t_0))$.

Osservazione: ossia il solo modo in cui una singolarità può manifestarsi, in una soluzione debole delle equazioni di NS nel senso (14.43), è attraverso una divergenza dello stesso campo di velocità. Non sono possibili ad esempio discontinuità nelle derivate senza una divergenza nella stessa velocità. Dunque non sono possibili discontinuità di velocità (e tanto meno onde d'urto), ad esempio. Naturalmente poichè si considerano soluzioni deboli, se $\underline{u}(\underline{x}, t)$ viene modificata su un insieme di (\underline{x}, t) di misura nulla resta ancora una soluzione debole (perchè la trasformata di Fourier, in termini della quale è definita la soluzione debole, non muta), e quindi la condizione $|\underline{u}(\underline{x}, t)| \leq M$ per ogni $(\underline{x}, t) \in U_\lambda(\underline{x}_0, t_0)$ può essere sostituita dalla condizione: per quasi tutti gli $(\underline{x}, t) \in U_\lambda(\underline{x}_0, t_0)$.

dim: questo segue immediatamente da proprietà, notevoli, degli integrali

$$\begin{aligned} V(\underline{x}, t) = \mathcal{P}' F & \equiv \int_{\Omega} P(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) F(\underline{y}, \tau) d\underline{y} \\ V(\underline{x}, t) = \mathcal{P} F & \equiv \int_0^t \int_{\Omega} \partial_j P(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) F(\underline{y}, \tau) d\tau d\underline{y} \end{aligned} \quad (14.44)$$

ove $P = \Gamma \circ P = T$, c.f.r. (14.20), quando operano su una funzione F limitata da una costante M . Queste proprietà stabiliscono l' analogo della proprietà di autoregolarizzazione, vista direttamente nello spazio delle coordinate. Sono espresse dalle seguenti due proposizioni.

V. Proposizione: Esiste un' opportuna funzione K_t^0 , decrescente in t (e

quindi limitata per $t > 0$) tale che:

$$14.45 \quad |V(\underline{x}, t)| + \frac{|V(\underline{x}, t) - V(\underline{x}', t)|}{(L^{-1}|\underline{x} - \underline{x}'|)^{1/2}} \leq M K_t^0 \quad \forall \underline{x}, \underline{x}' \quad (14.45)$$

Ossia gli operatori in (14.44) trasformano funzioni limitate in funzioni Hölder continue con esponente $\frac{1}{2}$.

(si veda il problema [10] per una dimostrazione) e, inoltre :

VI. *Proposizione: Similmente se F verifica (14.45) (con F in luogo di V) allora $\mathcal{P}F$ e $\mathcal{P}'F$ sono derivabili in \underline{x} e, per una opportuna K_t^1 decrescente in t (e quindi finita per $t > 0$), hanno derivate stimate da:*

$$14.46 \quad |\partial_i V(\underline{x}, t)| \leq K_t^1 M \quad (14.46)$$

e cioè l' operatore in (14.44) trasforma funzioni hölderiane in funzioni differenziabili.

Una dimostrazione è descritta nel problema [11].

Accettando la (14.45), (14.46), c.f.r. problemi [11], [12], possiamo continuare la dimostrazione della proposizione IV.

Sia $\chi_{\underline{x}_0, t_0}(\underline{y}, \tau) \leq 1$ una funzione C^∞ che si annulla fuori della sfera U_ρ e che vale 1 nella sfera $U_{3\rho/4}$. Essendo T, Γ di classe C^∞ se $\underline{\xi}^2 + \tau > 0$ l' espressione (14.43) fornisce una funzione di classe C^∞ per $(\underline{x}, t) \in U_{\rho/2}$ se \underline{u} è ovunque sostituito, nel membro di destra, da $(1 - \chi_{\underline{x}_0, t_0})\underline{u}$.

Resta allora da studiare la (14.43) con \underline{u} sostituito, nel membro di destra, da $\chi_{\underline{x}_0, t_0} \underline{u}$. Ma la funzione $\chi \underline{u}$ è, per ipotesi, limitata da M e quindi per le proposizioni V, VI la (14.43) è differenziabile in \underline{x} . Quindi la \underline{u} è differenziabile in \underline{x} e allora sempre dalla (14.43) vediamo che $\partial \underline{u}$ è data da espressioni simili alla (14.43) stessa perchè le nuove derivate di Γ, T possono essere “trasferite”, integrando per parti sulle \underline{u} . Quindi per lo stesso argomento $\partial \underline{u}$ è differenziabile in \underline{x} . Ripetendo l' argomento vediamo che \underline{u} è C^∞ in $U_{\rho/2}$. Sapendo che \underline{u} è differenziabile in \underline{x} e derivando ♣14,43 rispetto a t si può integrare per parti e “trasferire” le derivate temporali dei nuclei Γ, T in derivate rispetto alle \underline{x} delle funzioni \underline{u} (le quali derivate esistono per quanto visto sopra) perchè $\partial_t \Gamma = \nu \Delta \Gamma$ e $\partial_t T = \nu \Delta T$. Quindi \underline{u} è C^∞ anche in t per $(\underline{x}, t) \in U_{\rho/2}$.

*

mbe

(G) *Contenitori grandi.*

La teoria svolta è in forma dimensionalmente soddisfacente solo se il campo di velocità \underline{u}_0 iniziale e la densità di forza \underline{g} sono regolari su scala di lunghezza L uguale a quella del contenitore.

A volte però si considerano situazioni in cui la scala di lunghezza caratteristica dei dati, r , e delle forze è diversa da quella del contenitore: ad esempio se si studia un “vortice nel mare”, si veda il problema [8] seguente. E allora sarà importante tenere distinti i ruoli delle due scale.

Supponiamo che i dati e le forze siano "su scala" r : matematicamente questo significa che sono diversi, sensibilmente, da zero su una sferetta di raggio r e, ivi, le loro proprietà sono semplicemente descritte da parametri \tilde{v} e \tilde{g} che ne fissano la scala di grandezza. Un modo preciso di formulare questa proprietà è di supporre che \underline{u}^0 e \underline{g} siano funzioni analitiche di \underline{x} con dominio di olomorfia $|\operatorname{Im} x_i| < r$ e siano limitate in questa polistriscia complessa da \tilde{v} e \tilde{g} , rispettivamente, e che siano trascurabili ("nulle") per $|\operatorname{Re} x_i| > r$, (cfr. la nota al §2).

Allora le norme rilevanti per la formulazione dei teoremi si stimano al modo seguente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\underline{x} |\partial \underline{u}^0(\underline{x})|^2 &\sim \tilde{v}^2 r, \\ \int_0^t d\tau \int_{\Omega} |\Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) \underline{g}(\underline{y})| d\underline{y} &\sim \frac{\tilde{g} r^2}{\nu} \end{aligned} \quad (14.47)$$

ove la seconda quantità è quella che diviene W_0 in (14.26) nella dimostrazione delle stime di Leray.³ E quindi le quantità rilevanti nella formulazione dei risultati del teorema di Leray sono:

$$\begin{aligned} V_c = \frac{\nu}{L}, \quad T_c = \frac{L^2}{\nu}, \quad V_1 \sim \tilde{v} \left(\frac{r}{L}\right)^{1/2}, \quad W_0 \sim \tilde{g} \frac{r^2}{\nu} \\ R_g^2 \sim \tilde{g} \frac{r^2 L}{\nu^2}, \quad R \sim \frac{\tilde{v} (Lr)^{1/2}}{\nu}, \end{aligned} \quad (14.48)$$

E allora conviene introdurre le scale "locali" di velocità \tilde{V}_c e tempo \tilde{T}_c e i numeri di Reynolds e di intensità locali, \tilde{R} e \tilde{R}_g :

$$\tilde{V}_c = \frac{\nu}{r}, \quad \tilde{T}_c = \frac{r^2}{\nu}, \quad \tilde{R} = \frac{\tilde{v} r}{\nu}, \quad \tilde{R}_g = \frac{\tilde{g} r^3}{\nu^2} \quad (14.49)$$

Ne segue che la scala di tempo caratteristica della soluzione locale di Leray, T_0 , e la stima sulla velocità $D_0(t)$ sono:

$$\begin{aligned} T_0 = \bar{F} T_c (R^4 + R_g^2)^{-1} = \bar{F} \tilde{T}_c (\tilde{R}^4 + \tilde{R}_g^2)^{-1}, \\ D_0(t) \leq F \tilde{v} \left((r^2 (\nu(t - t_0))^{-1})^{1/4} + \tilde{g} r^2 \nu^{-1} \right) \end{aligned} \quad (14.50)$$

che sono, come ci si dovrebbe aspettare, *indipendenti* da L ed essenzialmente ■
gli stessi che si avrebbero se il contenitore avesse lato $\sim r$.

Problemi: Ulteriori risultati della teoria di Leray.

[1] Check that there would be difficulties in showing that the Leray's solutions with initial data $\underline{u}^0 \in W^1(\Omega)$ (i.e. $J_1(0) < \infty$) coincide with the C-weak solutions of §13

³ Per ottenere la stima (14.47) si maggiori Γ con (14.21) e si usi la proprietà di "nullità" di \underline{g} fuori della sferetta di raggio r .

with the same initial data. Show that they would coincide if the C-weak solutions verified property (2) in (14.34), *i.e.* took the initial value with continuity in $L_2(\Omega)$ as $t \rightarrow 0$. (*Idea*: it is not known whether the two notions coincide.)

[2] (Leray) Si mostri che la tecnica usata per ottenere (14.25) può essere adattata a mostrare che se $E(t) = L^3 \sum_{\underline{k}} |\gamma_{\underline{k}}(t)|^2$ allora esistono B_1, B_2 tali che:

$$D_0(t) \leq B_1 \left(D_0(0) \wedge \frac{V_1}{\sqrt[4]{t/T_c}} + W_0 \right) + B_2 \int_0^t \left(\frac{D_0(\tau)^2}{\sqrt{(t-\tau)/T_c}} \wedge \frac{L^{-3}E(\tau)}{((t-\tau)/T_c)^2} \right) \frac{d\tau}{T_c V_c} \quad (14.51)$$

14.58

ove $a \wedge b \equiv \min(a, b)$. (*Idea*: si osserva che $\int_{\Omega} |\Gamma(\underline{x}, t)| d\underline{x} \leq B_1$ per un opportuno B_1 e per ogni t , per la (14.20) e, inoltre, per la disuguaglianza di Schwartz e le (14.22):

$$\sup_{\underline{y}} |\partial_{\underline{y}} T(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau)| \int_{\Omega} \frac{d\underline{y}}{L^3} |\langle \underline{u}(\underline{y}, \tau) \rangle_{\lambda}| |\underline{u}(\underline{y}, \tau)| \leq \frac{L^{-3}E(\tau)}{((t-\tau)/T_c)^2} \frac{C_1}{\nu^2} \quad (14.52)$$

14.59

ove C_1 è un' opportuna costante. Inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{k}} e^{-\nu \underline{k}^2 t} |\gamma_{\underline{k}}(0)| &\leq \sum_{\underline{k}} \frac{e^{-\nu \underline{k}^2 t}}{|\underline{k}|} |\underline{k}| |\gamma_{\underline{k}}(0)| \leq \\ &\leq \left(\frac{J_1(0)}{L^{-1}} \right)^{1/2} \left(\sum_{\underline{k}} \frac{e^{-\nu \underline{k}^2 t}}{\underline{k}^2} \right)^{1/2} \leq B \frac{V_1}{(t/T_c)^{1/4}} \end{aligned} \quad (14.53)$$

14.59a

con B opportuna. E quindi la (14.51) segue.)

[3] (Leray) si ponga $V_0 = D_0(0) + W_0$ e si mostri che se $V_0/V_c < \delta$ è abbastanza piccolo allora la soluzione esiste per tutti i tempi e $D_0(t)$ è stimabile proporzionalmente a V_0 . (*Idea*: Se $E(t) = L^3 \sum_{\underline{k}} |\gamma_{\underline{k}}(t)|^2$, per la stima a priori sull' energia si avrà $L^{-3}E(\tau) \leq B_3 V_0^2$ per ogni τ (c.f.r. (13.12)). Allora per la disuguaglianza del problema [2] precedente si avrà $D_0(t) \leq 2B_1 V_0$ finchè è vero che:

$$B_2 \int_0^t \frac{4B_1^2 V_0^2}{\sqrt{(t-\tau)/T_c}} \wedge \frac{B_3 V_0^2}{((t-\tau)/T_c)^2} \frac{d\tau}{T_c V_c} < B_1 V_0 \quad (14.54)$$

14.60

ove B_2 è la costante del problema [2], ossia spezzando l' integrale fra 0 e $t - T_c$ e fra $t - T_c$ e t , finchè:

$$\frac{V_0^2 B_2}{V_c} \left(\int_0^{t-T_c} \frac{B_3}{((t-\tau)/T_c)^2} \frac{d\tau}{T_c} + \int_{t-T_c}^t \frac{4B_1^2}{\sqrt{(t-\tau)/T_c}} \frac{d\tau}{T_c} \right) < B_1 V_0 \quad (14.55)$$

14.61

ove il primo integrale è assente e il secondo è esteso a $[0, t]$ se $t < T_c$.

Quindi esiste $B < \infty$ che maggiore la somma degli integrali (*per ogni* t): e se $V_0 < V_c B_1/(B B_2)$ (che implica $\delta \leq B_1/(B B_2)$) la $D_0(t) \leq 2B_1 V_0$ varrà per tutti i tempi: si applica poi il teorema di Leray-Serrin.)

[4] (Leray) Supponendo $\underline{g} = \underline{0}$ si mostri che se $\underline{u}^0 \in L_2(\Omega)$ è un dato iniziale per le equazioni di NS esiste un tempo \bar{T} abbastanza grande oltre il le soluzioni L -devoli con \underline{u}^0 come dato iniziale è di classe C^∞ per $t > \bar{T}$. E \bar{T} può essere scelto

$$\bar{T} = B T_c \log_+ \left(E(0) L^{-3} / V_c^2 \right)^{-1} \quad (14.56)$$

14.a0

ove B è opportuna e $\log_+ x$ denota il massimo fra 1 e $\log x$. (*Idea:* Poiché $\underline{g} = \underline{0}$ si ha, c.f.r. la seconda delle (14.8), $\dot{E} \leq nk_0^2 E$ and $E(t) \leq E(0)e^{-\nu k_0^2 t}$, $k_0 = 2\pi L^{-1}$. Inoltre (13.13) danno per tutti i $T \geq 0$ e usando la definizione (14.13):

$$14.a \quad \int_T^{T+T_c} \frac{d\tau}{T_c} J_1(\tau) \leq \frac{1}{2} \frac{E(0)L^{-1}}{\nu T_c} e^{-\nu k_0^2 T} \stackrel{def}{=} V_c^2 r_T^2 \quad (14.57)$$

Quindi se \tilde{T} è abbastanza grande e $T > \tilde{T}$ si ha (c.f.r. (14.15))

$$14.aa \quad T_c F r_T^{-4} > 3T_c \quad (14.58)$$

e in ogni intervallo $[T - 2T_c, T - T_c]$ di lunghezza T_c esisterà un istante t_0 in cui $J_1(t_0) < V_c^2 r_T^2$, cioè in cui il numero di Reynolds $R(t_0)$ sarà più piccolo di r_T , alla destra del quale la soluzione è limitata grazie alla (14.14). In particolare, tenendo presenti le definizioni (14.1) e la (14.14), sarà limitata nell'intervallo $[T, T + T_c]$ da $D_0(t) \leq V_c F_0 r_{\tilde{T}}$ e per l'arbitrarietà di T la stima su $D_0(t)$ vale per tutti i tempi $t \geq \tilde{T} + 2T_c$. Quindi la soluzione regolarizzata è uniformemente limitata al variare del parametro di regolarizzazione e per $t \geq \tilde{T} + 2T_c$ purché la (14.58) valga per $T > \tilde{T} = (4\nu k_0^2)^{-1} \log\left(\frac{3}{F} (E(0)L^{-1}/2\nu T_c)^{-2}\right)$, cioè ricordando la definizione (14.1) la (14.56) segue dalla proposizione IV.)

[5] (Leray) Supponendo $\underline{g} = \underline{0}$ si mostri che se:

$$\left(\frac{(L^{-3}E(0))^{1/2}}{V_c} \right)^{p-3} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\underline{u}(\underline{x}, 0)}{V_c} \right|^p \frac{d\underline{x}}{L^3} \right)^{1/p} < \varepsilon$$

ed ε è abbastanza piccolo, allora esiste una soluzione unica, definita per tutti i tempi e di classe C^∞ . (*Idea:* Simile al problema [2].)

[6] Si consideri (c.f.r. A)) una funzione $\chi(\underline{x}) \geq 0$ di classe C^∞ su R^d , a decrescita rapida all'infinito e con integrale 1; e si definisca $\langle \underline{u} \rangle_N(\underline{x})$ come $\int_{R^d} N^d \chi(N\underline{y}) \underline{u}(\underline{x} + \underline{y}) d\underline{y}$, intendendo \underline{u} estesa a tutto R^d definendola come periodica di periodo L in tutte le d direzioni coordinate. Si dice *equazione di Eulero regolarizzata secondo Leray* l'equazione:

$$\dot{\underline{u}} + \langle \underline{u} \rangle_N \cdot \partial \underline{u} = -\partial p + \underline{g}, \quad \partial \cdot \underline{u} = 0$$

Si adatti la discussione dei problemi del §12 combinandola con le idee svolte in questo paragrafo per dedurre che questa equazione ha una soluzione di classe C^∞ in t, \underline{x} per ogni dato iniziale $\underline{u}^0 \in C^\infty$, e si mostri che vale una stima *a priori* sulla energia cinetica $E(t)$, di \underline{u}^N , indipendente da N (per cui $E(t)^{1/2} \leq E(0)^{1/2} + \|\underline{g}\|_{L_2} t$). (*Idea:* Questo è lo stesso della disuguaglianza corrispondente vista per l'equazione di Eulero, c.f.r. (13.2). Si moltiplichi membro a membro per \underline{u} e si integri su \underline{x} notando che il termine di trasporto non lineare è nullo.)

[7] Si faccia vedere che se \underline{u}^N è una soluzione equazioni regolarizzate (secondo Leray) delle equazioni Eulero si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\underline{u}^N\|_{W_m}^2 \leq G_m \|\underline{u}^N\|_{W_m}^3$$

con G_m indipendente da N . (*Idea:* Segue immediatamente derivando \underline{m} volte l'equazione di Eulero e moltiplicando membro a membro per $\partial \underline{m} \underline{u}$, sommando su \underline{m} con $|\underline{m}| \leq m$ e integrando su \underline{x} : si deve notare che le conclusioni di [6] (e [2]) valgono anche se \underline{u} è sostituito da $\langle \underline{u} \rangle_N$ perchè le derivate commutano con l'operazione di media e il modulo della media è maggiorato dalla media dei moduli perchè la χ è non negativa.)

[8] Si consideri un vortice in R^3 , pensato come un moto di acqua in condizioni normali, con velocità:

$$\underline{u} = \frac{1}{2} \omega(\underline{r}) \wedge \underline{r}, \quad \omega(\underline{r}) = \Gamma e^{-r^2/r_0^2} \underline{k}$$

ove r_0 è una scala di lunghezza e \underline{k} è il versore dell'asse z . Si supponga che il fluido non sia sottoposto a forze di volume. E si calcoli:

(1) Il numero di Reynolds (nel senso di Leray e nel senso discusso in relazione ai "contenitori grandi" nel §14 (G)) di questo campo di velocità.

(2) Supponendo che il vortice abbia raggio $r = 1.m$ con $\Gamma = 1.s^{-1}$ si calcoli il tempo di esistenza della soluzione di Leray (facendo riferimento alla versione della teoria in contenitori grandi, del §14 (G))

(3) Quanto dovrebbe essere grande la scala di tempo Γ^{-1} , c.f.r. [3], data la scala di lunghezza $r = 1.m$ per poter essere sicuri della esistenza di una soluzione globale?

(Idea: si calcolino le costanti della teoria di Leray e la si applichi via la teoria di Leray per contenitori grandi discussa al §14 (G). La viscosità dell'acqua è $0.01cm^2/sec$ e la densità è $1.g/cm^3$ (condizioni normali).

[9] Si faccia vedere che $\Gamma(\underline{x}, t)$ definito in (14.17) è:

$$14.62 \quad \Gamma(\underline{x}, t) = \frac{e^{-\underline{x}^2/4t\nu}}{\sqrt{4\pi\nu t}^3} + \sum_{\underline{n} \neq 0} \frac{e^{-(\underline{x}+\underline{n}L)^2/4t\nu}}{\sqrt{4\pi\nu t}^3} \quad (14.59)$$

e si mostri che, quindi, è sufficiente dimostrare le (14.22) per $|\underline{x}|$ e $|t|$ piccoli. Si noti che occorre fare le verifiche solo per il primo termine, gli altri sono correzioni di classe C^∞ , (c.f.r. problema [12] del §10). (Idea: La (14.18) mostra che Γ è il nucleo dell'equazione del calore (sul toro) e il primo termine in (14.59) is the è il nucleo dell'equazione del calore su R^3 ; tutti i termini sono regolari vicino all'origine tranne il primo.)

[10] Si ponga, in questo e nei seguenti problemi, $\nu = 1$ per semplicità. Si noti che le (14.22) possono essere studiate supponendo alternativamente che $x^2 \leq t$ e $x^2 > t$ e

dimostrando che nel primo caso vale: $|\partial^\alpha P| \leq C_\alpha \left(t^{-(3+|\alpha|)/2} + L^{-3+|\alpha|} \right)$, ove $P =$

Γ ovvero $P = T$; e nel secondo: $|\partial^\alpha P| \leq C_\alpha \left((\underline{x}^2)^{-(3+|\alpha|)/2} + L^{-3+|\alpha|} \right)$, per una opportuna costante C_α .

(Idea: Questa è, nel caso di Γ , una semplice verifica diretta e quindi la validità della (14.22) per Γ può essere supposta. Si noti che il secondo termine di T (c.f.r. (14.20)) non è proporzionale a Γ , ma può essere pensato come il prodotto di convoluzione fra le derivate $\partial_i \partial_j G$ della funzione di Green dell'operatore di Laplace e Γ , c.f.r. (14.22). Si studi quindi:

$$14.63 \quad \partial_i \partial_j G * \Gamma(\underline{x}, t) \equiv \partial_i \partial_j \int_{\Omega} G(\underline{x} - \underline{y}) \Gamma(\underline{y}, t) d\underline{y} \quad (14.60)$$

con $|\underline{x}|$, $|t|$ piccoli e si consideri solo il termine $\underline{n} = 0$ in (14.59), perché gli altri contribuiscono una correzione C^∞ in \underline{x} . Anche ora si sostituirà $G(\underline{x})$ con $-1/4\pi|\underline{x}|$ perché $G(\underline{x}) \equiv -\frac{1}{4\pi|\underline{x}|} + \gamma(\underline{x})$ e $\gamma(\underline{x})$ è di classe C^∞ per $|\underline{x}|$ piccolo e con derivate stimate, banalmente, proporzionalmente a $L^{-3-|\alpha|}$, c.f.r. §10, problemi [12]÷[14].

Dunque, se $t \geq \underline{x}^2$ e se le costanti $C^j, C_{|\alpha|+2}$ sono ben scelte:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \partial_i \partial_j \int \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|} \frac{e^{-\underline{y}^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}^3} d\underline{y}| &\leq C_{|\alpha|+2} \int \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|} \frac{d\underline{y}}{(\underline{y}^2 + t)^{(5+|\alpha|)/2}} \\ &\leq C_{|\alpha|+2} \left(\int_{|\underline{y}| < 2|\underline{x}|} \cdot + \int_{|\underline{y}| > 2|\underline{x}|} \cdot \right) \leq C^1 \frac{1}{t^{(5+|\alpha|)/2}} |\underline{x}|^2 + \int_{|\underline{y}| > 2|\underline{x}|} \cdot \leq \\ &\leq C^2 \left(\frac{1}{t^{(3+|\alpha|)/2}} + \int \frac{d^3 \underline{y}}{|\underline{y}|(\underline{y}^2 + t)^{(5+|\alpha|)/2}} \right) \leq \frac{C^3}{t^{(3+|\alpha|)/2}} \end{aligned}$$

Se invece $t < \underline{x}^2$ si spezzi l'integrale nella parte $|\underline{y}| < |\underline{x}|/8$ e in quella con $|\underline{y}| > |\underline{x}|/8$. È facile vedere che la seconda parte si stima come si vuole (cambiando variabile $\underline{y}' = \frac{\underline{y}}{|\underline{x}|}$ si trova $\leq |\underline{x}|^{-(3+|\alpha|)} \int \frac{d\underline{y}'}{|\underline{e}-\underline{y}'|} |\underline{y}'|^{-(5+|\alpha|)}$, se \underline{e} è il versore $\underline{x}/|\underline{x}|$). Resta, quindi, da

studiare: $\int_{|\underline{y}| < |\underline{x}|/8} \frac{d\underline{y}}{|\underline{x} - \underline{y}|} \partial^{|\underline{\alpha}|+2} \frac{e^{-\underline{y}^2/4t}}{\sqrt{4\pi t^3}}$. Si noti che l'integrale si può eseguire per parti conducendo a vari termini al bordo della sfera $|\underline{y}| = |\underline{x}|/8$ che si maggiorano con il loro massimo (sulla sfera). Si ottengono quantità proporzionali a espressioni come:

$$\begin{aligned} & \int_{|\underline{y}| = |\underline{x}|/8} d\sigma \partial^{p-1} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|} \partial^{|\underline{\alpha}|+2-p} \left(\frac{e^{-\underline{y}^2/4t}}{\sqrt{4\pi t^3}} \right) \leq \\ & \leq \text{cost} \frac{|\underline{x}|^2}{|\underline{x}|^p (x^2 + t)^{(3+|\underline{\alpha}|+2-p)/2}} \leq \text{cost} |\underline{x}|^{-(|\underline{\alpha}|+3)} \end{aligned}$$

(genericamente denotando $\partial^{|\underline{\alpha}|+2-p}$ e ∂^p una derivata rispetto alle componenti di \underline{y} di ordine $|\underline{\alpha}| + 2 - p$ ovvero p).

E poi c'è l'integrale di volume. Questo coinvolge una somma di quantità limitate da $\text{cost} |\underline{x} - \underline{y}|^{-|\underline{\alpha}|-3}$ ossia (poiché $|\underline{y}| \ll |\underline{x}|$) da $\text{cost} |\underline{x}|^{-|\underline{\alpha}|-3}$ per $e^{-\underline{y}^2/4t}/(4\pi t)^{3/2}$ e quindi usando che l'integrale del nucleo del calore, al variare di \underline{y} in tutto lo spazio, vale 1, troviamo appunto che la parte con $t < \underline{x}^2$ è anche stimata da $\text{cost} |\underline{x}|^{-|\underline{\alpha}|-3}$. Le (14.22) quindi seguono).

[11] Utilizzando la prima delle (14.22), si consideri la seconda delle (14.44) e si dimostri che, se $|F| \leq M$, vale (14.45). Una analoga analisi vale per la prima delle (14.44). (*Idea*: sia per esempio $P = \Gamma$, si noti che: $|V(\underline{x}, t) - V(\underline{x}', t)| \leq \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_j \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) - \partial_j \Gamma(\underline{x}' - \underline{y}, t - \tau)| M d\underline{y} d\tau$ e si decomponga l'integrale nella somma degli integrali estesi al dominio $|\underline{y} - (\underline{x} + \underline{x}')/2| < |\underline{x} - \underline{x}'|$ e al complemento. Il primo integrale si stima maggiorando il modulo della differenza con la somma dei moduli e usando le (14.22) per stimare ciascuno dei due termini (eseguendo prima l'integrale su τ e poi quello su \underline{y}). Se B è una opportuna costante risulta: $\leq 2MC_1 \int_0^t \int_{|\underline{y}| < 2|\underline{x} - \underline{x}'|} (\underline{y}^2 + t - \tau)^{-2} d\underline{y} d\tau \leq 2MC_1 B |\underline{x} - \underline{x}'|$. Mentre l'integrale su $|\underline{y} - (\underline{x} + \underline{x}')/2| \geq |\underline{x} - \underline{x}'|$ si stima semplicemente applicando la formula di Taylor all'integrandando maggiorandolo con $\int_0^1 d\sigma |\partial \partial_j \Gamma(\underline{x} + \sigma(\underline{x}' - \underline{x}) - \underline{y}, t - \tau)| |\underline{x}' - \underline{x}|$ e applicando poi la (14.22) per stimare l'espressione con il gradiente come $\leq MC_2 |\underline{x}' - \underline{x}| \int_{|\underline{y}| > |\underline{x}' - \underline{x}|/2} \int_0^t \frac{d\underline{y} d\tau}{(\underline{y}^2 + t - \tau)^{5/2}}$. Si trova:

$$\leq MC_2 |\underline{x}' - \underline{x}| \cdot B \int_{|\underline{x}' - \underline{x}|/2}^L \frac{d\underline{y}}{\underline{y}^3} \leq MC_2 B' |\underline{x} - \underline{x}'| \log \frac{2L}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

se B, B' sono opportune costanti; e questo dimostra quanto voluto anche nel caso $P = T$ (perché la dimostrazione dipende solo dalle (14.22)) e stima K_t^0 , che si vede dunque che può essere addirittura scelto *indipendente da t*.)

[12] Si supponga ora che F sia Hölder continua di esponente $\alpha > 0$, verifichi cioè, per un fissato $0 < \alpha \leq 1$:

$$|F(\underline{x}, t)| + \frac{|F(\underline{x}, t) - F(\underline{x}', t)|}{(L^{-1}|\underline{x} - \underline{x}'|)^\alpha} \leq M_\alpha \quad (14.61)$$

e si faccia vedere che allora la V nella seconda delle (14.44) è differenziabile nel caso $P \equiv \Gamma$ e verifica le (14.46), (il caso $P = T$ è identico perché useremo solo le (14.22)). In modo analogo si deduca poi la validità della (14.46) per la prima delle (14.44). (*Idea*: la derivabilità si studia calcolando il rapporto differenziale nella direzione del vettore \underline{e} :

$$\Delta \equiv \frac{V(\underline{x} + \varepsilon \underline{e}, t) - V(\underline{x}, t)}{\varepsilon} = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} (\partial_j \Gamma(\underline{x} + \varepsilon \underline{e} - \underline{y}, t - \tau) - \partial_j \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau)) F(\underline{y}, \tau)$$

e osservando che se $F(\underline{y}, \tau)$ fosse sostituito da $F(\underline{x}, t)$ il secondo membro sarebbe nullo, per integrazione per parti. Dunque:

$$\Delta \equiv \int_0^t d\tau \int_{\Omega} d\underline{y} \frac{1}{\varepsilon} (\partial_j \Gamma(\underline{x} + \varepsilon \underline{e} - \underline{y}, t - \tau) - \partial_j \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau)) (F(\underline{y}, \tau) - F(\underline{x}, \tau))$$

Si spezzi l' integrale nella parte estesa a $|\underline{y} - \underline{x}| < \varepsilon^\beta$, $\beta < 1$ e nel resto, scegliendo β in modo che $\beta(1 + \alpha) > 1$, se α è l'esponente di Hölder continuità. Il contributo a Δ del termine con $|\underline{y} - \underline{x}| < \varepsilon^\beta$ è allora stimato da:

$$\Delta \leq \frac{2}{\varepsilon} \int_{|\underline{y} - \underline{x}| < 2\varepsilon^\beta} \frac{C_2}{(|\underline{x} - \underline{y}|^2 + (t - \tau))^2} M_\alpha |\underline{y} - \underline{x}|^\alpha d\underline{y} d\tau \leq \bar{C}_2 M_\alpha \varepsilon^{-1} \varepsilon^{(1+\alpha)\beta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

con \bar{C}_2 opportuna, avendo stimato separatamente le $\partial_j \Gamma$, via le (14.22).

Mentre per il contributo all' integrale che viene da $|\underline{y} - \underline{x}| > \varepsilon^\beta$ si usi la formula di Taylor per scrivere l'integrale come:

$$14.65 \quad \sum_i \int_0^1 d\sigma d\tau \int_{|\underline{y} - \underline{x}| \geq \varepsilon^\beta} d\underline{y} \partial_{ij} \Gamma(\underline{x} - \underline{y} + \sigma \varepsilon \underline{e}, t - \tau) (F(\underline{y}, \tau) - F(\underline{x}, \tau)) e_i \quad (14.62)$$

E si noti che l' integrando si stima, per tutti gli ε , \underline{e} (essendo $|\underline{x} - \underline{y}| \geq \varepsilon^\beta \gg \varepsilon$, perchè $\beta < 1$) e ancora usando le (14.21), con: $(\frac{1}{2}|\underline{x} - \underline{y}|^2 + t - \tau)^{-5/2} M_\alpha |\underline{y} - \underline{x}|^\alpha$, ossia con una funzione ε -indipendente il cui integrale è:

$$\int_0^t d\tau \int_\Omega \frac{M_\alpha |\underline{y} - \underline{x}|^\alpha d\underline{y}}{(\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{y})^2 + t - \tau)^{5/2}} \leq C \int_\Omega M_\alpha |\underline{x} - \underline{y}|^{-3+\alpha} d\underline{y} < \bar{C}_\alpha M_\alpha L^\alpha < \infty$$

e quindi l' integrale che esprime il rapporto differenziale converge uniformemente in ε ed allora è lecito in (14.62) passare al limite sotto il segno di integrale per calcolare il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$. Dunque V è derivabile e la sua derivata è data da: $\partial_i V(\underline{x}, t) = \int d\tau \int_\Omega d\underline{y} \partial_{ij} \Gamma(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) (F(\underline{y}, \tau) - F(\underline{x}, \tau))$ e $|\partial_i V(\underline{x}, t)| \leq \bar{C}_\alpha M_\alpha$, (si noti che l' integrale è convergente e maggiorato come descritto nell' analisi appena presentata).

Bibliografia: La teoria di Leray, esposta in questo paragrafo, è tratta da [L].

┐

┐

198

§14: Teoria di Leray, ($d = 3$)

.

└

└

§15 La dimensione frattale delle singolarità dell' equazione di Navier Stokes ($d = 3$).

Ci domandiamo quale possa essere la struttura geometrica dell' eventuale luogo delle singolarità delle soluzioni dell' equazione di Navier Stokes a $d = 3$.

Abbiamo già visto che l' insieme degli istanti t nei quali è possibile osservare una singolarità ha misura nulla.

Ma ovviamente insiemi di misura nulla possono essere piuttosto complessi, e anche grandi in altri sensi. Si pensi ad esempio all' insieme di Cantor, che è non numerabile e ottenuto cancellando da un intervallo I l' intervallo concentrico aperto di lunghezza $1/3$ di quella di I e poi ripetendo ricorsivamente l' operazione per ognuno degli intervalli rimanenti, detti intervalli di “ n -ma generazine dopo n passi; ovvero ai punti razionali che sono densi.

(A) Dimensione e misura di Hausdorff.

Una interessante misura geometrica della grandezza di un insieme è data dalla *dimensione* di Hausdorff e dalla *misura* di Hausdorff.

1. *Definizione:* La α -misura di Hausdorff di un insieme di A in uno spazio metrico M si definisce considerando per ogni $\delta > 0$ tutti i ricoprimenti \mathcal{C}_δ di A a mezzo di insiemi F di diametro $0 < d(F) \leq \delta$ e ponendo:

$$15.1 \quad \mu_\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{C}_\delta} \sum_{F \in \mathcal{C}_\delta} d(F)^\alpha \quad (15.1)$$

Osservazioni:

(1) È chiaro che il limite su δ esiste perchè la quantità $\inf_{\mathcal{C}_\delta} \dots$ è monotona non decrescente.

(2) Si può inoltre dimostrare che la funzione d' insieme $A \rightarrow \mu_\alpha(A)$ è completamente additiva sulla più piccola famiglia di insiemi contenente gli insiemi chiusi ed invariante rispetto alle operazioni di complementazione e unione numerabile (σ -algebra Σ degli insiemi boreliani), c.f.r. [DS].

Si vede subito che dato $A \in \Sigma$ esiste α_c tale che:

$$15.2 \quad \begin{aligned} \mu_\alpha(A) &= \infty & \text{se } \alpha < \alpha_c \\ \mu_\alpha(A) &= 0 & \text{se } \alpha > \alpha_c \end{aligned} \quad (15.2)$$

ed allora è naturale porre la seguente definizione:

2. *Definizione:* Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ la quantità α_c , (15.2), si dice *dimensione di Hausdorff di A* , mentre $\mu_{\alpha_c}(A)$ si dice *misura di Hausdorff di A* .

È facile verificare che:

(1) Gli insiemi numerabili in $[0, 1]$ hanno dimensione (e misura) di Hausdorff nulla.

(2) La dimensione di Hausdorff delle superfici regolari n -dimensionali in R^d è n e, inoltre, la misura di Hausdorff di ogni loro sottoinsieme boreliano definisce una misura che è equivalente alla misura di area.

(3) L'insieme di Cantor, definito anche come l'insieme di tutti i numeri in $[0, 1]$ che nella rappresentazione in base 3 non contengono la cifra 1, ha dimensione di Hausdorff:

$$15.3 \quad \alpha_c = \log_3 2 \quad (15.3)$$

Infatti con 2^n segmenti disgiunti di lato 3^{-n} , univocamente determinati (i segmenti della n -ma generazione), si ricopre tutto l'insieme C di Cantor; e quindi:

$$15.4 \quad \mu_{\alpha, \delta} \stackrel{def}{=} \inf_{C_\delta} \sum_{F \in C_\delta} d(F)^\alpha \leq 1 \quad \text{se} \quad \alpha = \alpha_0 = \log_3 2 \quad (15.4)$$

e $\mu_{\alpha_0}(C) \leq 1$: e cioè $\mu_\alpha(C) = 0$ se $\alpha > \alpha_0$. Inoltre se $\alpha < \alpha_0$ il ricoprimento C^0 che realizza il minimo valore di $\sum_{F \in C_\delta} d(F)^\alpha$ con $\delta = 3^{-n}$, c.f.r. problema [3], è proprio quello appena considerato dei 2^n intervalli di lunghezza 3^{-n} della n -ma generazione e il valore della somma su tale ricoprimento diverge per $n \rightarrow \infty$. Pertanto $\mu_\alpha(C) = \infty$ se $\alpha < \alpha_0$ e quindi $\alpha_0 \equiv \alpha_c$ e $\mu_{\alpha_c}(C) = 1$.

(B) Dimensione di Hausdorff delle singolarità temporali in NS.

Vediamo ora di stimare la dimensione di Hausdorff dell'insieme dei tempi $t \leq T < \infty$ in corrispondenza dei quali una soluzione debole "di Leray", ossia una soluzione debole del tipo di quelle discusse al §14, definizione 2, (E), è singolare. Qui T è un tempo prefissato, arbitrariamente, *a priori*.

Per semplicità supponiamo che la densità di forza di volume \underline{g} sia nulla e ricordiamo che al §14 si è mostrato che se al tempo t_0 si ha $J_1(t_0) = L^{-1} \int (\partial \underline{u})^2 d\underline{x} < \infty$, ossia se il numero di Reynolds $R(t_0) = J_1(t_0)^{1/2}/V_c \equiv V_1/V_c$, cfr. (14.13), è $< +\infty$, allora la soluzione si mantiene regolare in un intervallo di tempo $(t_0, t_0 + \tau]$ con (si veda la proposizione II del §14 e la (14.34)):

$$15.5 \quad \tau = F \frac{T_c}{R(t_0)^4 + R_g^2} \quad (15.5)$$

Da questo seguirà, come vedremo, che esistono $A > 0, \gamma > 0$ tali che, se:

$$15.6 \quad \liminf_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma}{T_c} \right)^\gamma \int_{t-\sigma}^t \frac{d\vartheta}{\sigma} R^2(\vartheta) < A \quad (15.6)$$

allora $t > \sigma$ e la soluzione è regolare in un intervallo che contiene t e quindi l'istante t è un istante in cui la soluzione è regolare. Qui, come nel seguito, si potrebbe fissare $\gamma = 1/2$: ma γ viene lasciato arbitrario proprio per mettere in luce come la scelta $\gamma = 1/2$ sia la "migliore".

Mostriamo dapprima che, supponendo la (15.6), allora segue che t è un istante in cui la soluzione è regolare. Infatti allora esiste una successione $\sigma_i \rightarrow 0$ tale che:

$$15.7 \quad \int_{t-\sigma_i}^t \frac{d\vartheta}{\sigma_i} R^2(\vartheta) < A \left(\frac{\sigma_i}{T_c} \right)^{-\gamma} \quad (15.7)$$

Pertanto, essendo il membro di sinistra una media sul tempo, deve esistere $\vartheta_{0i} \in (t - \sigma_i, t)$ tale che:

$$15.8 \quad R^2(\vartheta_{0i}) < A \left(\frac{\sigma_i}{T_c} \right)^{-\gamma} \quad (15.8)$$

e allora la soluzione è regolare nell' intervallo $(\vartheta_{0i}, \vartheta_{0i} + \tau_i)$ di lunghezza τ_i che può esser presa almeno:

$$15.9 \quad \tau_i = FT_c \frac{(\sigma_i/T_c)^{2\gamma}}{A^2 + R_g^2(\sigma_i/T_c)^{2\gamma}} > \sigma_i \quad (15.9)$$

purchè $\gamma \leq 1/2$, σ_i sia abbastanza piccolo e se A è abbastanza piccolo (se $\gamma = \frac{1}{2}$ allora $2A^2 < F$). In queste condizioni l' ampiezza dell' intervallo di regolarità è più lungo di σ_i e *quindi contiene t stesso*.

Ne segue che, se t è nell' insieme S degli istanti in cui si ha singolarità, deve essere:

$$15.10 \quad \liminf_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma}{T_c} \right)^{\gamma} \int_{t-\sigma}^t \frac{d\vartheta}{\sigma} R^2(\vartheta) \geq A \quad \text{se } t \in S \quad (15.10)$$

e cioè ogni punto di singolarità è ricoperto da una famiglia di infiniti intervalli F di diametri σ *arbitrariamente piccoli* verificanti:

$$15.11 \quad \int_{t-\sigma}^t d\vartheta R^2(\vartheta) \geq \frac{A}{2} \sigma \left(\frac{\sigma}{T_c} \right)^{-\gamma} \quad (15.11)$$

Dal teorema di ricoprimento di Vitali (cfr. problema [1]) segue che, dato $\delta > 0$, si può trovare una famiglia numerabile di intervalli F_1, F_2, \dots , con $F_i = (t_i - \sigma_i, t_i)$, due a due disgiunti e verificanti la (15.11) e $\sigma_i < \delta/4$, tali che gli intervalli $5F_i \stackrel{\text{def}}{=} (t_i - 7\sigma_i/2, t_i + 5\sigma_i/2)$ (ottenuti dilatando gli F_i di un fattore 5 rispetto al loro centro) ricoprono S :

$$15.12 \quad S \subset \cup_i 5F_i \quad (15.12)$$

Consideriamo allora il ricoprimento \mathcal{C} generato dagli insiemi $5F_i$ e calcoliamo la somma in (15.1) con $\alpha = 1 - \gamma$:

$$15.13 \quad \begin{aligned} \sum_i (5\sigma_i) \left(\frac{5\sigma_i}{T_c} \right)^{-\gamma} &= 5^{1-\gamma} \sum_i \sigma_i \left(\frac{\sigma_i}{T_c} \right)^{-\gamma} < \\ &< \frac{2 \cdot 5^{1-\gamma}}{A} \sum_i \int_{F_i} d\vartheta R^2(\vartheta) \leq \frac{2 \cdot 5^{1-\gamma}}{A} \int_0^T d\vartheta R^2(\vartheta) < \infty \end{aligned} \quad (15.13)$$

ove si sono utilizzate le stime a priori sulla vorticità del §13, e si deve ricordare (cfr. il commento alla (15.9)) che $\gamma \leq 1/2$ è una condizione necessaria perchè quanto dedotto sia valido.

Dunque è chiaro che per ogni $\alpha \geq 1/2$ si ha $\mu_\alpha(S) < \infty$ (scegliamo infatti $\alpha = 1 - \gamma$, con $\gamma \leq 1/2$) e pertanto la dimensione di Hausdorff di

S è $\alpha_c \leq 1/2$. Ovviamente la scelta che dá il migliore risultato è proprio $\gamma = 1/2$.

Anzi si può vedere che $\mu_{1/2}(S) = 0$: infatti sappiamo che S ha misura nulla e dunque esiste un insieme aperto $G \supset S$ di misura più piccola di un prefissato $\varepsilon > 0$. E ovviamente possiamo imporre che gli intervalli F_i prima considerati siano anche tali che $F_i \subset G$: quindi possiamo sostituire l' integrale nel membro di destra di (15.13) con l' integrale esteso a G e quindi, poichè l' integrando è sommabile troveremo che il valore dell' integrale può essere supposto piccolo quanto si vuole. Ne segue che $\mu_{1/2}(S) = 0$.

(C) *Dimensione di Hausdorff delle singolarità spazio-temporali in NS.*

Diverso è il problema di quale sia la dimensione di Hausdorff dei punti $(\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ di singolarità per le soluzioni deboli di Leray.

Infatti, *a priori*, potrebbe addirittura capitare che ad uno degli istanti $t \in S$ tutti i punti (\underline{x}, t) , con $\underline{x} \in \Omega$, siano singolari e quindi l' insieme S_0 dei punti di singolarità pensato come insieme nello spazio tempo potrebbe avere dimensione 3 (e anche 3.5 se si tien conto della dimensione delle singolarità nel tempo discussa in (B)).

Ma, con un pó di ottimismo, si può pensare che sia valida una "versione locale nello spazio" del teorema di Leray, *c.f.r.* proposizione II, §14, che è solo locale nel tempo. Sotto l' influenza di questo desiderio esaminiamo allora come si possa pervenire ad una stima della dimensione di Hausdorff dell' insieme S_0 delle singolarità spazio-temporali di \underline{u} .

Le nozioni di tempo caratteristico T_c , di velocità caratteristiche V_c , V_1 e W_0 , di accerlerazione caratteristica $\sqrt{G_0}$, di grandezza caratteristica della forza esterna R_g introdotte in §14 e con assai rilevante nella teoria delle soluzioni L-deboli di Leray erano "globali" nel senso che erano associate a proprietà dell' intero fluido in Ω e non erano associate ad alcuna particolare regione o punto di Ω .

Queste nozioni possono essere "localizzate", ossia si può loro dare un significato diverso in punti differenti di Ω , in modo piuttosto ingenuo: cioè dato $\underline{x} \in \Omega$ ed una scala di lunghezza r possiamo immaginare che l' intero fluido consista della parte contenuta in una sfera $S(\underline{x}, r)$ di raggio r attorno a \underline{x} e quindi definire i vari valori caratteristici sostituendo la grandezza del contenitore L con r e il contenitore con la sferetta $S(\underline{x}, r)$. Quindi consoderare un piccolo volume di fluido come in qualche modo simile, a parte ovvii riscalamenti, al fluido che occupa una regione grande è l' idea naturale che sta dietro le definizioni che seguono e quante ipotesi esse ispirano: è un' idea che si è già dimostrata fruttuosa nell' analisi dei "contenitori grandi" nel §14. (G).

Si consideri un dato istante ϑ e si definisca il *numero di Reynolds locale* su scala r come rapporto fra una grandezza che caratterizza la variazione della velocità su scala r , intorno ad \underline{x} , e una velocità caratteristica associata alla dimensione r . Sarà il rapporto fra $V_{1r} \stackrel{def}{=} (r^{-1} \int_{S(\underline{x}, r)} (\partial_{\underline{x}} \underline{u})^2 d\underline{\xi})^{1/2}$ e

$V_{cr} = \nu r^{-1}$ cioè:

$$15.14 \quad R_r^2(\vartheta) \stackrel{def}{=} \left(\frac{V_{1r}}{V_{cr}}\right)^2 = \frac{r}{\nu^2} \int_{S(\underline{x}, r)} (\underline{\partial} u(\underline{\xi}, \vartheta))^2 d\underline{\xi} < \infty \quad (15.14)$$

ove $S(\underline{x}, r)$ è la sfera di raggio r e centro \underline{x} .

Similmente, in analogia alla (14.13), possiamo definire la “grandezza locale” della forza esterna “localizzando” la definizione in (14.13).

Sia $G_r = r^{-3} \int_{S(\underline{x}, r)} |\underline{g}(\underline{x})|^2 d\underline{x}$ una scala di accelerazione locale; sia W_{0r} la corrispondente scala di velocità $W_{0r} = T_{cr} \sqrt{G_{0r}}$ con $T_{cr} = r^2 \nu^{-1}$, c.f.r. (14.1), (14.13), si definisca la grandezza adimensionale della forza esterna R_{gr} , definita in modo naturale “localizzando” la definizione in (14.13):

$$15.16 \quad R_{gr} \stackrel{def}{=} \frac{W_{0r}}{V_{cr}} = \frac{T_{cr} \sqrt{G_{0r}}}{V_{cr}} = \frac{r^3}{\nu^2} \left(r^{-3} \int_{S(\underline{x}, r)} |\underline{g}(\underline{x})|^2 d\underline{x} \right)^{1/2} \quad (15.15)$$

e quindi, poiché la forza esterna è supposta regolare, $R_{gr}^2 \leq C \tilde{g}^2 r^6 \nu^{-4}$ ove C è una opportuna costante geometrica e \tilde{g} è una stima del massimo della densità di forza di volume \underline{g} .

Ipotesi (di lavoro): Una “versione locale” del teorema di Leray in questione “potrebbe” dire sotto la condizione (15.14) la soluzione è regolare nella regione di spazio-tempo:

$$15.14a \quad \underline{x} \in S(\underline{x}, r) \quad \text{e} \quad t \in (\vartheta, \vartheta + \frac{F T_{cr}}{R_r^4 + R_{gr}^2}) \quad (15.16)$$

o, almeno, nelle vicinanze di $\{\underline{x}\} \times (\vartheta, \vartheta + \frac{1}{2} F T_{cr} (R_r^4 + R_{gr}^2)^{-1})$.

Ovviamente una tale affermazione è assai forte, per nulla conseguenza di quanto finora studiato, e sorprendente: poichè infatti il fluido è incompressibile si ha in esso velocità di propagazione infinita delle onde sonore e quindi si può temere che una singolarità che all’istante t abbia luogo in una posizione $\underline{\xi}$ lontana da \underline{x} possa giungere, in un tempo arbitrariamente piccolo, vicino ad \underline{x} , anche se nessuna singolarità era presente vicino ad \underline{x} all’istante t .

Ma non è assurdo che la (15.14) o qualcosa di simile implichi (per la supposta validità di una versione locale del teorema di Leray) la regolarità in \underline{x} per un piccolo tempo successivo perchè è anche difficile che l’onda che propaga la singolarità lontana da \underline{x} non si dissolva subito per l’attrito. Dopo tutto il teorema di Leray–Serrin, cfr. §14, esclude la possibilità di onde d’urto in un fluido incompressibile di NS.

Se dunque, per un momento, supponiamo che la (15.14) implichi la regolarità della soluzione in un intorno dei punti (\underline{x}, t) con $t \in (\vartheta, \vartheta + F T_{cr} (R_r^4(\vartheta) + R_{gr}^2)^{-1})$, c.f.r. (15.16), allora possiamo usare le idee già impiegate per stimare la la dimensione di Hausdorff delle singolarità temporali.

Infatti se la regolarità di \underline{u} vale nelle vicinanze di \underline{x}, ϑ segue (dalla sola regolarità di \underline{u}) che $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{r^2} \int_{t-r^2/\nu}^t d\vartheta R_r^2(\vartheta) = 0$ (perché l’integrale avrebbe grandezza $O(r^3)$).

Viceversa se la (15.14) implicasse regolarità in una regione spazio-temporale specificata in ♣14.14a, intorno ad \underline{x} e nell' intervallo di tempo $(\vartheta, \vartheta - r^2\nu^{-1})$ (proprietà che, si tenga presente, consideriamo allo scopo di stabilire l' intuizione che ci guidi alla formulazione della strada da seguire nell' analisi che seguirà), allora si potrebbe argomentare al modo seguente.

Supponiamo che *sia vero che*:

$$15.17 \quad \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{r^2} \int_{t-r^2/\nu}^t d\vartheta R_r^2(\vartheta) < \varepsilon \quad (15.17)$$

per un $\varepsilon > 0$. Allora esisterebbe una successione $r_i \rightarrow 0$ tale che:

$$15.18 \quad \frac{\nu d\vartheta}{r_i^2} \int_{t-r_i^2/\nu}^t R_{r_i}^2(\vartheta) < \varepsilon \quad (15.18)$$

E così, essend questa una media temporale, esisterebbe un istante $\vartheta_i \in (t, t - r_i^2\nu^{-1})$ in cui $R(\vartheta_i)^2 < \varepsilon$ e anche, per la regolarità della forza esterna \underline{g} , $R_{gr}^2 \leq C^2 \tilde{g}^2 r_i^6 \nu^{-4} < \varepsilon^2$ se r_i è abbastanza piccolo. is small enough.

Allora ne seguirebbe la regolarità nell' intorno di:

$$15.19 \quad \underline{x} \times (\vartheta_i, \vartheta_i + \frac{r_i^2}{\nu} \frac{F}{C^2 \tilde{g}^2 r_i^6 \nu^{-4} + \varepsilon^2}) \quad (15.19)$$

e quindi in (\underline{x}, t) se $2^{-1}F\varepsilon^{-2} > 1$ come conseguenza della “ipotesi di lavoro” sopra menzionata..

Ne seguirebbe che l' insieme S_0 dei punti singolari potrebbe essere ricoperto ■ con insiemi $C_r = S(\underline{x}, r) \times (t - r^2\nu^{-1}, t]$ con r arbitrariamente piccoli.¹ che verificherebbero:

$$15.20 \quad \frac{1}{r\nu} \int_{t-r^2\nu^{-1}}^t d\vartheta \int_{S(\underline{x}, r)} d\underline{x} (\partial \underline{u})^2 > \varepsilon \quad (15.20)$$

(che è la negazione della (15.17)).

E, con un teorema di ricoprimento del tipo di quello di Vitali (c.f.r. problemi [1],[2]), potremmo trovare una famiglia F_i di insiemi della forma $F_i = S(\underline{x}_i, r_i) \times (t_i - \nu^{-1}r_i^2, t_i]$ due a due disgiunti e tali che gli insiemi $5F_i =$ insieme dei punti (\underline{x}', t') a distanza $\leq 6r_i$ da punti di F_i ricopre l' insieme S_0 delle singolarità.² Si valuterebbe poi la somma in (15.1) per un tale

¹ Si noti che perchè ciò sia vero è sufficiente richiedere la validità delle (15.17) con il limite inferiore: richiediamo qui il limite superiore perchè, come si vedrà in seguito, la (15.17) è, in questa forma più restrittiva, più vicina alla proprietà che realmente si riesce a dimostrare.

² Qui la costante 5, come pure le altre costanti numerich che si incontreranno, quali 5, 6, 18 non hanno alcuna importanza per i nostri propositi e sono semplicemnte costanto semplici per le quali le stime sono valide.

ricoprimento, usando il fatto che gli insiemi F_i sono due a due disgiunti e che $5F_i$ ha diametro, se $\max r_i$ è abbastanza piccolo, non superiore a $18r_i$:

$$15.21 \quad \sum_i (18r_i) \leq \frac{36}{\nu\varepsilon} \sum_i \int_{F_i} (\underline{\partial}u)^2 d\underline{\xi} dt \leq \frac{36}{\nu\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} (\underline{\partial}u)^2 d\underline{\xi} dt < \infty \quad (15.21)$$

e cioè la 1-misura di Hausdorff $\mu_1(S_0)$ sarebbe $< \infty$ e quindi la dimensione di Hausdorff di S_0 sarebbe ≤ 1 .

Poichè S_0 ha misura nulla, essendo contenuto in $\Omega \times S$ ove S è il già discusso insieme dei tempi ai quali può apparire una singolarità, *c.f.r.* (15.10), segue (sempre dai teoremi di ricoprimento) che in realtà è possibile scegliere gli insiemi F_i in modo che la loro unione U sia contenuta in un insieme aperto G che differisca da S_0 per un insieme di misura che eccede di tanto poco quanto si vuole quella di S_0 , (che è nulla): si segue lo stesso metodo già impiegato dopo la (15.13) nel caso delle singolarità temporali. Quindi si può sostituire l'ultimo integrale in (15.21) con un integrale esteso alla unione U degli F_i : quest'ultimo può essere reso piccolo quanto si vuole facendo tendere a zero la misura di U . Ne segue che non solo la dimensione di Hausdorff di S_0 è ≤ 1 , ma anche che $\mu_1(S_0) = 0$.

Osservazione: Si potrebbe dunque escludere che il luogo S_0 dei punti singolari contenga una curva regolare: le singolarità, se esistenti, non si possono nè "spostare" lungo traiettorie (altrimenti la dimensione di S sarebbe $1 > 1/2$) nè distribuirsi a tempo fisso su linee e, quindi, in un certo senso devono apparire isolate e immediatamente sparire (sempre che esistessero davvero).

Tornando alla condizione (15.16), che sta dietro la ipotesi di lavoro precedente, vediamo che la (15.16) può essere sostituita, ai fini dell'argomento sopra discusso, dalla affermazione più debole che la (15.17) sia soddisfatta con ε abbastanza piccolo, che implica la regolarità in (\underline{x}, t) . Ovvero, con una ovvia modifica all'argomento discusso, basterebbe che la regolarità in (\underline{x}, t) fosse implicata da una relazione simile alla (15.17) in cui il cilindro $S(\underline{x}, r) \times (t - r^2\nu^{-1}, t]$ è sostituito da un cilindro simile che ha (\underline{x}, t) nell'interno, ossia se la regolarità in (\underline{x}, t) fosse implicata da una relazione del tipo:

$$15.22 \quad \begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu}{r^2} \int_{t-r^2/2\nu}^{t+r^2/2\nu} \left(\frac{r}{\nu^2} \int_{S(\underline{x}, r)} d\vartheta d\underline{\xi} (\underline{\partial}u)^2 \right) &< \varepsilon, \quad \text{or} \\ \limsup_{r \rightarrow 0} r^{-1} \int_{t-r^2/2\nu}^{t+r^2/2\nu} \int_{S(\underline{x}, r)} \frac{d\vartheta}{\nu} d\underline{\xi} (\underline{\partial}u)^2 &< \varepsilon \end{aligned} \quad (15.22)$$

con ε abbastanza piccolo.

E questa proprietà (molto) più debole della ♣15.15 può essere effettivamente dimostrata rigorosamente [CKN]: ne discuteremo i dettagli al §16.

Osservazione: Una questione interessante è se la ♣15.15 sia essa stessa vera. Però la vera congettura (piuttosto controversa e che favorisco) che

governa la questione è che, in realtà, "se il dato iniziale \underline{u}^0 è in $C^\infty(\Omega)$ allora esiste una soluzione alla equazione di Navier Stokes che è di classe C^∞ in (\underline{x}, t) ". Cioè $S_0 = \emptyset$.

Il problema è però aperto: non si conoscono controesempi (cioè soluzioni deboli singolari con dati iniziali e forza esterna di classe C^∞) ma la questione è molto dibattuta e vegono spesso proposte congetture alternative, (cfr. [PS]).

A questo proposito è interessante tener conto che se $d \geq 4$ è, invero, possibile mostrare che *non tutti* i dati iniziali regolari evolvono in soluzioni regolari: in tali casi si possono invero costruire controesempi, cfr [Sc].

Problemi.

[1]: (Vitali) Sia S un insieme qualunque contenuto in una sfera di R^n . Si consideri un *ricoprimento di Vitali* di S con sferette chiuse e con la *proprietà di Vitali*: ossia tale che ogni punto di S è contenuto in una famiglia di sferette del ricoprimento i cui raggi hanno estremo inferiore nullo. Si mostri che se λ è abbastanza grande è possibile trovare una famiglia numerabile F_1, F_2, \dots di sferette due a due disgiunte del ricoprimento tale che $\cup_i \lambda F_i \supset S$ ove $5F_i$ denota la sferetta con lo stesso centro di F_i e raggio λ volte quello di F_i . Inoltre λ può essere scelto indipendente da S , si veda anche [2]. (*Idea*: sia \mathcal{F} il ricoprimento e sia $a = \max_{\mathcal{F}} \text{diam}(F)$. Si ponga $a_k = a2^{-k}$ e sia \mathcal{F}_1 una famiglia *massimale* di sfere *due a due disgiunte*, in \mathcal{F} , di raggi $\geq a2^{-1}$ e $< a$. Similmente sia \mathcal{F}_2 un insieme massimale di sferette con raggi fra $a2^{-2}$ e $a2^{-1}$ disgiunte fra loro e da quelle della famiglia \mathcal{F}_1 . Induttivamente si definiscono $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k, \dots$. È chiaro che se $x \notin \cup_k \mathcal{F}_k$ deve essere: $\text{distanza}(x, \mathcal{F}_k) < \lambda a2^{-k}$ per qualche k , se λ è abbastanza grande. Se invero δ è il raggio di una sferetta S_δ che contiene x e se $a2^{-k_0} \leq \delta < a2^{-k_0+1}$ allora il punto di S_δ più distante da x si trova al più a distanza $\leq \delta < 2a2^{-k_0}$; e se, quindi, fosse $d(x, \mathcal{F}_{k_0}) \geq 2a2^{-k_0}$ troveremmo che l'insieme \mathcal{F}_{k_0} potrebbe essere ampliato aggiungendovi S_δ , contro la sua supposta massimalità.)

[2]: Si faccia vedere che se le sferette del problema [1] sono sostituite con *cilindri parabolici* prodotti cartesiani di una sferetta di raggio r nelle prime k coordinate e una di raggio r^α , con $\alpha \geq 1$ nelle $n - k$ rimanenti coordinate, allora il risultato vale lo stesso eventualmente cambiando il valore dell'opportuno fattore λ di omotetia (rispetto al centro di F_i). Si mostri che se $\alpha = 1, 2$ allora $\lambda = 5$ è sufficiente (e, in generale, $\lambda = (4^2 + 2^{2(1+\alpha)/\alpha})^{1/2}$ è sufficiente).

[3]: Si verifichi che la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor C è effettivamente $\log_3 2$, see (15.3). *Idea*: Resta da vedere, data la (15.4), che se $\alpha < \alpha_0$ allora $\mu_\alpha(C) = \infty$. Se $\delta = 3^{-n}$ il ricoprimento \mathcal{R}_n di C con gli intervalli della n -ma generazione è il "migliore" fra quelli con intervalli a diametro massimo $\leq 3^{-n}$ perchè un altro ricoprimento potrà sempre essere "raffinato" togliendo a ciascun intervallo i punti che sono fuori dagli intervalli della n -ma generazione e la disuguaglianza $1 < 23^{-\alpha}$ per $\alpha < \log_3 2$ mostra che non conviene suddividere ulteriormente gli intervalli di \mathcal{R}_n al fine di diminuire il valore della somma $\sum |F_i|^\alpha$. Quindi per $\delta = 3^{-n}$ il minimo valore della somma è $2^n 3^{-n\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Bibliografia: [DS], vol. I, p. 174, (dimensione di Hausdorff); [Ka] p. 74, (teorema di ricoprimento di Vitali), si veda anche [DS]; [Sc],[CKN] (dimensione frattale delle singolarità).

§16 Omogeneità locale e regolarità. La teoria CKN.

La teoria delle singolarità spazio temporali del §15 é basata su alcune semplici *disuguaglianze cinematiche*, che dunque nulla hanno a che vedere con l' equazione di NS, e sulla conservazione locale dell' energia per le equazioni di NS.

Supporremo che il volume Ω sia il toro 3-dimensionale (cioè condizioni periodiche al bordo) e che il dato iniziale sia C^∞ .

(A) Bilancio energetico nelle soluzioni deboli.

La relazione di conservazione dell' energia per le equazioni regolarizzate (14.2) dice che la variazione dell' energia cinetica in un dato volumetto Δ del fluido, in un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, più l' energia ivi dissipata per attrito, è uguale alla somma dell' energia cinetica che, per $t \in [t_0, t_1]$, entra nel volumetto più il lavoro delle forze di pressione più il lavoro delle eventuali forze di volume, *c.f.r.* (1.17). La forma analitica di questa relazione si ottiene semplicemente moltiplicando scalarmente i due membri della prima delle (14.2) per \underline{u} e integrando sul volumetto Δ e sull' intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

La relazione che si ottiene può essere generalizzata al caso in cui il volumetto ha una forma dipendente dal tempo. E una relazione ancora più generale può essere ottenuta moltiplicando ambo i membri di (14.2) per $\varphi(\underline{x}, t)\underline{u}(\underline{x}, t)$ ove φ è una funzione di classe $C^\infty(\Omega \times (0, s])$ con $\varphi(\underline{x}, t)$ nulla per t vicino a 0 (qui s è un parametro positivo).

I casi precedenti si ottengono come casi limite di scelte della φ nel limite in cui diviene la funzione caratteristica del volumetto spazio-temporale $\Delta \times [t_0, t_1]$. L' uso di una funzione $\varphi(\underline{x}, t)$ regolare è utile, specie nella situazione abbastanza “disperata” in cui ci si trova con la teoria di Leray, in cui le “soluzioni” \underline{u} (ottenute rimuovendo, nelle (14.2), la regolarizzazione) sono solo soluzioni deboli e quindi le relazioni che si ottengono possono essere interpretate come valide almeno dopo opportune integrazioni per parti che permettono di evitare di introdurre derivate del campo \underline{u} (la cui esistenza non é garantita dalla teoria) a spese dell' apparizione di derivate della “funzione di prova” φ .

Supporremo che le forze di volume siano assenti: solo per semplicità perchè quanto dedurremo può essere banalmente esteso al caso in cui sul fluido agisca anche una forza di volume \underline{f} regolare di classe C^∞ , ad esempio.

Eseguendo effettivamente il calcolo descritto per dedurre il bilancio dell' energia per la equazione regolarizzata (14.2), e dopo alcune integrazioni per parti* si perviene alla seguente relazione:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\underline{\xi} |\underline{u}(\underline{\xi}, s)|^2 \varphi(\underline{\xi}, s) + \nu \int_0^s dt \int_{\Omega} \varphi(\underline{\xi}, t) |\underline{\partial} \underline{u}(\underline{\xi}, t)|^2 d\underline{x} = \\
 & = \int_0^s \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\varphi_t + \nu \Delta \varphi) |\underline{u}|^2 + |\underline{u}|^2 \langle \underline{u} \rangle_{\lambda} \cdot \underline{\partial} \varphi + p \underline{u} \cdot \underline{\partial} \varphi \right] dt d\underline{\xi}
 \end{aligned} \tag{16.1}$$

* Si ricordi che, per quanto discusso al §14, le soluzioni della (14.2) sono di classe $C^\infty(\Omega \times [0, \infty))$ e quindi non occorre giustificare la liceità delle integrazioni per parte.

ove $\varphi_t \equiv \partial_t \varphi$ e $\underline{u} = \underline{u}^\lambda$ è in realtà dipendente anche dal parametro di regolarizzazione λ e p è la pressione $p = -\sum_{ij} \Delta^{-1} \partial_i \partial_j (u_i u_j)$.

Si supponga ora che la soluzione della (14.2) con fissato dato iniziale \underline{u}_0 converga, per $\lambda \rightarrow \infty$, ad una soluzione \underline{u} “di Leray”, descritta nel §14 al punto (E) e nella definizione 2, eventualmente su una sottosuccessione $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Segue dalla (16.1) che la soluzione di Leray \underline{u} verifica la *disuguaglianza dell'energia*:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\underline{u}(\underline{x}, s)|^2 \varphi(\underline{x}, s) d\underline{x} + \nu \int_{t \leq s} \int_{\Omega} \varphi(\underline{x}, t) |\underline{\partial} \underline{u}(\underline{x}, t)|^2 d\underline{x} dt \leq \\ 16.2 \quad & \leq \int_{t \leq s} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\varphi_t + \nu \Delta \varphi) |\underline{u}|^2 + |\underline{u}|^2 \underline{u} \cdot \underline{\partial} \varphi + p \underline{u} \cdot \underline{\partial} \varphi \right] d\underline{x} dt \end{aligned} \quad (16.2)$$

ove la pressione p è data da $p = -\sum_{ij} \Delta^{-1} \partial_i \partial_j (u_i u_j) \equiv -\Delta^{-1} \underline{\partial}(\underline{u} \underline{u}) \equiv -\Delta^{-1} (\underline{\partial} \underline{u})^2$.

Osservazioni:

- 1) È interessante notare che in questa relazione ci si aspetterebbe il segno di =: il fatto che, come vedremo, non si ottiene altro che una disuguaglianza significa che il passaggio al limite necessario per costruire la soluzione di Leray può introdurre una “dissipazione spuria” che non c'è modo di controllare (con quanto fino ad oggi noto sulle soluzioni di Leray).
- 2) questo “strano” fenomeno è solo un riflesso della nostra incapacità di svolgere una teoria completa della equazione di NS, ed è congetturabile che in realtà non ci sia alcuna dissipazione spuria e che questo possa seguire da una teoria più completa delle soluzioni. In realtà mostra una volta di più la inadeguatezza delle soluzioni di Leray.

La dimostrazione delle (16.2) e delle altre disuguaglianze che citeremo in questo paragrafo è elementare e fondata, (si veda il problema [15] alla fine del paragrafo), su varie disuguaglianze “cinematiche” generali, che citiamo qui di seguito, insieme, per comodità di riferimento (sebbene solo le (S) e (CZ) siano utilizzate per dedurre le (16.2)):

(P) *Disuguaglianza di Poincaré*:

$$16.3 \quad \int_{B_r} d\underline{x} |f - F|^\alpha \leq C_\alpha^P r^{3-2\alpha} \left(\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{\partial} f| \right)^\alpha, \quad 1 \leq \alpha < \infty \quad (16.3)$$

dove F è la media di f sulla sfera B_r di raggio r e C_α^P è un' opportuna costante. Denoteremo la (16.3) con (P).

(S) *Disuguaglianza di Sobolev*:

$$\begin{aligned} 16.4 \quad \int_{B_r} |\underline{u}|^q d\underline{x} & \leq C_q^S \left[\left(\int_{B_r} (\underline{\partial} \underline{u})^2 d\underline{x} \right)^a \cdot \left(\int_{B_r} |\underline{u}|^2 d\underline{x} \right)^{q/2-a} + \right. \\ & \left. + r^{-2a} \left(\int_{B_r} |\underline{u}|^2 d\underline{x} \right)^{q/2} \right] \end{aligned} \quad (16.4)$$

se $2 \leq q \leq 6$, $a = \frac{3}{4}(q-2)$, ove B_r è una sfera di raggio r e gli integrali sono eseguiti rispetto a $d\underline{x}$. La C_q^S è un' opportuna costante; il secondo termine nel membro di destra può essere omesso se \underline{u} ha media nulla su B_r . Denoteremo la (16.4) con (S), [So].

(CZ) *Disuguaglianza di Calderon-Zygmund:*

$$16.5 \quad \int_{\Omega} \left| \sum_{i,j} (\Delta^{-1} \partial_i \partial_j)(u_i u_j) \right|^q d\underline{\xi} \leq C_q^L \int_{\Omega} |\underline{u}|^{2q} d\underline{\xi}, \quad 1 < q < \infty \quad (16.5)$$

che denoteremo (CZ): qui Ω è il toro di lato L e C_q^L è un' opportuna costante, [St].

(H) *Disuguaglianza di Hölder:*

$$16.6 \quad \left| \int f_1 f_2 \dots f_n \right| \leq \prod_{i=1}^n \left(\int |f_i|^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1 \quad (16.6)$$

che denoteremo con (H): gli integrali sono eseguiti su un dominio arbitrario e rispetto ad un' arbitraria misura.

Osservazioni:

La (H) sono una banale estensione della disuguaglianza di Schwartz-Hölder; la (P) é anche essa una semplice disuguaglianza, si veda il problema 13; mentre le (S) (soprattutto nel caso, importante nel seguito, $q = 6$) e (CZ) sono meno elementari e rinviando alla bibliografia, [So??],[St??],.

La dimostrazione delle (16.2), date le (16.3)÷ (16.6), é illustrata dal problema [1].

Un' altra importante conseguenza delle disuguaglianze è:

I Proposizione: Se \underline{u} é una soluzione di Leray, verificante quindi le stime a priori in (14.8): $\int_{\Omega} |\underline{u}(\underline{x}, t)|^2 d\underline{x} \leq E_0$ e $\int_0^T dt \int_{\Omega} |\partial \underline{u}(\underline{x}, t)|^2 d\underline{x} \leq E_0 \nu^{-1}$ si ha:

$$16.7 \quad \int_0^T dt \int_{\Omega} d\underline{x} |\underline{u}|^{10/3} + \int_0^T dt \int_{\Omega} d\underline{x} |p|^{5/3} \leq C \nu^{-1} E_0^{5/3} \quad (16.7)$$

ove C può essere scelto $C_{\frac{10}{3}}^S (1 + C_{\frac{5}{3}}^L)$.

dim: si applichi la (S) con $q = \frac{10}{3}$ e $a = 1$:

$$16.8 \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} |\underline{u}|^{\frac{10}{3}} d\underline{x} &\leq C_{\frac{10}{3}}^S \left(\int_{\Omega} (\partial \underline{u})^2 d\underline{x} \right)^1 \cdot \left(\int_{\Omega} \underline{u}^2 d\underline{x} \right)^{\frac{5}{3}-1} \leq \\ &\leq C_{\frac{10}{3}}^S E_0^{\frac{2}{3}} \int_{\Omega} |\partial \underline{u}|^2 \end{aligned} \quad (16.8)$$

e quindi integrando su t fra 0 e T si trova, usando anche la seconda stima *a priori*:

$$16.9 \quad \int_0^T dt \int_{\Omega} |\underline{u}|^{\frac{10}{3}} d\underline{x} \leq C_{\frac{10}{3}}^S E_0^{\frac{2}{3}} \int_0^T dt \int_{\Omega} d\underline{x} (\partial \underline{u})^2 \leq C_{\frac{10}{3}}^S \nu^{-1} E_0^{1+\frac{2}{3}} \quad (16.9)$$

mentre la (CZ) fornisce: $\int_{\Omega} d\underline{x} |p|^{\frac{5}{3}} \leq C_{\frac{5}{3}}^L \int_{\Omega} d\underline{x} |\underline{u}|^{\frac{10}{3}}$ che, integrata su t , dá il risultato annunciato, se combinata con la (16.9).

*

mbe

(C) *Velocità–pressione pseudo Navier Stokes. Riscalamenti e operatori.*

Come si è detto la teoria CKN non usa appieno il fatto che \underline{u} verifica l'equazione NS: per meglio sottolineare questa (spiacevole) proprietà conviene definire separatamente le sole proprietà delle soluzioni dell'equazione di NS che sono necessarie per lo sviluppo della teoria. Questo porta alla seguente nozione:

1 *Definizione:* sia $t \rightarrow (\underline{u}(\cdot, t), p(\cdot, t))$ una funzione a valori nello spazio dei campi di “velocità” e “pressione” di quadrato sommabile e a media nulla su Ω . Si supponga che per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega \times (0, T])$ con $\varphi(\underline{x}, t)$ che si annulla per t vicino a zero siano valide le seguenti proprietà, per ogni $T < \infty$ e $s \leq T$:

$$16.10 \quad \begin{aligned} a) \quad & \int_{\Omega} \underline{u} d\underline{x} = \underline{0}, \quad \partial \cdot \underline{u} = \underline{0}, \quad p = - \sum_{i,j} \partial_i \partial_j \Delta^{-1}(u_i u_j) \\ b) \quad & \int_0^T dt \int_{\Omega} d\underline{x} |\underline{u}|^{10/3} + \int_0^T dt \int_{\Omega} d\underline{x} |p|^{5/3} < \infty \\ c) \quad & \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\underline{x} |\underline{u}(\underline{x}, s)|^2 \varphi(\underline{x}, s) + \nu \int_{t \leq s} \int_{\Omega} \varphi(x, t) |\partial \underline{u}|^2 d\underline{x} dt \leq \\ & \leq \int_{t \leq s} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\varphi_t + \nu \Delta \varphi) |\underline{u}|^2 + |\underline{u}|^2 \underline{u} \cdot \partial \varphi + p \underline{u} \cdot \partial \varphi \right] d\underline{x} dt \end{aligned} \quad (16.10)$$

Si dirà che la coppia (\underline{u}, p) è un campo di velocità e pressione pseudo NS. L'insieme delle singolarità di (\underline{u}, p) sarà definito come l'insieme S_0 dei punti $(\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ che non ammettono un intorno U in cui $|\underline{u}|$ è limitata.¹

Il resto di questo paragrafo riguarderà proprietà generali dei campi pseudo NS e la loro regolarità in un dato punto (\underline{x}, t) : non avrà nulla a che vedere con i campi di velocità e pressione che risolvono le equazioni di NS. È infatti facile convincersi che le (16.10), a dispetto della arbitrarietà di φ non sono equivalenti, neppure formalmente, alle equazioni di NS, ma pongono su \underline{u}, p restrizioni assai meno severe. Non ci si dovrebbe quindi stupire se fosse

¹ Qui si deve intendere limitata fuori di un insieme di misura nulla, o come si suol dire *essenzialmente limitata*, in quanto è chiaro che, essendo le funzioni \underline{u}, p in $L_2(\Omega)$, esse sono definite a meno di un insieme di misura nulla, e quindi non avrebbe senso imporre la condizione che siano letteralmente limitate.

possibile trovare campi pseudo NS che hanno effettivamente singolarità su grandi insiemi dello spazio tempo. In un certo senso è sorprendente che i campi pseudo NS verifichino necessariamente le seguenti proprietà di regolarità.

L'analisi di queste proprietà è basata sulle relazioni mutue fra le seguenti quantità, dette *operatori* relativi al punto (\underline{x}_0, t_0) dello spazio tempo:

2 *Definizione:* Se $(\underline{x}_0, t_0) \in \Omega \times (0, \infty)$ e se:

$$\begin{aligned}
 \Delta_r(t_0) &= \{t \mid |t - t_0| < r^2 \nu^{-1}\} \\
 B_r(\underline{x}_0) &= \{\underline{\xi} \mid |\underline{\xi} - \underline{x}_0| < r\} \equiv B_r \\
 Q_r(\underline{x}_0, t_0) &= \{(\underline{\xi}, \vartheta) \mid |\underline{\xi} - \underline{x}_0| < r, |\vartheta - t_0| < r^2 \nu^{-1}\} \\
 Q_r(\underline{x}_0, t_0) &= \Delta_r(t_0) \times B_r(\underline{x}_0) \equiv Q_r
 \end{aligned} \tag{16.11}$$

si definisce:²

(1) “operatore adimensionale di energia cinetica” su scala r :

$$A(r) = \frac{1}{\nu^2 r} \sup_{|t-t_0| \leq \nu^{-1} r^2} \int_{B_r} |\underline{u}(\underline{\xi}, t)|^2 d\underline{\xi} \tag{16.12}$$

e diremo che 1 è la dimensione di A : riferendoci con questo al fattore r^{-1} che è usato per rendere l'integrale adimensionale.

(2) “numero di Reynolds locale” su scala r :

$$\delta(r) = \frac{1}{\nu r} \int_{Q_r} d\vartheta d\underline{\xi} |\partial \underline{u}|^2 \tag{16.13}$$

e diremo che 1 è la dimensione di δ : riferendoci con questo al fattore r^{-1} che è usato per rendere l'integrale adimensionale.

(3) “flusso di energia cinetica adimensionale” su scala r :

$$G(r) = \frac{1}{\nu^2 r^2} \int_{Q_r} d\vartheta d\underline{\xi} |\underline{u}|^3 \tag{16.14}$$

e diremo che 2 è la dimensione di G : riferendoci con questo al fattore r^{-2} che è usato per rendere l'integrale adimensionale.

(4) “potenza adimensionale delle forze di pressione” su scala r :

$$J(r) = \frac{1}{\nu^2 r^2} \int_{Q_r} d\underline{\xi} d\vartheta |\underline{u}| |p| \tag{16.15}$$

e diremo che 2 è la dimensione di J : riferendoci con questo al fattore r^{-2} che è usato per rendere l'integrale adimensionale.

² si intenda $B_r \equiv \Omega$ se $r \geq L/2$.

(5) “non località adimensionale” su scala r :

$$16.16 \quad K(r) = \frac{r^{-13/4}}{\nu^{3/2}} \int_{\Delta_r} d\vartheta \left(\int_{B_r} |p| d\underline{\xi} \right)^{5/4} \quad (16.16)$$

e diremo che $13/4$ è la dimensione di K : riferendoci con questo al fattore $r^{-13/4}$ che è usato per rendere l'integrale adimensionale.

(6) “intensità adimensionale” su scala r :

$$16.17 \quad S(r) = \nu^{-7/3} r^{-5/3} \int_{Q_r} (|\underline{u}|^{10/3} + |p|^{5/3}) d\vartheta d\underline{\xi} \quad (16.17)$$

ove la pressione è sempre definita in termini di \underline{u} dalla espressione $p = -\sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j \Delta^{-1}(u_i u_j)$. E diremo che $5/3$ è la dimensione di G : riferendoci con questo al fattore $r^{-5/3}$ che è usato per rendere l'integrale adimensionale.

Osservazioni:

(i) Le quantità $A(r), \dots$ non sono operatori nel senso del termine comune nell'analisi funzionale. Il loro nome nasce dalla loro analogia con le quantità che appaiono nei problemi studiati con il metodo del gruppo di rinormalizzazione (e che pure non sono operatori nel senso comune del termine). Forse un nome più appropriato sarebbe “osservabili”: ma seguiremo l'uso di chiamarli operatori per sottolineare l'analogia di quanto segue con i “metodi del gruppo di rinormalizzazione”.

(ii) le $A(r), G(r), J(r), K(r), S(r)$ sono in realtà stime delle quantità che sono evocate dal nome loro assegnato. La qualifica di “stima” è però omessa dal nome di ciascuna per brevità.

(iii) L'interesse delle (1)÷(4) è manifesto se si nota che la disuguaglianza dell'energia (16.10) può essere espressa in termini di tali quantità se φ viene opportunamente scelta. Infatti sia:

$$16.18 \quad \varphi = \chi(\underline{x}, t) \frac{\exp\left(-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4(\nu(t_0-t)+2r^2)}\right)}{(4\pi\nu(t-t_0)+8\pi r^2)^{3/2}} \quad (16.18)$$

ove $\chi(\underline{x}, t)$ è di classe C^∞ e vale 1 se $(\underline{x}, t) \in Q_{r/2}$ e 0 se $(\underline{x}, t) \notin Q_r$. Allora esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$16.19 \quad \begin{aligned} |\varphi| &< \frac{C}{r^3}, & |\underline{\partial}\varphi| &< \frac{C}{r^4}, & |\partial_t \varphi + \nu \Delta \varphi| &< \frac{C}{\nu^{-1}r^5}, & \text{ovunque e} \\ |\varphi| &> \frac{1}{Cr^3}, & & & \text{se } (\underline{x}, t) &\in Q_{r/2} \end{aligned} \quad (16.19)$$

e allora la (16.10) implica:

$$16.20 \quad \frac{\nu^2}{Cr^2} (A(\frac{r}{2}) + \delta(\frac{r}{2})) \leq C \left(\frac{1}{\nu^{-1}r^5} \int_{Q_r} |\underline{u}|^2 + \frac{1}{r^4} \int_{Q_r} |\underline{u}|^3 + \frac{1}{r^4} \int_{Q_r} |\underline{u}| |p| \right) \quad (16.20)$$

e, poiché $\int_{Q_r} |\underline{u}|^2 \leq C (\int_{Q_r} |\underline{u}|^3)^{2/3} (\nu^{-1} r^5)^{1/3}$ con C opportuna, segue:

$$16.21 \quad A(\frac{r}{2}) + \delta(\frac{r}{2}) \leq \tilde{C} (G(r)^{2/3} + G(r) + J(r)) \quad (16.21)$$

Si noti che l'operatore $\delta(r)$ è il “numero di Reynolds locale” del §15, *c.f.r.* (15.22), che pertanto ha dimensione 1 nel senso ora definito.

(v) L'operatore (5) nasce se si cerca di stimare $J(\frac{r}{2})$ in termini di $A(r) + \delta(r)$: una tale stima è invero possibile ed anzi conduce al teorema locale di Scheffer.

(D) *I teoremi di Scheffer e di Caffarelli–Kohn–Nirenberg.*

Possiamo ora enunciare i risultati più forti noti (in generale e a tutt'oggi) sulla regolarità delle soluzioni deboli delle equazioni di Navier Stokes che, però, valgono anche per le coppie velocità–pressione pseudo Navier Stokes.

II

II Teorema (Scheffer): *Esistono due costanti $\varepsilon_s, C > 0$ tali che se $G(r) + J(r) + K(r) < \varepsilon_s$ per un certo valore di r , allora \underline{u} è limitata in $Q_{\frac{r}{2}}(\underline{x}_0, t_0)$:*

$$16.22 \quad |\underline{u}(\underline{x}, t)| \leq C \frac{\varepsilon_s^{1/3}}{r}, \quad (\underline{x}, t) \in Q_{\frac{r}{2}}(\underline{x}_0, t_0), \quad \text{quasi ovunque} \quad (16.22)$$

avendo posto $\nu = 1$.

Osservazioni:

(1) Si vedano i problemi [5]÷[11] seguenti per una guida alla dimostrazione.

(2) Questo teorema può essere convenientemente combinato con la disuguaglianza: ■

$J(r) + G(r) + K(r) \leq C (S(r)^{9/10} + S(r)^{3/4})$, che segue immediatamente dalla disuguaglianza (H) e dalle definizioni, con C opportuna.

(3) In altre parole se l'operatore $S(r)$ è abbastanza piccolo allora (\underline{x}_0, t_0) è un punto regolare.

(4) Questo implica, in base alla (16.7) e ad una ovvia ripetizione delle considerazioni del §15, che la dimensione frattale dell'insieme delle singolarità ■ è $< \frac{5}{3}$. Infatti una stima *a priori* sul valore globale di un operatore con dimensione α implica che la dimensione di Hausdorff dell'insieme dei punti intorno ai quali l'operatore è grande non supera α : nel §15 la dimensione 1 dell'operatore $\delta(r)$, cioè (16.13) o (15.22), fu usata insieme alla stima *a priori* sulla vorticità (14.8) (*c.f.r.* (15.21), per ottenere una stima 1 sulla dimensione di Hausdorff; qui l'operatore $S(r)$ ha dimensione $5/3$ e pertanto insieme con la stima *a priori* (16.7) fornisce una stima $\leq 5/3$, per la stessa dimostrazione vista nel caso del §

5. Questo giustifica, infine, l' introduzione dell' operatore $S(r)$.

In termini degli operatori appena definiti è facile illustrare la strategia del teorema CKN, (Caffarelli, Kohn, Nirenberg), che per le considerazioni del §15 (c.f.r. (15.22)) implica a sua volta che la dimensione frattale dell' insieme S_0 delle singolarità di un campo pseudo NS è ≤ 1 e che la sua misura di Hausdorff $\mu_1(S_0)$ è nulla:

III *Teorema: Esiste una costante ε_{ckn} tale che se (\underline{u}, p) è un campo di velocità e pressione pseudo NS e se:*

$$16.23 \quad \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\nu r} \int_{Q_r(\underline{x}, t)} |\partial \underline{u}(\underline{x}', t')|^2 d\underline{x}' dt' \equiv \limsup_{r \rightarrow 0} \delta(r) < \varepsilon_{ckn} \quad (16.23)$$

allora $\underline{u}(\underline{x}', t')$ è di classe C^∞ in un intorno di (\underline{x}, t) .³

dim: Fissato (\underline{x}_0, t_0) , si consideri la “successione di scale di lunghezza”: $r_n \equiv L^{2n}$, with $n = 0, -1, -2, \dots$. Porremo $\alpha_n \equiv A(r_n)$, $\kappa_n = K_k^{8/5}$, $j_n = J_n$, $g_n = G_n^{2/3}$, $\delta_n = \delta(r_n)$ che è una definizione naturale come apparirà chiaro presto. E definiamo $\underline{X}_n \equiv (\alpha_n, \kappa_n, j_n, g_n) \in R_+^4$. Allora la dimostrazione di questo teorema è fondata su una stima che ci permette di valutare la grandezza di \underline{X}_n , definita come la somma delle sue componenti, in termini di \underline{X}_{n+p} purché il numero di Reynolds δ_{n+p} su scala $n+p$ sia $\leq \delta$, per ogni $p > 0$, $1 > \delta > 0$.

La disuguaglianza avrà la forma (se $p > 0$ e $0 < \delta < 1$)

$$16.23.0 \quad \underline{X}_n \leq \mathcal{B}_p(\underline{X}_{n+p}; \delta) \quad (16.24)$$

ove $\mathcal{B}_p(\cdot; \delta)$ è una trasformazione di tutto R_+^4 in se e la disuguaglianza deve essere intesa “per componenti”, cioè nel senso che ogni componente del membro di sinistra è maggiorata dalla corrispondente componente del membro di destra. Denoteremo $|\underline{X}|$ la somma delle componenti di $\underline{X} \in R_+^4$.

La trasformazione $\mathcal{B}_p(\cdot; \delta)$, che a qualcuno certo ricorderà da vicino la “funzione beta” per le “costanti correnti” che appare nelle applicazioni del “metodo del gruppo di rinormalizzazione”⁴ godrà delle seguenti proprietà:

IV *Proposizione: Sia p un intero abbastanza grande; dato $\rho > 0$ esiste $\delta_p(\rho) > 0$ tale che se $\delta < \delta_p(\rho)$ allora le iterate della trasformazione $\mathcal{B}_p(\cdot; \delta)$ contraggono un qualsiasi sfera data in R_+^4 , e in un numero finito*

³ ossia vicino a (\underline{x}, t) la funzione $\underline{u}(\underline{x}', t')$ coincide con una funzione di classe C^∞ a parte un insieme di misura nulla (poiché i campi pseudo NS sono definiti come campi in $L_2(\Omega)$).

⁴ Perché connette proprietà di operatori relativi a scale di lunghezza diverse; si osservi, però, che le costanti su scale n , ossia le componenti di \underline{X}_n , sono valutate in termini di quelle su scala $n+p > n$, \underline{X}_{n+p} piuttosto che di quelle su scala $n-p$, \underline{X}_{n-p} come invece è solitamente nelle applicazioni del metodo, see [BG95].

di iterazioni, nella sfera di raggio ρ : cioè $|\mathcal{B}_p^k(\underline{X}; \delta)| < \rho$ per tutti i valori grandi di k .

Supponendo la validità di questa proposizione la dimostrazione del teorema III può essere la seguente

dim (del theorem III): Sia $\rho = \varepsilon_s$, c.f.r. teorema II, e sia p così grande da poter applicare la proposizione IV. Poniamo $\varepsilon_{ckn} = \delta_p(\varepsilon_s)$ e notiamo che, per l'ipotesi (16.23), $\delta_n < \varepsilon_{ckn}$ per tutti gli $n \leq n_0$ e per n_0 abbastanza grande (l'"scale" n sono negative, si ricordi).

Pertanto segue che $|\mathcal{B}_p^k(\underline{X}_{n_0}; \varepsilon_{ckn})| < \varepsilon_s$ per qualche k . E quindi per il teorema II concludiamo che (\underline{x}_0, t_0) è un punto di regolarità.

*

mbe

(E) *Dimostrazione della contrattività della trasformazione di rinormalizzazione.*

La proposizione IV si deduce immediatamente dalle seguenti e generali "disuguaglianze di Sobolev"

(1) "Disuguaglianze cinematiche": cioè disuguaglianze che dipendono solo dal fatto che \underline{u} è a divergenza nulla, media nulla e in $L_2(\Omega)$ e dalla relazione $p = -\Delta^{-1}(\partial \underline{u})^2$

$$\begin{aligned} J_n &\leq C (2^{-p/5} A_{n+p}^{1/5} G_n^{1/5} K_{n+p}^{4/5} + 2^{2p} A_{n+p}^{1/2} \delta_{n+p}) \\ K_n &\leq C (2^{-p/2} K_{n+p} + 2^{5p/4} A_{n+p}^{5/8} \delta_{n+p}^{5/8}) \\ G_n^{2/3} &\leq C (2^{-2p} A_{n+p} + 2^{2p} A_{n+p}^{1/2} \delta_{n+p}^{1/2}) \end{aligned} \quad (16.25)$$

dove C denota una opportuna costante (indipendente dalla particolare coppia \underline{u}, p pseudo NS). La dimostrazione delle disuguaglianze (16.25) non è difficile, supponendo le disuguaglianze (S,H,CZ,P) prima introdotte, ed è illustrata nei problemi [1], [2], [5.3].

(2) "Disuguaglianza dinamica: cioè una disuguaglianza basata sulla conservazione dell'energia, c.f.r. (c) in (16.10) che implica, abbastanza facilmente la seguente "disuguaglianza dinamica"⁵

$$A_n \leq C (2^p G_{n+p}^{2/3} + 2^p A_{n+p} \delta_{n+p} + 2^p J_{n+p}) \quad (16.26)$$

la cui dimostrazione è illustrata in [4].

dim (della proposizione IV): Si suppongano le (16.25), (16.26) e sia $\alpha_n = A_n, \kappa_n = K_n^{8/5}, j_n = J_n, g_n = G_n^{2/3}, \delta_{n+p} = \delta$ a, come sopra, $\underline{X}_n = (\alpha_n, \kappa_n, j_n, g_n)$: il membro di destra delle disuguaglianze definisce la trasformazione $\mathcal{B}_p(\underline{X}; \delta)$.

Se si contemplano abbastanza a lungo ci si convince che la proprietà di contrazione è un' immediata conseguenza di

⁵ La chiamiamo dinamica perché deriva dalla conservazione dell'energia nelle equazioni del moto di NS.

(1) Gli esponenti cui è elevato $\varepsilon = 2^{-p}$ nei vari termini o sono positive, hence they are small factors, or not; nell' ultimo caso la potenza inversa di ε appare sempre moltiplicata da una potenza di δ_{n+p} che possiamo prendere che sia così piccolo da compensare la grandezza di ε a una qualsiasi potenza negativa, *tranne che nell' unico caso che corrisponde all' ultimo termine in* (16.26), in cui vediamo il fattore $\varepsilon^{-1} = 2^p$ senza alcun fattore δ_{n+p} che lo compensi.

(2) Inoltre la somma delle potenze cui appaiono elevate le componenti di \underline{X}_n in ciascun termine delle disuguaglianze è *sempre* ≤ 1 : ciò significa che le disuguaglianze sono “quasi lineari” e che una trasformazione lineare che “domina” \mathcal{B}_p esiste ed è descritta da una matrice con elementi di matrice piccoli *tranne uno solo di essi, fuori dalla diagonale*. Leiterate della matrice pertanto contraggono a meno che l' unico elemento di matrice grande sia “mal situato” nella matrice: e ci si convince facilmente che questo non è il caso.

Una dimostrazione matematica convenzionale è faile da costruire, e si può farlo in vari mdoi: ne presentiamo una in cui varie scelte possono apparire arbitrarie e che possono essere sostituite da scelte alternative che non discuteremo. Però si dovrebbe cercare di capire [erché una dimostrazione convenzionale non è davvero necessaria.

Le disuguaglianze, che definiscono la trasformazione \mathcal{B}_p , sono notevoli e in un certo senso possono essere “linearizzate”; dapprima le scriviamo come

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &\leq C(2^{-p}\alpha_{n+p} + 2^{3p}\alpha_{n+p}^{1/2}\delta_{n+p}^{1/2} + 2^p\alpha_{n+p}\delta_{n+p} + 2^p j_{n+p}) \\
 \kappa_n &\leq C(2^{-4p/5}\kappa_{n+p} + 2^{2p}\delta_{n+p}\alpha_{n+p}) \\
 j_n &\leq C \left(2^{-p/5}\kappa_{n+p}^{1/2}\alpha_{n+p}^{1/5}(2^{-6p/10}\alpha_{n+p}^{3/10} + 2^{6p/10}\alpha_{n+p}^{3/20}\delta_{n+p}^{3/20}) + \right. \\
 &\quad \left. + 2^{2p}\alpha_{n+p}^{1/2}\delta_{n+p} \right) \\
 g_n &\leq C(2^{-2p}\alpha_{n+p} + 2^{2p}\alpha_{n+p}^{1/2}\delta_{n+p}^{1/2})
 \end{aligned} \tag{16.27}$$

dove, naturalmente, C non è più la stessa che in (16.2) e possiamo supporre che sia ≥ 2 senza perdita di generalità; la terza relazione è ottenuta inserendo l' ultima delle (16.25) nella prima di esse.

Via le disuguaglianze $(ab)^{1/2} \leq (a+b)$, $a^x \leq 1+a$ per $x \leq 1$, (e sempre $a, b > 0$) possiamo parzialmente “linearizzare” la equazione (16.27). Posto $\varepsilon \stackrel{def}{=} 2^{-p}$ la (16.27) sarà sostituita dall' pidebole seguente

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &\leq C(\varepsilon\alpha_{n+p} + \varepsilon^{-1}j_{n+p} + \varepsilon^{-3}\delta_{n+p}^{1/2}\alpha_{n+p} + \varepsilon^{-3}\delta_{n+p}^{1/2} + \varepsilon^{-1}\delta_{n+p}) \\
 \kappa_n &\leq C(\varepsilon^{4/5}\kappa_{n+p} + \varepsilon^{-2}\delta_{n+p}\alpha_{n+p}) \\
 j_n &\leq C(\varepsilon^{4/5}(\kappa_{n+p}\alpha_{n+p})^{1/2} + \varepsilon^{-4/10}\kappa_{n+p}^{1/2}\alpha_{n+p}^{7/20}\delta_{n+p}^{3/20} + \\
 &\quad + \varepsilon^{-2}\delta_{n+p}\alpha_{n+p} + \varepsilon^{-p}\delta_{n+p}) \\
 g_n &\leq C(\varepsilon^2\alpha_{n+p} + \varepsilon^{-2}\delta_{n+p}^{1/2}\alpha_{n+p} + \varepsilon^{-2}\delta_{n+p}^{1/2})
 \end{aligned} \tag{16.28}$$

ove C è una costante, eventualmente più grande della costante chiamata prima C . Per la $(ab)^{1/2} \leq \varepsilon^{2/5}a + \varepsilon^{-2/5}b$ e la $a^xb^y < 1 + a + b$, $x > 0, y > 0, x + y \leq 1$, possiamo “completare” la linearizzazione ottenendo

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &\leq C (\varepsilon \alpha_{n+p} + \varepsilon^{-1} j_{n+p} + \varepsilon^{-3} \delta_{n+p}^{1/2} \alpha_{n+p} + \varepsilon^{-3} \delta_{n+p}^{1/2} + \varepsilon^{-1} \delta_{n+p}) \\
 \kappa_n &\leq C (\varepsilon^{4/5} \kappa_{n+p} + \varepsilon^{-2} \delta_{n+p} \alpha_{n+p}) \\
 j_n &\leq C (\varepsilon^{6/5} \alpha_{n+p} + \varepsilon^{2/5} \kappa_{n+p} + \varepsilon^{-2/5} \delta_{n+p}^{3/20} \alpha_{n+p} + \varepsilon^{-2/5} \delta_{n+p}^{3/20} \kappa_{n+p} + \\
 &\quad + \varepsilon^{-2/5} \delta_{n+p}^{3/20} + \varepsilon^{-2} \delta_{n+p} \alpha_{n+p} + \varepsilon^{-p} \delta_{n+p}) \\
 g_n &\leq C (\varepsilon^2 \alpha_{n+p} + \varepsilon^{-2} \delta_{n+p}^{1/2} \alpha_{n+p} + \varepsilon^{-2} \delta_{n+p}^{1/2})
 \end{aligned} \tag{16.29}$$

ove ancora C è una nuova costante (eventualmente più grande delle precedenti con lo stesso nome). Therefore if we define

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{4/5} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{6/5} & \varepsilon^{2/5} & 0 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16.30}$$

L' equazione (16.29) può essere ulteriormente semplificata in

$$\begin{aligned}
 \underline{X}_n &\leq C M \underline{X}_{n+p} + C \delta^{3/20} \varepsilon^{-3} N \underline{X}_{n+p} + C \varepsilon^{-3} \delta^{3/20} \underline{\sigma} \quad \text{or} \\
 \underline{X}_n &\leq B_p \underline{X}_{n+p} + C \varepsilon^{-3} \delta^{3/20} \underline{\sigma}
 \end{aligned} \tag{16.31}$$

eventualmente cambiando di nuovo il valore della costante C , (e avendos fruttato le $\varepsilon, \delta < 1$ per semplicifacere, nella formula finale, la dipendenza da δ).

La trasformazione (16.31) $\underline{X} \rightarrow B_p \underline{X} + C \varepsilon^{-3} \delta^{3/20} \underline{\sigma}$, in un senso ovvio, “maggiora” la “funzione beta” $\mathcal{B}_p(\underline{X}; \delta)$ nella proposizione IV. L' iterazione della stima (16.31), possibile se esiste una scala n_0 al di sotto della quale è $\delta_n < \delta$, per tutti gli $n \leq n_0$ fornisce

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_p^k(\underline{X}; \delta) \underline{\sigma} = C \delta^{3/20} (1 - B_p)^{-1} \underline{\sigma} \tag{16.32}$$

indipendentemente dalla grandezza del vettore iniziale \underline{X} .

Il primo minore principale della matrice M ha equazione caratteristica

$$\lambda^3 - \lambda^2(\varepsilon + \varepsilon^{4/5}) - \lambda(\varepsilon^{1/5} - \varepsilon^{9/5}) + \varepsilon = 0 \tag{16.33}$$

e, quindi, a dispetto dell' unico elemento di matrice grande nella (16.30), vediamo che tutte le soluzioni sono tali che $|\lambda| \leq 1/4C$ if $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ con ε_0 abbastanza piccolo. Questo è il valore abbastanza piccolo da prefissare per $\varepsilon = 2^{-p}$. Quindi scegliendo δ così possiamo imporre che l' autovalore più grande della matrice B_p è $\leq 1/2$ e quindi concludere che la norma $\|(1 - B_p)^{-1}\| \stackrel{def}{=} b_p < \infty$ cosicché una qualsiasi sfera sarà contratta dalle iterate della trasformazione $\mathcal{B}_p(\cdot; \delta)$ entro una sfera di raggio R con

$$R \leq C \delta^{3/20} |(1 - B_p)^{-1} \underline{\sigma}| \leq 3 b_p C \delta^{3/20} \tag{16.34}$$

e quindi, imponendo l'ulteriore e ultima condizione che δ sia così piccolo che il membro di destra della equazione (16.34) sia ρ , otteniamo la proposizione IV.

*

mbe

Problemi. La teoria CKN.

Nei problemi seguenti si porrà $\nu = 1$, il che non lede la generalità e fissa le unità di misura in modo che il tempo abbia la dimensione di una lunghezza al quadrato. I simboli (\underline{u}, p) denoteranno un campo pseudo NS, secondo la definizione 1 in (C). Inoltre per semplicità di notazione si porrà $A_\rho \equiv A(\rho)$, $G_\rho \equiv G(\rho)$, ..., e anche per A_{r_n}, G_{r_n} ... si scriverà A_n, \dots con un abuso di notazione che non genererà equivoci. La validità delle (16.10) per le soluzioni di Leray è discussa nel problema [15], alla fine della parte dedicata ai problemi per sottolineare che i teoremi di Scheffer and CKN riguardano coppie di campi di velocità e pressione pseudo: tuttavia è un problema *indipendente* dagli altri.

[1] Si ponga $\rho = r_{n+p}$ e $r = r_n$, con $r_n = L2^n$, c.f.r. righe seguenti (16.23), e si applichi la (S), (16.4), con $q = 3$ e $a = \frac{3}{4}$, al campo \underline{u} , a t fisso in Δ_r e usando le definizioni della definizione 2 si deduca:

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\underline{u}|^3 d\underline{x} &\leq C_3^S \left[\left(\int_{B_r} |\partial \underline{u}|^2 d\underline{x} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{B_r} |\underline{u}|^2 d\underline{x} \right)^{\frac{3}{4}} + r^{-3/2} \left(\int_{B_r} |\underline{u}|^2 \right)^{3/2} \right] \leq \\ &\leq C_3^S [\rho^{3/4} A_\rho^{3/4} \left(\int_{B_r} |\partial \underline{u}|^2 d\underline{x} \right)^{3/4} + r^{-3/2} \left(\int_{B_r} |\underline{u}|^2 \right)^{3/2}] \end{aligned}$$

Si inferisca da quest'ultima la terza delle (16.25). (*Idea:* Posto $\overline{|\underline{u}|_\rho^2}$ uguale alla media di \underline{u}^2 sulla sfera B_ρ , si applichi poi la disuguaglianza (P), con $\alpha = 1$, per mostrare che esiste $C > 0$ tale che:

$$\begin{aligned} \int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}|^2 &\leq \left(\int_{B_\rho} d\underline{x} \left| |\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|_\rho^2} \right| \right) + \overline{|\underline{u}|_\rho^2} \int_{B_r} d\underline{x} \leq \\ &\leq C\rho \int_{B_\rho} d\underline{x} |\underline{u}| |\partial \underline{u}| + C \left(\frac{r}{\rho} \right)^3 \int_{B_\rho} d\underline{x} |\underline{u}|^2 \leq C\rho^{3/2} A_\rho^{1/2} \left(\int_{B_\rho} d\underline{x} |\partial \underline{u}|^2 \right)^{1/2} + \\ &+ C \left(\frac{r}{\rho} \right)^3 \rho A_\rho \end{aligned}$$

ove la dipendenza da $t \in \Delta_r$ non è esplicitamente indicata; e quindi:

$$\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}|^3 \leq C(r\rho^{-1})^3 A_\rho^{3/2} + C(\rho^{3/4} + \rho^{9/4} r^{-3/2}) A_\rho^{3/4} \left(\int_{B_\rho} d\underline{x} |\partial \underline{u}|^2 \right)^{3/4}$$

e integrando membro a membro rispetto a $t \in \Delta_r$ e applicando (H) e le definizioni nella definizione 2, si ottiene quanto voluto.)

[2] Sia $\varphi \leq 1$ una funzione C^∞ , non negativa, che vale 1 se $|\underline{x}| \leq 3\rho/4$ e 0 se $|\underline{x}| > 4\rho/5$, che supponiamo avere la forma "omotetica" $\varphi = \varphi_1(\underline{x}/\rho)$ con $\varphi_1 \geq 0$ funzione C^∞ fissata una volta per tutte. Se B_ρ è la sfera di centro \underline{x} e raggio ρ , si noti che, se $\rho = r_{n+p}$ e $r = r_n$, la pressione può essere scritta, ad ogni istante (e non esibendo esplicitamente la dipendenza dal tempo), come $p(\underline{x}) = p'(\underline{x}) + p''(\underline{x})$ con:

$$\begin{aligned} p'(\underline{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{B_\rho} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|} p(\underline{y}) \Delta \varphi(\underline{y}) d\underline{y} + \frac{1}{2\pi} \int_{B_\rho} \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|\underline{x} - \underline{y}|^3} \cdot \partial \varphi(\underline{y}) p(\underline{y}) d\underline{y} \\ p''(\underline{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{B_\rho} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|} \varphi(\underline{y}) (\partial \underline{u}(\underline{y})) \cdot (\partial \underline{u}(\underline{y})) d\underline{y} \end{aligned}$$

se $|\underline{x}| < 3\rho/4$; e anche $|p'(\underline{x})| \leq C\rho^{-3} \int_{B_\rho} d\underline{y} |p(\underline{y})|$, e tutte le funzioni sono calcolate ad un istante $t \in \Delta_r$ fisso. Si usi questa osservazione per dedurre la prima delle (16.25). (*Idea*: Dapprima si noti l'identità $p = -(4\pi)^{-1} \int_{B_\rho} |\underline{x} - \underline{y}|^{-1} \Delta(\varphi p)$ per $\underline{x} \in B_r$ erché se $\underline{x} \in B_{3\rho/4}$ si ha $\varphi p \equiv p$. Si noti poi l'identità $\Delta(\varphi p) = p \Delta \varphi + 2\underline{\partial} p \cdot \underline{\partial} \varphi + \varphi \Delta p$ hence $\Delta p = -\underline{\partial} \cdot (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) = -(\underline{\partial} \underline{u}) \cdot (\underline{\partial} \underline{u})$: la seconda di queste ultime relazioni genera p'' mentre $p \Delta \varphi$ si combina con il contributo di $2\underline{\partial} p \cdot \underline{\partial} \varphi$, previa sua integrazione per parti, e genera i due contributi a p' . Dall'espressione per p'' vediamo:

$$\begin{aligned} \int_{B_r} d\underline{x} |p''(\underline{x})|^2 &\leq \int_{B_\rho \times B_\rho} d\underline{y} d\underline{y}' |\underline{\partial} \underline{u}(\underline{y})|^2 |\underline{\partial} \underline{u}(\underline{y}')|^2 \int_{B_r} d\underline{x} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}| |\underline{x} - \underline{y}'|} \leq \\ &\leq C\rho \left(\int_{B_\rho} d\underline{y} |\underline{\partial} \underline{u}(\underline{y})|^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (!)$$

La parte con p' è più interessante perché gli integrali contengono nuclei apparentemente singolari per $\underline{x} = \underline{y}$ come $|\underline{x} - \underline{y}|^{-1} \Delta \varphi$ e $|\underline{x} - \underline{y}|^{-1} \underline{\partial} \varphi$; ma si deve notare che ciò non è vero perché le derivate di φ si annullano se $\underline{y} \in B_{3\rho/4}$ (ove $\varphi \equiv 1$) per cui $|\underline{x} - \underline{y}|^{-k}$ può essere stimato “dimensionalmente” da ρ^{-k} nell'intera regione $B_\rho/B_{3\rho/4}$ per ogni $k \geq 0$ (questa osservazione mostra anche perché è utile decomporre p come somma di p' e p'').

Così maggiorando i nuclei (apparentemente) singolari con le loro stime dimensionali si trova

$$\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}| |p'| \leq \frac{C}{\rho^3} \left(\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}| \right) \cdot \left(\int_{B_\rho} d\underline{x} |p| \right)$$

che può essere stimato via la disuguaglianza (H) da

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C}{\rho^3} \left(\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}|^{2/5} \cdot |\underline{u}|^{3/5} \cdot 1 \right) \cdot \left(\int_{B_\rho} d\underline{x} |p| \right) \leq \\ &\leq \frac{C}{\rho^3} \left(\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}|^2 \right)^{1/5} \cdot \left(\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}|^3 \right)^{1/5} (r^3)^{3/5} \cdot \int_{B_\rho} d\underline{x} |p| \leq \\ &\leq \frac{C}{\rho^3} (\rho A_\rho)^{1/5} \left(\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}|^3 \right)^{1/5} \cdot \left(\int_{B_\rho} d\underline{x} |p| \right) \end{aligned}$$

ove tutte le funzioni vanno intese come dipendenti da \underline{x} (oltre che da t) e allora integrando su $t \in \Delta_r$ e dividendo per r^2 si trova, per un'opportuna $C > 0$:

$$\frac{1}{r^2} \int_{Q_r} dt d\underline{x} |\underline{u}| |p'| \leq C \left(\frac{r}{\rho} \right)^{1/5} G_r^{1/5} K_\rho^{4/5} A_\rho^{1/5}$$

che si combina con $\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}| |p''| \leq (\int_{B_r} d\underline{x} |\underline{u}|^2)^{1/2} (\int_{B_r} d\underline{x} |p''|^2)^{1/2}$ che, integrando sul tempo, dividendo per ρ^2 e usando la disuguaglianza (!) per $\int_{B_r} d\underline{x} |p''|^2$ fornisce: $r^{-2} \int_{Q_r} dt d\underline{x} |\underline{u}| |p''| \leq C(\rho r^{-1})^2 A_\rho^{1/2} \delta_\rho$.)

[3] Nel contesto dell'idea del precedente problema, e delle notazioni per p , si usi $\int_{B_r} d\underline{x} |p'| \leq C(r\rho^{-1})^3 \int_{B_\rho} d\underline{x} |p|$ e integrando su t la potenza $5/4$ di questa disuguaglianza, adimensionalizzata dividendo per $r^{13/4}$, si trova: $r^{-13/4} \int_{\Delta_r} (\int |p'|)^{5/4} \leq C(r\rho^{-1})^{1/2} K_\rho$, che fornisce il primo termine della seconda disuguaglianza in (16.25). Si completi la derivazione di detta disuguaglianza. (*Idea*: Si noti che $p''(\underline{x}, t)$ viene scritto, all'interno di B_r , come $p'' = \tilde{p} + \hat{p}$ con:

$$\tilde{p}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{B_\rho} \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|\underline{x} - \underline{y}|^3} \varphi(\underline{y}) \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} d\underline{y}, \quad \hat{p}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{B_\rho} \frac{\underline{\partial} \varphi(\underline{y}) \cdot (\underline{u} \cdot \underline{\partial}) \underline{u}}{|\underline{x} - \underline{y}|} d\underline{y}$$

(sempre a t fisso ed evitando di dichiarare esplicitamente la dipendenza da t). Quindi usando che $|\underline{x} - \underline{y}| > \rho/4$, per $\underline{x} \in B_r$ e $\underline{y} \in B_\rho/B_{3\rho/4}$, ossia per \underline{y} nella parte di B_ρ ove $\partial\varphi \neq 0$ si trova

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\tilde{p}| d\underline{x} &\leq C \int_{B_\rho} d\underline{y} \left(\int_{B_r} \frac{d\underline{x}}{|\underline{x} - \underline{y}|^2} |\underline{u}(\underline{y})| |\partial\underline{u}(\underline{y})| \right) \leq \\ &\leq Cr \left(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{B_\rho} |\partial\underline{u}|^2 \right)^{1/2} \leq Cr \rho^{1/2} A_\rho^{1/2} \left(\int_{B_\rho} |\partial\underline{u}|^2 \right)^{1/2} \\ \int_{B_r} |\hat{p}| d\underline{x} &\leq C \frac{r^3}{\rho^2} \int_{B_\rho} |\underline{u}| |\partial\underline{u}| \leq Cr \rho^{1/2} A_\rho^{1/2} \left(\int_{B_\rho} |\partial\underline{u}|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e $\left(\int_{B_r} |p''| \right)^{5/4}$ si stima elevando alla potenza $5/4$ i membri di destra delle ultime disuguaglianze ed integrando su t , e infine applicando la disuguaglianza (H) per fare apparire l'integrale $\left(\int_{Q_\rho} |\partial\underline{u}|^2 \right)^{5/8}$.

[4] Si deduca la (16.26) per un campo (\underline{u}, p) pseudo NS, secondo la definizione 1. (*Idea:* sia $\varphi(\underline{x}, t)$ una funzione C^∞ che vale 1 su $Q_{\rho/2}$ e 0 fuori di Q_ρ ; si ha: $0 \leq \varphi(\underline{x}, t) \leq 1$, $|\partial\varphi| \leq \frac{C}{\rho}$, $|\Delta\varphi| + \partial_t\varphi \leq \frac{C}{\rho^2}$, se si suppone che φ abbia la forma $\varphi(\underline{x}, t) = \varphi_2(\frac{\underline{x}}{\rho}, \frac{t}{\rho^2}) \geq 0$ con φ_2 opportunamente fissato. Si ha allora, applicando la terza delle (16.10) e usando le notazioni dei problemi precedenti, se $t \in \Delta_{\rho/2}(t_0)$:

$$\begin{aligned} \int_{B_r \times \{\bar{t}\}} |\underline{u}(\underline{x}, t)|^2 d\underline{x} &\leq \frac{C}{\rho^2} \int_{Q_\rho} dt d\underline{x} |\underline{u}|^2 + \int_{Q_\rho} dt d\underline{x} (|\underline{u}|^2 + 2p) \underline{u} \cdot \partial\varphi \leq \\ &\leq \frac{C}{\rho^2} \int_{Q_\rho} dt d\underline{x} |\underline{u}|^2 + \left| \int_{Q_\rho} dt d\underline{x} (|\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho}) \underline{u} \cdot \partial\varphi \right| + 2 \int_{Q_\rho} dt d\underline{x} p \underline{u} \cdot \partial\varphi \leq \\ &\leq \frac{C}{\rho^{1/3}} \left(\int_{Q_\rho} dt d\underline{x} |\underline{u}|^3 \right)^{2/3} + \left| \int_{Q_\rho} dt d\underline{x} (|\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho}) \underline{u} \cdot \partial\varphi \right| + \frac{2C}{\rho} \int_{B_\rho} dt d\underline{x} |p| |\underline{u}| \leq \\ &\leq C \rho G_\rho^{2/3} + C \rho J_\rho + \rho \left| \frac{1}{\rho} \int_{Q_\rho} dt d\underline{x} (|\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho}) \underline{u} \cdot \partial\varphi \right| \end{aligned} \quad (*)$$

Si tenga ora conto della seguente disuguaglianza, a t fisso e con integrali eseguiti su $d\underline{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left| \int_{B_\rho} d\underline{x} (|\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho}) \underline{u} \cdot \partial\varphi \right| &\leq \frac{C}{\rho^2} \int_{B_\rho} d\underline{x} |\underline{u}| \left| |\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho} \right| \leq \\ &\leq \frac{C}{\rho^2} \left(\int_{B_\rho} d\underline{x} |\underline{u}|^3 \right)^{1/3} \left(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

e della disuguaglianza (P) con $f = \underline{u}^2$ e $\alpha = 3/2$ che dá (sempre a t fisso e con integrali su $d\underline{x}$):

$$\left(\int_{B_\rho} \left| \underline{u}^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho} \right|^{3/2} \right)^{2/3} \leq C \left(\int_{B_\rho} |\underline{u}| |\partial\underline{u}| \right)$$

e si vede che:

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} \left| |\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho} \right| |\underline{u}| |\partial\varphi| &\leq \frac{C}{\rho} \left(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^3 \right)^{1/3} \left(\int_{B_\rho} |\underline{u}| |\partial\underline{u}| \right) \leq \\ &\leq \frac{C}{\rho} \left(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^3 \right)^{1/3} \left(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{B_\rho} |\partial\underline{u}|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{C}{\rho} \rho^{1/2} A_\rho^{1/2} \left(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^3 \right)^{1/3} \cdot \left(\int_{B_\rho} |\partial\underline{u}|^2 \right)^{1/2} \cdot 1 \end{aligned}$$

e integrando su t e applicando (H) con esponenti 3, 2, 6 rispettivamente sugli ultimi tre fattori del membro di destra si trova:

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{Q_\rho} |\underline{u}| \left| |\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2} \right| \leq C A_\rho^{1/2} G_\rho^{1/3} \delta_\rho^{1/2} \leq C (G_\rho^{2/3} + A_\rho \delta_\rho)$$

e sostituendo nella prima delle precedenti disuguaglianze (*) si ottiene il risultato desiderato.) ■

I seguenti problemi sono una guida alla dimostrazione del teorema II. Nel seguito sostituiamo, a meno esplicita indicazione in contrario, gli insiemi B_r, Q_r, Δ_r introdotti nella definizione 2, al punto (C), e usate nei precedenti problemi con B_r^0, Δ_r^0, Q_r^0 ove $B_r^0 = \{\underline{x} \mid |\underline{x} - \underline{x}_0| < r\}$, $\Delta_r^0 = \{t \mid t_0 > t > t - r^2\}$, $Q_r^0 = \{(\underline{x}, t) \mid |\underline{x} - \underline{x}_0| < r, t_0 > t > t - r^2\} = B_r^0 \times \Delta_r^0$. Similmente porremo $B_{r_n} = B_n, \Delta_{r_n} = \Delta_n, Q_{r_n} = Q_n$ e definiremo nuovi operatori A, δ, G, J, K, S a mezzo delle stese espressioni ma con il nuovo, appena definito, significato dei domini di integrazione ora definiti in (16.11) 16/17 al punto (C). Tuttavia, per evitare confusione le denoteremo A^0, δ^0, \dots , contraddistinguendoli con un sovraindice 0.

[5] Adottando queste nuove convenzioni, si i dimostrino le seguenti disuguaglianze:

$$A_n^0 \leq C A_{n+1}^0, \quad G_n^0 \leq C G_{n+1}^0, \quad G_n^0 \leq C (A_n^{0\,3/2} + A_n^{0\,3/4} \delta_n^{0\,3/4})$$

(Idea: le prime due sono banali conseguenze del fatto che i domini di integrazione dei membri di destra sono più grandi di quelli dei membri di sinistra, e i raggi delle sfere sono diversi solo per un fattore 2, di modo che C può essere scelto 2 nella prima disuguaglianza e 4 nella seconda. La terza disuguaglianza segue dalla (S) con $a = \frac{3}{4}, q = 3$:

$$\begin{aligned} \int_{B_r^0} |\underline{u}|^3 &\leq C \left[\left(\int_{B_r^0} |\underline{u}|^2 \right)^{3/4} \left(\int_{B_r^0} |\underline{u}|^2 \right)^{3/4} + r^{-3/2} \left(\int_{B_r^0} |\underline{u}|^2 \right)^{3/2} \right] \leq \\ &\leq C \left[r^{3/4} A_r^{0\,3/4} \left(\int_{B_r^0} |\underline{u}|^2 \right)^{3/4} + A_r^{0\,3/2} \right] \end{aligned}$$

ove gli integrali sono su $d\underline{x}$ a t fisso; e integrando su t si stima G_r^0 con:

$$C r^{-2} \left[r^2 A_r^{0\,3/2} + A_r^{0\,3/4} r^{3/4} \int_{\Delta_r^0} dt \left(\int_{B_r^0} d\underline{x} |\underline{u}|^2 \right)^{3/4} \cdot 1 \right]$$

da cui quanto voluto segue, applicando opportunamente la (H) all' ultimo integrale su t .)

[6] Posto $n_0 = n + p$ e $Q_n^0 = \{(\underline{x}, t) \mid |\underline{x} - \underline{x}_0| < r_n, t_0 > t > t - r_n^2\} \stackrel{def}{=} B_n^0 \times \Delta_n^0$ si consideri la funzione:

$$\varphi_n(\underline{x}, t) = \frac{\exp(-(\underline{x} - \underline{x}_0)^2 / 4(r_n^2 + t_0 - t))}{(4\pi(r_n^2 + t_0 - t))^{3/2}}, \quad (\underline{x}, t) \in Q_{n_0}^0$$

e una funzione $\chi_{n_0}(\underline{x}, t) = 1$ su $Q_{n_0-1}^0$ e 0 fuori di $Q_{n_0}^0$, scegliendo, ad esempio, una funzione che abbia la forma $\chi_{n_0}(\underline{x}, t) = \tilde{\varphi}(r_{n_0}^{-1} \underline{x}, r_{n_0}^{-1/2} t) \geq 0$ con $\tilde{\varphi}$ di classe C^∞ e scelta una volta per tutte. Si scriva la equazione (16.10) usando $\varphi = \varphi_n \chi_{n_0}$ e si deduca la disuguaglianza:

$$\frac{A_n^0 + \delta_n^0}{r_n^2} \leq C \left[r_{n+p}^{-2} G_{n+p}^{0\,2/3} + \sum_{k=n+1}^{n+p} r_k^{-2} G_k^0 + r_{n+p}^{-2} J_{n+p}^0 + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} r_k^{-2} L_k \right] \quad (@)$$

ove $L_k = r_k^{-2} \int_{Q_k^0} d\underline{x} dt |\underline{u}| |p - \overline{p^k}|$ con $\overline{p^k}$ uguale alla media di p sulla sfera B_k^0 ; per ogni $p > 0$. (*Idea*: si consideri la funzione φ e si noti che $\varphi \geq (Cr_n^3)^{-1}$ in Q_n^0 , il che permette di stimare *inferiormente* il termine di sinistra in (16.10), con $(Cr_n^2)^{-1}(A_n^0 + \delta_n^0)$. Inoltre:

$$\begin{aligned} |\varphi| &\leq \frac{C}{r_m^3}, & |\partial_t \varphi| &\leq \frac{C}{r_m^4}, & n \leq m \leq n+p \equiv n_0, & \text{ in } Q_{m+1}^0/Q_m^0 \\ |\partial_t \varphi + \Delta \varphi| &\leq \frac{C}{r_{n_0}^5} & & & & \text{ in } Q_{n_0}^0 \end{aligned}$$

e la seconda relazione segue osservando che $\partial_t \varphi + \Delta \varphi \equiv 0$ nei “posti pericolosi”, ossia dove $\chi = 1$, perché φ è soluzione dell’equazione del calore (all’indietro nel tempo). Quindi il primo termine a destra della (16.10) può essere stimato *superiormente* da:

$$\int_{Q_{n_0}^0} |\underline{u}|^2 |\partial_t \varphi_n + \Delta \varphi_n| \leq \frac{C}{r_{n_0}^5} \int_{Q_{n_0}^0} |\underline{u}|^2 \leq \frac{C}{r_{n_0}^5} \left(\int_{Q_{n_0}^0} |\underline{u}|^3 \right)^{2/3} r_{n_0}^{5/3} \leq \frac{C}{r_{n_0}^2} G_{n_0}^{2/3}$$

getting the first term in the r.h.s. of (@).

Usando ora le proprietà di omotetia della fnzione φ il secondo termine è stimato da:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{n_0}^0} |\underline{u}|^3 |\partial_t \varphi_n| &\leq \frac{C}{r_n^4} \int_{Q_{n+1}} |\underline{u}|^3 + \sum_{k=n+2}^{n_0} \frac{C}{r_k^4} \int_{Q_k^0/Q_{k-1}^0} |\underline{u}|^3 \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n_0} \frac{C}{r_k^4} \int_{Q_k^0} |\underline{u}|^3 \leq C \sum_{k=n+1}^{n_0} \frac{G_k^0}{r_k^2} \end{aligned}$$

Chiamando il terzo termine, *c.f.r.* (16.10), Z si vede che é stimato da:

$$\begin{aligned} Z &\leq \left| \int_{Q_{n_0}^0} p \underline{u} \cdot \underline{\partial} \chi_{n_0} \varphi_n \right| \leq \left| \int_{Q_{n+1}^0} p \underline{u} \cdot \underline{\partial} \chi_{n+1} \varphi_n \right| + \\ &+ \sum_{k=n+2}^{n_0} \left| \int_{Q_k^0} p \underline{u} \cdot \underline{\partial} (\chi_k - \chi_{k-1}) \varphi_n \right| \leq \left| \int_{Q_{n+1}^0} (p - \overline{p^{n+1}}) \underline{u} \cdot \underline{\partial} \chi_{n+1} \varphi_n \right| + \\ &+ \sum_{k=n+2}^{n_0-1} \left| \int_{Q_k^0} (p - \overline{p^k}) \underline{u} \cdot \underline{\partial} (\chi_k - \chi_{k-1}) \varphi_n \right| + \int_{Q_{n_0}^0} |\underline{u}| |p| |\underline{\partial} (\chi_{n_0} - \chi_{n_0-1}) \varphi_n| \end{aligned}$$

ove $\overline{p^n}$ denota la media su B_m di p (che dipende solo da t): la possibilità di sostituire p con $p - \overline{p}$ negli integrali riflette semplicemente il fatto che la divergenza nulla di \underline{u} ci consente di aggiungere a p una *qualsiasi* costante perché, per integrazione per parti, essa contribuirà 0 al valore dell’ integrale.

Dalla ultima disuguaglianza segue immediatamente:

$$Z \leq \sum_{k=n+1}^{n_0-1} \frac{C}{r_k^4} \int_{Q_k^0} |p - \overline{p^k}| |\underline{u}| + J_{n_0} r_{n_0}^{-2} = \sum_{k=n+1}^{n_0-1} \frac{C}{r_k^2} L_k + J_{n_0} r_{n_0}^{-2}$$

e quindi, sommando le precedenti stime, segue quanto voluto.)

[7] Se \underline{x}_0 è il centro di Ω la funzione $\chi_{n_0} p$ può essere pensata, se $n_0 < -1$, come definita su tutto R^3 e nulla fuori del toro Ω . Allora se Δ è l’operatore di Laplace *su tutto* R^3 si osservi che la espressione di p in termini di \underline{u} (*c.f.r.* (a) di (16.10)) implica che in $Q_{n_0}^0$:

$$\chi_{n_0} p = \Delta^{-1} \Delta \chi_{n_0} p \equiv \Delta^{-1} \left(p \Delta \chi_{n_0} + 2(\partial \chi_{n_0}) \cdot (\partial p) - \chi_{n_0} \partial \partial \cdot (\underline{u} \underline{u}) \right)$$

si faccia vedere che questa espressione può essere riscritta, per $n < n_0$ come:

$$\begin{aligned}\chi_{n_0} p &= -(\partial \partial \Delta^{-1})(\chi_{n_0} \vartheta_{n+1} \underline{u} \underline{u}) - (\partial \partial \Delta^{-1})(\chi_{n_0} (1 - \vartheta_{n+1}) \underline{u} \underline{u}) + \\ &\quad + 2\Delta^{-1} \cdot (\partial \chi_{n_0})(\partial p) + \left(\Delta^{-1} ((\partial \partial \chi_{n_0}) \underline{u} \underline{u}) - \partial \Delta^{-1} (\partial \chi)(\underline{u} \underline{u}) \right) \equiv \\ &\equiv p_1 + p_2 + p_4 + p_3\end{aligned}$$

ove ϑ_k è la funzione caratteristica di B_k . (*Idea*: si usi, per $\underline{x}, t \in Q_{n_0}^0$, la formula di Poisson:

$$\begin{aligned}\chi_{n_0}(\underline{x}, t) p(\underline{x}, t) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{B_{n_0}} \frac{\Delta(\chi_{n_0} p(\underline{y}, t))(\underline{y})}{|\underline{x} - \underline{y}|} d\underline{y} = \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{B_{n_0}} \frac{p \Delta \chi_{n_0} + 2 \partial \chi_{n_0} \cdot \partial p - \chi_{n_0} \partial \partial \cdot (\underline{u} \underline{u})}{|\underline{x} - \underline{y}|} d\underline{y}\end{aligned}$$

e si eseguano opportune integrazioni per parti.)

[8] nel contesto del precedente problema si faccia vedere che le formule ivi ricavate si possono riscrivere più esplicitamente come:

$$\begin{aligned}p_1 &= -(\partial \partial \Delta^{-1}) \cdot (\chi_{n_0} \vartheta_{n+1} \underline{u} \underline{u}), \quad p_2 = \frac{3}{4\pi} \int_{B_{n_0}^0 / B_{n+1}^0} \left(\partial \partial \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|} \right) \cdot \chi_{n_0} \underline{u} \underline{u} \\ p_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_{n_0}^0} \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|\underline{x} - \underline{y}|^3} (\partial \chi_{n_0}) \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{4\pi} \int_{B_{n_0}^0} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|} (\partial \partial \chi_{n_0}) \underline{u} \underline{u} \\ p_4 &= \frac{-2}{4\pi} \int \frac{1}{|\underline{x} - \underline{y}|} p(\underline{y}) \Delta \chi_{n_0} + \frac{-2}{2\pi} \int p(\underline{y}) \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|\underline{x} - \underline{y}|^3} \cdot \partial \chi_{n_0}\end{aligned}$$

ove $n < n_0$ e gli integrali sono su \underline{y} a t fisso, e le funzioni a sinistra sono valutate in \underline{x}, t .

[9] Si consideri la quantità L_n introdotta nel problema [6]. E si mostri che, posto $n_0 = n + p$, $p > 0$:

$$\begin{aligned}L_n &\leq C \left[\left(\frac{r_{n+1}}{r_{n_0}} \right)^{7/5} A_{n+1}^0{}^{1/5} G_{n+1}^0{}^{1/5} K_{n_0}^0{}^{4/5} + \left(\frac{r_{n+1}}{r_{n_0}} \right)^{5/3} G_{n+1}^0{}^{1/3} G_{n_0}^0{}^{2/3} + \right. \\ &\quad \left. + G_{n+1}^0 + r_{n+1}^3 G_{n+1}^0{}^{1/3} \sum_{k=n+1}^{n_0-1} r_k^{-3} A_k^0 \right]\end{aligned}$$

(*Idea*: si usi il problema [8] per maggioreare L_n con: $\sum_{i=1}^4 r_n^{-2} \int_{Q_n^0} |\underline{u}| |p_i - \overline{p_i}|$ ove $\overline{p_i}$ è la media di p_i su B_n ; e si stimino separatamente i quattro termini. Per il primo non è necessario usare la sottrazione della media e la differenza $|p_1 - \overline{p_1}|$ si può spezzare nella somma dei moduli ciascuno dei quali contribuisce ugualmente alla stima finale che viene ottenuta via la (CZ), e la (H):

$$\int_{B_{n+1}^0} |p_1 - \overline{p_1}| |\underline{u}| \leq 2 \left(\int_{B_{n+1}^0} |p_1|^{3/2} \right)^{2/3} \left(\int_{B_{n+1}^0} |\underline{u}|^3 \right)^{1/3} \leq C \int_{B_{n+1}^0} |\underline{u}|^3$$

e il contributo di p_1 a L_n è stimato, quindi, da $C G_{n+1}$: si noti che questo non sarebbe vero con p in luogo di p_1 perchè a secondo membro apparirebbe $\int_{\Omega} |p|^{3/2}$ in luogo di

$\int_{B_{n+1}} |p|^{3/2}$, perchè la (CZ) è una disuguaglianza “non locale”. Il termine con p_2 si stima come:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_n^0} \int_{B_n^0} |p_2 - \overline{p_2^n}| |\underline{u}| &\leq \int_{\Delta_n^0} \int_{B_n^0} |\underline{u}| r_n \max |\partial p_2| \leq \\ &\leq r_n \left(\int_{Q_n^0} \frac{|\underline{u}|^3}{r_n^2} \right)^{1/3} r_n^{2/3} r_n^{10/3} \max_{Q_n^0} |\partial p_2| \leq \\ &\leq r_n^5 G_n^{0\,1/3} \sum_{m=n+1}^{n_0-1} \max_{t \in \Delta_m^0} \int_{B_{m+1}^0/B_m^0} \frac{|\underline{u}|^2}{r_m^4} = r_n^5 G_n^{0\,1/3} \sum_{m=n+1}^{n_0-1} \frac{A_m^0}{r_m^3} \end{aligned}$$

In modo analogo il termine con p_3 si stima usando $|\partial p_3| \leq C r_{n_0}^{-4} \int_{B_{n_0}^0} |\underline{u}|^2$ che é maggiorato da $C r_{n_0}^{-3} (\int_{B_{n_0}^0} |\underline{u}|^3)^{2/3}$ ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n^2} \int_{Q_n^0} |\underline{u}| |p_3 - \overline{p_3^n}| &\leq \frac{C}{r_n^2} r_{n_0}^{-3} \int_{\Delta_n^0} [(\int_{B_n^0} |\underline{u}|^3)^{2/3} r_n \int_{B_n^0} |\underline{u}|] \leq \\ &\leq \frac{C}{r_n^2} r_n^3 r_{n_0}^{-3} \int_{\Delta_n^0} (\int_{B_n^0} |\underline{u}|^3)^{2/3} (\int_{B_n^0} |\underline{u}|^3)^{1/3} \leq \\ &\leq \frac{C}{r_n^2} \left(\frac{r_n}{r_{n_0}} \right)^3 r_{n_0}^{4/3} r_n^{2/3} G_{n_0}^{0\,2/3} G_n^{0\,1/3} = C \left(\frac{r_n}{r_{n_0}} \right)^{5/3} G_{n_0}^{0\,2/3} G_n^{0\,1/3} \end{aligned}$$

Infine il termine con p_4 si stima (tenuto conto che le derivate $\Delta \chi_n, \partial \chi_n$ si annullano ove i nuclei divergono p'u grandi di quanto suggerito dalla loro dimensionalit ) notando che:

$$\int_{B_n^0} |p_4 - \overline{p_4^n}| |\underline{u}| \leq C r_n \int_{B_n^0} |\underline{u}| \max_{B_n^0} |\partial p_4| \leq C r_n \left(\int_{B_n^0} |\underline{u}| \right) \left(\int_{B_{n_0}^0} \frac{|p|}{r_{n_0}^4} \right)$$

in modo che si ottiene la seguente catena di disuguaglianze, usando ripetutamente (H) (denotando con $\tilde{K}_{n_0}^0$ l'operatore $K_{n_0}^0$ senza il fattore $r_{n_0}^{-13/4}$ che lo adimensionalizza, e similmente introducendo $\tilde{A}_n^0, \tilde{G}_n^0$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n^2} \int_{Q_n^0} |p_4 - \overline{p_4^n}| |\underline{u}| &\leq \frac{C}{r_n^2} r_n \left(\int_{\Delta_n^0} \left(\int_{B_{n_0}^0} \frac{|p|}{r_{n_0}^4} \right)^{5/4} \right)^{4/5} \left(\int_{\Delta_n^0} \left(\int_{B_n^0} |\underline{u}| \right)^5 \right)^{1/5} \leq \\ &\leq \frac{C}{r_n^2} \frac{r_n}{r_{n_0}^4} \tilde{K}_{n_0}^{0\,4/5} \left(\int_{\Delta_n^0} \left(\int_{B_n^0} |\underline{u}|^{2/5} |\underline{u}|^{3/5} \cdot 1 \right)^5 \right)^{1/5} \leq \\ &\leq \frac{C}{r_n^2} \frac{r_n}{r_{n_0}^4} \tilde{K}_{n_0}^{0\,4/5} \left(\int_{B_n^0} |\underline{u}|^2 \right)^{1/5} \left(\int_{Q_n^0} |\underline{u}|^3 \right)^{1/5} r_n^{9/5} \leq \\ &\leq \frac{C}{r_n^2} \frac{r_n}{r_{n_0}^4} r_n^{12/5} \tilde{K}_{n_0}^{0\,4/5} \tilde{A}_n^{0\,1/5} \tilde{G}_n^{0\,1/5} \leq C \left(\frac{r_n}{r_{n_0}} \right)^{7/5} A_n^{0\,1/5} G_n^{0\,1/5} K_{n_0}^{0\,4/5} \end{aligned}$$

La disuguaglianza voluta segue se si usano le disuguaglianze del problema [5] e si combinano le precedenti stime sui termini relativi a p_j , $j = 1, \dots, 4$.)

[10] Posto $T_n = A_n^0 + \delta_n^0$, si deduca combinando le disuguaglianze dei problemi [6] e [9], e quelle del problema [5], la seguente:

$$T_n \leq 2^{2n} \left(2^{-2n_0} \varepsilon + \sum_{k=n+1}^{n_0-1} 2^{-2k} T_k^{3/2} + 2^{-2n_0} \varepsilon + 2^{-7n_0/5} \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n_0-1} 2^{-3k/5} T_k^{1/2} + \right.$$

$$+ \varepsilon 2^{-5n_0/3} \sum_{k=n_0+2}^{n_0-1} 2^{-k/3} T_k^{1/2} + \sum_{k=n+1}^{n_0-1} 2^{-2k} T_k^{3/2} + \sum_{k=n+1}^{n_0-1} 2^k T_k^{1/2} \sum_{p=k}^{n_0-1} 2^{-3p} T_p \Big) \\ \varepsilon \equiv C \max(G_{n_0}^{0\,2/3}, K_{n_0}^{0\,4/5}, J_{n_0}^0)$$

e si faccia vedere per induzione che se ε è abbastanza piccolo allora $r_n^{-2} T_n \leq \varepsilon^{2/3} r_{n_0}^{-2}$.

[11] Se $G(r_0) + J(r_0) + K(r_0) < \varepsilon_s$ con ε_s abbastanza piccolo, allora dato $(\underline{x}', t') \in Q_{r_0/4}(\underline{x}_0, t_0)$ si faccia vedere che, detti $G_r^0, J_r^0, K_r^0, A_r^0, \delta_r^0$ i valori degli operatori relativi a $Q_r^0(\underline{x}', t')$, si ha:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n^2} A_n^0 \leq C \frac{\varepsilon_s^{2/3}}{r_0^2}$$

per una opportuna costante C . (*Idea*: basta osservare che $Q_{r_0/4}^0(\underline{x}', t') \subset Q_{r_0}(\underline{x}_0, t_0)$ e quindi $G_{r_0/4}^0, J_{r_0/4}^0, \dots$ si stimano con una costante, ($\leq 4^2$), per i rispettivi $G(r_0), J(r_0), \dots$. Si applica poi il risultato del problema [10].)

[12] Si mostri che il risultato del problema [11] implica il teorema II. (*Idea*: infatti:

$$\frac{1}{r_n^2} A_n^0 \geq \frac{1}{r_n^3} \int_{B_n^0} |\underline{u}(\underline{x}, t')|^2 d\underline{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{3} |\underline{u}(\underline{x}', t')|^2$$

ove B_n^0 è la sfera con centro \underline{x}' , per quasi tutti i punti $(\underline{x}', t') \in Q_{r_0/4}^0$.)

[13] Sia f una funzione a media nulla su B_r . Allora, poichè $f(\underline{x}) = f(\underline{y}) + \int_0^1 ds \, \underline{\partial} f(\underline{y} + (\underline{x} - \underline{y})s) \cdot (\underline{x} - \underline{y})$ per ogni $\underline{y} \in B_r$, mediando questa identità su \underline{y} si trova:

$$f(\underline{x}) = \int_{B_r} \frac{d\underline{y}}{|B_r|} \int_0^1 ds \, \underline{\partial} f(\underline{y} + (\underline{x} - \underline{y})s) \cdot (\underline{x} - \underline{y})$$

Supponendo α intero si dimostri la (P). (*Idea*: si esegua il cambiamento di variabile: $\underline{y} \rightarrow \underline{z} = \underline{y} + (\underline{x} - \underline{y})s$ in modo che:

$$\int_{B_r^0} |f(\underline{x})|^\alpha \frac{d\underline{x}}{|B_r^0|} \equiv \int_{B_r^0} \frac{d\underline{x}}{|B_r^0|} \left| \int_0^1 \int_{B_r^0} \frac{d\underline{z}}{|B_r^0|} \frac{ds}{(1-s)^2} \underline{\partial} f(\underline{z}) \cdot (\underline{z} - \underline{x}) \right|^\alpha$$

ove il dominio di integrazione di \underline{z} dipende da \underline{x} e s ed è contenuto nella sfera di raggio $2(1-s)r$ attorno ad \underline{x} . L' integrale si può allora maggiorare con:

$$\int \frac{d\underline{z}_1}{|B_r^0|} \frac{ds_1}{1-s_1} \dots \frac{d\underline{z}_\alpha}{|B_r^0|} \frac{ds_\alpha}{1-s_\alpha} (2r)^\alpha |\underline{\partial} f(\underline{z}_1)| \dots |\underline{\partial} f(\underline{z}_\alpha)| \int \frac{d\underline{x}}{|B_r^0|}$$

ove \underline{x} varia in un dominio tale che $|\underline{x} - \underline{z}_i| \leq 2(1-s_i)r$ per ogni i . E quindi l' integrale su $\frac{d\underline{x}}{|B_r|}$ è maggiorato da $8(1-s_i)^3$ per ogni i . E allora, eseguendo una media geometrica di queste maggiorazioni (su α termini):

$$\int_{B_r^0} |f(\underline{x})|^\alpha \frac{d\underline{x}}{|B_r^0|} \leq 2^{\alpha+3} r^\alpha \prod_{i=1}^\alpha \int \frac{d\underline{z}_i ds_i}{|B_r^0| (1-s_i)} |\underline{\partial} f(\underline{z}_i)| (1-s_i)^{3/\alpha} \leq \\ \leq 2^{\alpha+3} r^\alpha \left(\int_{B_r^0} |\underline{\partial} f(\underline{z})| \frac{d\underline{z}}{|B_r^0|} \right)^\alpha \cdot \left(\int_0^1 \frac{ds}{(1-s)^{1-3/\alpha}} \right)^\alpha$$

ottenendo (P) e una stima esplicita della costante C_α^P .)

[14] Si usi la convessità (di ovvia verifica, derivando due volte su α^{-1}) in α^{-1} di $\alpha^{-1} \rightarrow \|f\|_\alpha \equiv (\int |f(\underline{x})|^\alpha d\underline{x}/|B_r^0|)^{1/\alpha}$ per ottenere (P) per ogni $1 \leq \alpha < \infty$. (*Idea*: Poiché (P) può essere scritta $\|f\|_\alpha \leq C_\alpha (\int |\partial f| d\underline{x}/r^2)$ allora se $\alpha^{-1} = \vartheta \alpha_0^{-1} + (1 - \vartheta)(\alpha_0 + 1)^{-1}$ con α_0 intero segue che C_α può essere scelto $C_\alpha = \vartheta C_{\alpha_0} + (1 - \vartheta) C_{\alpha_0+1}$).

[15] Si consideri una successione \underline{u}^λ di soluzioni della equazione regolarizzata secondo Leray, c.f.r. §14, D) che converge *debolmente* (cioè componente di Fourier a componente) ad una soluzione debole di Leray dell' equazione di NS. Allora, per costruzione, le $\underline{u}^\lambda, \underline{u}$ verificano le stime *a priori* in (14.8) e (quindi) (16.7). Si deduca che \underline{u} verifica le (16.10). (*Idea*: : solo la c) è da dimostrare. Si osservi che se $\underline{u}^\lambda \rightarrow \underline{u}^0$ debolmente, allora il membro di sinistra di (16.1) è semicontinuo e quindi il valore calcolato con \underline{u}^0 è non superiore al limite del membro di destra in (16.1). Mentre non è difficile vedere che il membro di destra della (16.1) è *continuo* nel limite $l \rightarrow \infty$. Infatti dato $N > 0$ la convergenza debole implica:

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{T_0} dt \int_\Omega |\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0|^2 d\underline{x} \equiv \int_0^{T_0} dt \sum_{0 < |\underline{k}|} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t) - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0(t)|^2 \leq \\ & \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{0 < |\underline{k}| < N} \int_0^{T_0} dt |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t) - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0(t)|^2 + \sum_{|\underline{k}| \geq N} \int_0^{T_0} dt \frac{|\underline{k}|^2}{N^2} |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t) - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0(t)|^2 \leq \\ & \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{0 < |\underline{k}| < N} \int_0^{T_0} dt |\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t) - \underline{\gamma}_{\underline{k}}^0(t)|^2 + \frac{1}{N^2} \int_0^{T_0} dt \int_\Omega |\partial(\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0)|^2 = \\ & = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \int_0^{T_0} dt \int_\Omega |\partial(\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0)|^2 \leq \frac{2E_0 \nu^{-1}}{N^2} \end{aligned}$$

usando la stima *a priori* in (14.8) (con forza nulla) e la convergenza componente a componente di $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^\lambda(t)$ a $\underline{\gamma}_{\underline{k}}^0(t)$. Così si ha $\int_0^{T_0} \int_\Omega |\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0|^2 \rightarrow 0$ e questo mostra la convergenza dei primi due termini del membro di destra della (16.1) ai corrispondenti termini della c) in (16.10).

Si applichi ora la disuguaglianza (S), (16.4), con $q = 3$, $a = \frac{3}{4}$, $\frac{q}{2} - a = \frac{3}{4}$, e di nuovo per le stime *a priori* in (14.8):

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} dt \int_\Omega |\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0|^3 d\underline{x} \leq C \int_0^{T_0} dt \|\partial(\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0)\|_2^{3/2} \|\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0\|_2^{3/2} \leq \\ & \leq C \left(\int_0^{T_0} dt \|\partial(\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0)\|_2^2 \right)^{3/4} \left(\int_0^{T_0} dt \|\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0\|_2^6 \right)^{1/4} \leq \\ & \leq C(2E_0 \nu^{-1})^{3/4} (2\sqrt{E_0}) \int_0^{T_0} dt \|\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0\|_2^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

che mostra la continuità del terzo termine a secondo membro della (16.10). Infine, ed in modo analogo, se si ricorda che $p^\lambda = -\Delta^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (u_i^\lambda u_j^\lambda)$ e si applicano le disuguaglianze (CZ) e (H), si trova:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} dt \int_\Omega d\underline{x} |p^\lambda \underline{u}^\lambda - p^0 \underline{u}^0| \leq \int \int |p^\lambda - p^0| |\underline{u}^\lambda| + \int \int |p^0| |\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0| \leq \\ & \left(\int \int |p^\lambda - p^0|^{3/2} \right)^{2/3} \left(\int \int |\underline{u}^\lambda|^3 \right)^{1/3} + \left(\int \int |p^0|^{3/2} \right)^{2/3} \left(\int \int |\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0|^3 \right)^{1/3} \end{aligned}$$

ove l' ultimo termine tende a zero per la relazione precedente, mentre per il primo vale la stima, via la (CZ), da: $\int_0^{T_0} \int_\Omega |p^\lambda - p^0|^{3/2} \leq \left(\int \int |\underline{u}^\lambda - \underline{u}^0|^3 \right)^{2/3} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$ che mostra

la continuità del quarto termine a destra della c) di (16.10). Dunque il membro di destra é continuo nel limite considerato.)

Bibliografia: [CKN], [G5].

┐

┐

228

§16: stime dimensionali della teoria CKN

.

┐

┐

CAPITOLO III

Turbolenza incipiente. Cinematica del Caos

Lack of periodicity is very common in natural systems, and is one of the distinguishing features of turbulent flow. Because instantaneous flow patterns are so irregular, attention is often confined to the statistics of turbulence, which, in contrast to the details of turbulence, often behave in a regular well-organized manner. The short-range weather forecaster, however, is forced willy-nilly to predict the details of the large scale turbulent eddies—the cyclones and anticyclones—which continually arrange themselves into new patterns. Thus there are occasions when more than the statistics of irregular flow are of very real concern. Da E. N. Lorenz, 1963, [Lo] p. 131.

§17 La teoria dei fluidi in mancanza di teoremi di esistenza e unicità per le equazioni della fluidodinamica. I modelli di Rayleigh e di Lorenz. Equazioni di NS troncate.

Avendo posto in luce i problemi fondamentali sull' equazione di Navier–Stokes e in particolare la mancanza di una base teorica adeguata per la costruzione di un algoritmo di soluzione, costruttivo e *a priori* convergente, e volendo comunque cercare di dare un quadro teorico per i moti dei fluidi tridimensionali siamo costretti a mutare atteggiamento.

In realtà il sapere che le equazioni di Navier–Stokes hanno soluzioni regolari, per dati iniziali regolari, (vero se $d = 2$ e probabile se $d = 3$, falso se $d \geq 4$) non aiuterebbe molto.

Una situazione analoga si incontra nella teoria cinetica dei gas. Se si suppone che l' interazione fra gli atomi sia limitata inferiormente, si trova facilmente che le equazioni del moto di Newton ammettono soluzioni globali. ■ Però questo in nulla ci aiuta a dedurre le proprietà dei gas (equazione di stato, fluttuazioni, coefficienti di trasporto, ecc.). Anzi non appena N , numero di particelle, è di qualche decina diviene impossibile l' impiego dei metodi di costruzione delle soluzioni, non perchè non siano validi, ma perchè neppure i più grandi calcolatori concepibili (per non parlare di quelli esistenti) potrebbero mai essere in grado di applicare con accuratezza gli algoritmi di soluzione impiegando un tempo ragionevole (a confronto, ad esempio, con quello di una vita umana o, addirittura, della vita dell' universo).

Questo però non ha impedito lo sviluppo di una profonda e soddisfacente (almeno per molti aspetti) teoria dei gas.

Il problema che, allora, ci si è posto è quello di vedere se non sia possibile costruire una teoria analoga per lo studio del moto dei fluidi, senza veramente ■ entrare nei dettagli matematici delle proprietà delle soluzioni dell' equazione ■ di Navier–Stokes (e si dovrebbe aggiungere l' aggettivo *eventuali* alla parola soluzioni perchè, come si è visto, se $d \geq 3$ non si conoscono metodi per costruire neppure *una* delle soluzioni deboli dell' equazione di Navier–Stokes, tranne i casi banali in cui è possibile garantire una soluzione globale, c.f.r. §14, problemi).

La prima osservazione è che l' equazione di Navier–Stokes, nonostante il ruolo privilegiato che ha finora giocato nelle nostre analisi, non è in realtà un' *equazione fondamentale*. Si deve ricordare che è un' equazione fenomenologica, ottenuta facendo varie ipotesi. Ed è facile convincersi che modificando di poco l' interpretazione matematica delle ipotesi fatte si possono ottenere equazioni differenti dall' equazione di Navier–Stokes, anche se simili, ma equivalenti per quel che riguarda le predizioni sui moti di fluidi.

Ad esempio considerando, sempre per semplicità, un fluido in un contenitore ■ cubico con condizioni al bordo periodiche, l' ipotesi che "il gradiente della ■ velocità sia piccolo", fatta a proposito della giustificazione dell' equazione costitutiva:

$$17.1 \quad T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (17.1)$$

potrebbe essere interpretata dicendo che non solo $\partial_i u_j$ deve essere piccolo, ma che deve esistere una scala di lunghezza minima λ al di sotto della quale non si hanno variazioni di \underline{u} , ossia dicendo che la trasformata di Fourier \hat{u}_k di \underline{u} non ha componenti a lunghezza d'onda più corta di λ , cioè con $|k| > 2\pi\lambda^{-1}$.

E allora le equazioni che si otterrebbero sarebbero le equazioni di Navier-Stokes troncate a $|k| < 2\pi\lambda^{-1}$, per le quali abbiamo visto che esistono teoremi di esistenza e unicità globali e algoritmi costruttivi di approssimazione. ■ Se, però, il campo di velocità sviluppa, nel corso del tempo, componenti di Fourier con $|k| \simeq 2\pi\lambda^{-1}$ che hanno ampiezze non trascurabili si dovrà rinunciare ad usare l'equazione di Navier-Stokes per descrivere il moto e passare ad equazioni più complicate che potrebbero essere equazioni non fluidodinamiche ma coinvolgenti la natura atomica stessa del fluido.

È evidente, ad esempio, che se $\lambda \simeq$ libero cammino medio nel fluido e se le armoniche di \underline{u} di lunghezza d'onda $\simeq \lambda$ hanno importanza nella descrizione del moto, allora la (17.1) e quindi l'equazione di Navier-Stokes stessa ne offrono una descrizione inadeguata.

Si può dunque assumere il punto di vista che la teoria dei fluidi possa essere svolta immaginando di usare le equazioni di Navier-Stokes troncate con un taglio ultravioletto ad un vettore d'onda $|k| = K \stackrel{def}{=} W/\nu$ ove W è una variazione di velocità per unità di lunghezza caratteristica del dato iniziale e ν è la viscosità dinamica; almeno se inizialmente i modi di Fourier con ampiezza non trascurabile sono quelli con $|k| \ll W\nu^{-1}$.

Ci si preoccuperà poi di questioni di validità del modello solo se, nel corso del tempo, il moto che si studia svilupperà armoniche di Fourier con $|k|$ dell'ordine di K . In questo caso si potrà decidere di continuare a usare le stesse equazioni, ma con un taglio ultravioletto più grande, e così via finché non si giunge a dover considerare il taglio ultravioletto così grande da rendere irragionevole il modello continuo dei fluidi che si considera (quando il taglio ultravioletto va eseguito su scala atomica).

È un dato di fatto empirico che facendo evolvere dati iniziali regolari (con poche armoniche) non si sviluppano armoniche, al trascorrere del tempo, a lunghezza d'onda sempre più corta, ma il moto evolve asintoticamente, se la forza esterna è stazionaria, "confinando" le armoniche rilevanti e le loro ampiezze. A §29 si vedrà che, anzi, $K = W\nu^{-1} \equiv L^{-1}R$ (con R numero di Reynolds) è un taglio ultravioletto più che sufficiente e ci si deve aspettare che un taglio effettivo abbia luogo a numeri d'onda sostanzialmente più piccoli, ossia $K' \stackrel{def}{=} L^{-1}R^{3/4}$, c.f.r. (29.9); e armoniche più alte, anche se inizialmente presenti, decadranno rapidamente.

Questo punto di vista ci permette di cercare di stabilire una teoria empirica dei moti dei fluidi, descrivendoli con equazioni differenziali che sono, o sono ritenute, equivalenti all'equazione di Navier-Stokes, a meno che non si verifichino eventi precisamente definiti che costringano a mutare il modello per dare una descrizione più corretta dei fenomeni.

E così si ha un procedimento per costruire modelli matematici di fluidi

in moto che spesso si rivelano autoconsistenti (nel senso che non evolvono dati iniziali più o meno arbitrari verso situazioni in cui le approssimazioni fatte nel costruire il modello non sono verificate).

L'interesse di questo punto di vista è che i modelli che si ottengono in questo modo sono modelli privi di difficoltà matematiche, per quel che concerne l'esistenza e l'unicità e la costruttività delle soluzioni, e però sono modelli che possono essere realistici e illustrare fenomeni importanti.

Un esempio classico, e importante, è fornito dal *modello di Lorenz* per la convezione. Si tratta di un modello dedotto come sovrasemplificazione del modello di Rayleigh della convezione discusso nel §5. Il trattamento di Lorenz riveste un'importanza storica notevole, perchè stabilisce in modo chiaro un metodo di analisi seguito successivamente nella maggior parte degli studi teorici del problema della turbolenza, [Lo].

Per evitare di considerare il modello di Lorenz come una curiosità matematica ■ è utile tener presente l'analisi del §5, ove si è dedicata attenzione ai fondamenti fisici del modello di Rayleigh, del quale il modello di Lorenz costituisce una semplificazione.

Illustreremo anche alcuni troncamenti della equazione di Navier–Stokes bidimensionale con condizioni al bordo periodiche. Sia il modello di Lorenz, che i troncamenti dell'equazione di Navier–Stokes che considereremo, dovranno essere ritenuti modelli di interesse matematico ed esemplificativo: serviranno ad illustrare, nei prossimi paragrafi, casi concreti nei quali si manifestano i meccanismi che si crede siano all'origine del fenomeno dello sviluppo della turbolenza e dei moti caotici. La turbolenza "sviluppata" o "forte" si manifesta come fenomeno importante solo a numeri di Reynolds molto grandi e sarà oggetto di studio successivo a quello della turbolenza iniziale, che ha invece luogo a numero di Reynolds (relativamente) piccolo.

(A) *Il problema bidimensionale di Saltzman.*

Ricordiamo che nella teoria della convezione del §5 si è denotato con \underline{u} il campo di velocità e con ϑ la variazione del campo di temperatura rispetto al profilo lineare, ossia la banale "*soluzione termostatica*", che si avrebbe se il fluido restasse immoto, solo conducendo calore dalla superficie superiore del contenitore (più fredda) a quella (più calda) inferiore: *c.f.r.* (4.53). La versione bidimensionale del modello di Rayleigh si ottiene supponendo che \underline{u}, ϑ in (4.53) siano indipendenti da y .

In questo caso esiste un potenziale di velocità $\psi = \psi(x, z)$:

$$17.2 \quad \underline{u} = (-\partial_z \psi, 0, \partial_x \psi) \quad (17.2)$$

e le (4.53) possono essere riscritte in termini di ψ anzichè di \underline{u} . Usando la notazione:

$$17.3 \quad \underline{u} \cdot \underline{\partial} f \equiv (-\partial_z \psi \partial_x f + \partial_x \psi \partial_z f) \equiv \frac{\partial(\psi, f)}{\partial(x, z)} \quad (17.3)$$

le equazioni di Rayleigh (4.53) assumono la forma detta "di Saltzman":

$$\begin{aligned}
 17.4 \quad \partial_t \vartheta + R \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, z)} &= \sigma^{-1} \Delta \vartheta + R \partial_x \psi, & \psi|_{z=0} &= \psi|_{z=1} = 0 \\
 \partial_t \Delta \psi + R \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, z)} &= \Delta^2 \psi + R \partial_x \vartheta, & \vartheta|_{z=0} &= \vartheta|_{z=1} = 0
 \end{aligned} \tag{17.4}$$

che differiscono dalle equazioni di Saltzman in [Lo] solo perchè scritte in forma adimensionale: R è il numero di Reynolds e σ è il numero di Prandtl, (c.f.r. §5).

L'equazione $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ è ora una identità, se \underline{u} è dato da (17.2), mentre la condizione $\psi(x, 0) \equiv \psi(x, 1)$ traduce le due condizioni di impulso orizzontale totale nullo e di velocità orizzontale nulla se $z = 0, 1$.¹ Il fatto poi che il valore costante di ψ , comune per $z = 0$ e $z = 1$, sia posto uguale a 0 riflette semplicemente la proprietà della ψ di essere definita a meno di una costante arbitraria.

(B) *Stime a priori.*

Consideriamo una soluzione delle equazioni di Rayleigh, (17.4), differenziabile una volta e con derivate continue.

Se $\delta T < 0$, cioè se la superficie superiore è a temperatura $T_0 - \delta T$ più calda di quella T_0 della superficie inferiore, moltiplicando la prima della (4.54) per \underline{u} e la seconda per ϑ , si trova:

$$\begin{aligned}
 17.5 \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= -S(t) \\
 E(t) &= \int \underline{u}^2 d\underline{x} + \int \vartheta^2 d\underline{x}, & S(t) &= \int (\underline{\partial} \underline{u})^2 d\underline{x} + \sigma^{-1} \int (\underline{\partial} \vartheta)^2 d\underline{x}
 \end{aligned} \tag{17.5}$$

e quindi $E(t) \leq E(0)$. Se invece $\delta T > 0$ si trova dalla (4.53):

$$17.6 \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) = -S(t) + 2R \int \vartheta u_z d\underline{x} \leq -S(t) + RE(t) \tag{17.6}$$

($2ab \leq a^2 + b^2$), e quindi:

$$17.7 \quad E(t) \leq E(0) e^{2Rt} \tag{17.7}$$

Se studiamo il problema con condizioni periodiche orizzontali, ossia richiedendo che \underline{u}, ϑ siano funzioni periodiche in x, y a z fisso, con periodo l^{-1} , ove $l > 0$ è un parametro fissato, troviamo:

$$17.8 \quad S(t) \geq ((2\pi l)^2 + \pi^2)(1 + \sigma^{-1})E(t) \geq \pi^2 \sigma^{-1} E(t) \tag{17.8}$$

¹ Se $\psi(x, 0)$ e $\psi(x, 1)$ sono costanti si ha: $u_z = \partial_x \psi = 0$ se $z = 0, 1$. Inoltre i due valori costanti della ψ per $z = 0$ e $z = 1$ sono collegati se si richiede che l'impulso orizzontale totale per unità di lunghezza orizzontale sia nullo: se i valori di ψ nei due casi sono uguali allora $\int u_x dx dz = - \int \partial_z \psi dx dz = - \int (\psi(x, 1) - \psi(x, 0)) dx = 0$.

perché lo sviluppo dei campi in serie di Fourier in x e in serie di seni in z ha momento minimo $2\pi l$ nella direzione x e π nella direzione z (essendo, nelle nostre unità, l'altezza uguale a 1). E dunque, nel caso *non interessante* $\delta T < 0$ (c.f.r. (4.54)), la (17.5) implica:

$$17.9 \quad E(t) \leq E(0)e^{-2\pi^2\sigma^{-1}t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (17.9)$$

e lo stato di quiete $\vartheta \equiv 0$, $\underline{u} = \underline{0}$ è sempre un *equilibrio stabile*. Mentre se $\delta T > 0$ lo stato di quiete è stabile (per le (17.6),(17.8)) almeno se $2R < \pi^2\mu$, ossia se R_{Ray} è abbastanza piccolo. E, in questo caso, possiamo solo dedurre:

$$17.10 \quad E(t) \leq E(0)e^{-(2\pi^2\mu - 2R)t} \quad (17.10)$$

sebbene, anche se R è grande, la stima (17.10) potrebbe essere eccessivamente pessimistica (e, almeno in alcuni casi, si può vedere che può essere migliorata in $E(t) \leq cost$).

Nel caso bidimensionale si ottiene dalle (17.4) una stima *a priori* migliore, che conduce anche a stimare $(\underline{\partial}\underline{u})^2$ e $(\Delta\psi)^2$, simile alla (17.10) ma con $\underline{u}^2 = (\underline{\partial}\psi)^2$ sostituito da $(\Delta\psi)^2$:

$$17.11 \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{E}_1 &\equiv \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int (\vartheta^2 + (\Delta\psi)^2) d\underline{x} \leq \\ &\leq - \int ((\Delta\underline{\partial}\psi)^2 + \sigma^{-1}(\underline{\partial}\vartheta)^2) d\underline{x} + R \int (\vartheta\partial_x\psi + \Delta\psi\partial_x\vartheta) d\underline{x} \end{aligned} \quad (17.11)$$

che implica che la quantità $E_1 \equiv \int (\vartheta^2 + (\Delta\psi)^2) d\underline{x}$ è stimata da:

$$17.12 \quad E_1(t) \leq E_1(0)e^{2Ct} \quad (17.12)$$

e C può essere stimata in funzione di R, σ, l , c.f.r. problemi.

La stima *a priori* in (17.12) è sufficiente, con la (17.8), a svolgere una teoria dell'esistenza delle soluzioni deboli. E, *nel caso 2-dimensionale*, la (17.12) consente la dimostrazione di un teorema di esistenza unicità e regolarità (quando i dati iniziali sono di classe C^∞) del tipo di quello discusso nel §13 per l'equazione NS.

Dalle stime su E_1 (quindi su $\int (\underline{\partial}\underline{u})^2 d\underline{x}$, $\int \vartheta^2 d\underline{x}$), e pensando le equazioni scritte come in (4.53), si può ripetere la teoria della autoregolizzazione del §13 nel caso presente. L'unico cambiamento sostanziale è che ora le condizioni al bordo sono diverse, e quindi i campi di velocità e temperatura vanno sviluppati su basi diverse da quella di Fourier, c.f.r. (17.13). Si trova che se $|\vartheta_{\underline{k}}| < C_\beta |\underline{k}|^{-\beta}$ e $|\underline{u}_{\underline{k}}| < C_\alpha |\underline{k}|^{-\alpha}$ con $\beta \geq 0$ e $\alpha \geq 2$, e $C_\alpha, C_\beta < \infty$, allora ϑ, \underline{u} sono di classe C^∞ .

(C) Il modello di Lorenz.

Il modello di Lorenz si ottiene considerando le (17.4) con condizioni periodiche nella variabile $x \in [0, 2a^{-1}]$, ove a è un parametro adimensionale (si usano qui le equazioni in forma adimensionale: nelle coordinate originali la scala di lunghezza associata a $2a^{-1}$ sarebbe: $2a^{-1}H$).

Si scrive allora, supponendo ϑ e ψ di classe C^∞ e scegliendo una base opportuna di funzioni adattata alle condizioni periodiche in x e alle condizioni al contorno di annullamento per $z = 0, 1$:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, z) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \vartheta_{k_1 k_2} e^{i\pi k_1 l x} \sin \pi k_2 z \\ \psi(x, z) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \psi_{k_1 k_2} e^{i\pi k_1 l x} \sin \pi k_2 z \end{aligned} \quad (17.13)$$

con $\vartheta_{k_1 k_2} = \overline{\vartheta}_{-k_1 k_2}$ e $\psi_{k_1 k_2} = \overline{\psi}_{-k_1 k_2}$. Si possono poi studiare le soluzioni che ammettono uno sviluppo come (17.13) con $\vartheta_{\underline{k}}$ e $\psi_{\underline{k}}$ reali.

È infatti immediato verificare che, per ragioni di simmetria, se i dati iniziali si possono scrivere come in (17.13) allora tale rappresentazione rimane valida per tutti i tempi $t > 0$, per ogni soluzione regolare delle (17.4). Le equazioni (17.4) diventano, dopo un pó di trigonometria:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_{r_1 r_2} &= -\sigma^{-1} \pi^2 (l^2 r_1^2 + r_2^2) \vartheta_{r_1 r_2} + \pi l r_1 R \psi_{r_1 r_2} - \frac{\pi^2 l}{4} R \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{\substack{\varepsilon=\pm 1 \\ \eta=\pm 1}} \sum_{\substack{|k_1+\eta h_1|=r_1 \\ |k_2+\varepsilon h_2|=r_2}} (k_1 h_2 - \eta k_2 h_1) \psi_{k_1 k_2} \vartheta_{h_1 h_2} \sigma_2 \\ \dot{\psi}_{r_1 r_2} &= -\pi^2 (l^2 r_1^2 + r_2^2) \psi_{r_1 r_2} + \frac{\pi l r_1}{\pi^2 (r_1^2 l^2 + r_2^2)} R \vartheta_{r_1 r_2} - \frac{\pi^2 l}{4} R \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{\substack{\varepsilon=\pm 1 \\ \eta=\pm 1}} \sum_{\substack{|k_1+\eta h_1|=r_1 \\ |k_2+\varepsilon h_2|=r_2}} \frac{\pi^2 (l^2 h_1^2 + h_2^2)}{\pi^2 (l^2 r_1^2 + r_2^2)} (\eta k_1 h_2 - \varepsilon k_2 h_1) \psi_{k_1 k_2} \vartheta_{h_1 h_2} \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \quad (17.14)$$

ove σ_1, σ_2 sono i segni di $k_1 + \eta h_1$ e $k_2 + \varepsilon h_2$, rispettivamente. E $\underline{r}, \underline{k}, \underline{h}$ sono vettori a componenti intere non negative, con seconda componente sempre positiva, mentre la prima componente può essere nulla solo se il vettore in questione appare come indice per ϑ (c.f.r. (17.13)).

Le (17.14) sono la "forma spettrale", c.f.r. §9, delle (17.4) per soluzioni con dati iniziali scrivibili come (17.13).

Almeno al variare di R e σ in opportuni intervalli e come è stato mostrato da esperimenti (numerici) di Saltzman, [Sa],[Lo], si pensa che esistano dati iniziali tali che, al tendere di $t \rightarrow +\infty$, le soluzioni delle (17.14) evolvono verso uno stato in cui solo tre delle componenti spettrali $\vartheta_{\underline{k}}, \psi_{\underline{k}}$ sono non nulle; e precisamente le componenti

$$\psi_{11} \stackrel{def}{=} \sqrt{2}X, \quad \vartheta_{11} \stackrel{def}{=} \sqrt{2}Y, \quad \vartheta_{02} \stackrel{def}{=} -Z \quad (17.15)$$

e si trova che le equazioni (17.14) troncate su queste tre componenti diventano:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\pi^2 (1 + a^2) X + \frac{\pi a R}{\pi^2 (1 + a^2)} Y \\ \dot{Y} &= -\sigma^{-1} \pi^2 (1 + a^2) Y - \pi^2 a R X Z + \pi a R X \\ \dot{Z} &= -4\sigma^{-1} \pi^2 Z + \pi^2 a R X Y \end{aligned} \quad (17.16)$$

Poi per semplificare le equazioni si riscalgano le variabili con opportuni parametri λ, μ, ν, ξ (da non confondere con le grandezze fisiche che abbiamo chiamato con lo stesso nome):

$$17.18 \quad x \equiv \lambda X, \quad y \equiv \mu Y, \quad z \equiv \nu Z, \quad \tau \equiv \xi t \quad (17.17)$$

in modo che si riscrivono le equazioni come:

$$17.19 \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \xi^{-1}(-\pi^2(1+a^2)x + \frac{\pi a \lambda R}{\pi^2(1+a^2)\mu}y) \\ \dot{y} &= \xi^{-1}(-\sigma^{-1}\pi^2(1+a^2)y - \frac{\pi^2 a R \mu}{\lambda \nu}xz + \frac{\pi a R \mu}{\lambda}x) \\ \dot{z} &= \xi^{-1}(-4\sigma^{-1}\pi^2z + \frac{\pi^2 a R \nu}{\lambda \mu}xy) \end{aligned} \quad (17.18)$$

Sceglieremo, in accordo con le normalizzazioni di Lorenz:

$$17.20 \quad \begin{aligned} \xi^{-1}\sigma^{-1}\pi^2(1+a^2) &= 1, & \xi^{-1}\frac{\pi^2 a R \nu}{\lambda \mu} &= 1, & \xi^{-1}\frac{\pi^2 a R \mu}{\lambda \nu} &= 1, \\ r \stackrel{def}{=} \xi^{-1}\frac{\pi a R \mu}{\lambda}, & \xi^{-1}\frac{\pi a R \lambda}{\pi^2(1+a^2)\mu} \stackrel{def}{=} \sigma, & b &\equiv \frac{4}{(1+a^2)} \end{aligned} \quad (17.19)$$

ottenendo le equazioni del "modello di Lorenz":

$$17.21 \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y & b &= 4(1+a^2)^{-1} \\ \dot{y} &= -y - xz + rx & \sigma &= \kappa \nu^{-1} \\ \dot{z} &= -bz + xy & r &= \frac{(\pi a)^2 R^2 \sigma}{(\pi^2(1+a^2))^3} \equiv \frac{R_{Ray}}{R_a} \end{aligned} \quad (17.20)$$

ove $R_a \equiv \pi^4(1+a^2)^3 a^{-2}$ e R_{Ray} è il numero di Rayleigh, definito in (4.51).

Osservazione: (simmetria) È importante notare che le equazioni (17.20) sono invarianti rispetto a un (semplice) gruppo di simmetria; e cioè rispetto al gruppo a due elementi delle trasformazioni

$$17.21a \quad x \rightarrow \varepsilon x, \quad y \rightarrow \varepsilon y, \quad z \rightarrow z \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (17.21)$$

che chiamiamo il "gruppo di simmetria" dell'equazione (17.20).

Le (17.20) sono tali che la soluzione termostatica $\vartheta = \psi = 0$ perde stabilità per $R_{Ray} > R_a$, ossia per $r > 1$, (come fu mostrato da Rayleigh nel contesto più generale della equazione di Rayleigh tridimensionale, e come si verifica immediatamente studiando l'equazione linearizzata nelle vicinanze della soluzione termostatica). Il valore di a che dà il valore minimo di R_a è $a^2 = 1/2$, il che mostra che la instabilità convettiva si instaura generando moti convettivi spazialmente periodici con periodo di lunghezza $2a^{-1}H \equiv 2\sqrt{2}H$ (in termini di grandezze non adimensionali).

Queste equazioni furono studiate da Lorenz [Lo], scegliendo:

$$17.22 \quad a^2 = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{8}{3}, \quad \sigma = 10. \quad (17.22)$$

Questa scelta è semplicemente motivata dal fatto che $a^2 = 1/2$ (cui corrisponde $b = 8/3$, c.f.r. (17.20)) è il valore di a per cui la soluzione statica $\vartheta = \psi = 0$ diviene instabile per il più piccolo valore di R_{Ray} . Il valore di σ è un valore dell'ordine di grandezza del numero di Prandtl per l'acqua in condizioni normali, (c.f.r. tavola del §5).

(D) *Modelli di Navier–Stokes troncati.*

In modo analogo si possono studiare sistemi di equazioni ordinarie ottenuti per troncamento delle equazioni di NS.

Insieme al modello di Lorenz e per illustrare altri fenomeni che, pur molto frequenti, in esso non si manifestano sarà utile considerare alcuni troncamenti speciali delle equazioni di Navier–Stokes. Ci limiteremo a considerare troncamenti delle equazioni bidimensionali con condizioni al bordo periodiche. Quest'ultime equazioni, scritte in forma spettrale per le grandezze scalari $\gamma_{\underline{k}}$ definite in (13.26) sono, c.f.r. (9.10), (9.25):

$$17.23 \quad \dot{\gamma}_{\underline{k}} = -\underline{k}^2 \gamma_{\underline{k}} - i \sum_{\Delta(\underline{k})} \gamma_{\underline{k}_2} \gamma_{\underline{k}_3} \frac{(\underline{k}_2^\perp \cdot \underline{k}_3)(\underline{k}_3^2 - \underline{k}_2^2)}{|\underline{k}_1| |\underline{k}_2| |\underline{k}_3|} + \Pi_{\underline{k}} g_{\underline{k}} \quad (17.23)$$

ove la somma verte su tutte le coppie (non ordinate), denotate $\Delta(\underline{k})$, $\underline{k}_2, \underline{k}_3$ tali che $\underline{k}_2 + \underline{k}_3 = \underline{k}$.

È la “somma sulle triadi di modi in interazione”; e il campo di velocità è:

$$17.24 \quad \underline{u}(\underline{x}) = \sum_{\underline{k} \neq 0} \gamma_{\underline{k}} \frac{\underline{k}^\perp}{|\underline{k}|} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \quad (17.24)$$

(cfr. §9, §13) e la viscosità ν è posta uguale a 1, per semplicità.

I troncamenti che considereremo sono i troncamenti in cui \underline{k} e i vettori di $\Delta(\underline{k})$ sono scelti fra i seguenti sette:

$$17.25 \quad \begin{aligned} \underline{k}_1 &= (1, 1), & \underline{k}_2 &= (3, 0), & \underline{k}_3 &= (2, -1), & \underline{k}_4 &= (1, 2), \\ \underline{k}_5 &= (0, 1), & \underline{k}_6 &= (1, 0), & \underline{k}_7 &= (1, -2) \end{aligned} \quad (17.25)$$

ed i loro opposti.

Si verifica subito che le equazioni troncate sui modi in (17.25) sono (ponendo $\gamma_i \equiv \gamma_{\underline{k}_i}$):

$$17.26 \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -2\gamma_1 + \frac{4i}{\sqrt{10}}\gamma_2\bar{\gamma}_3 - \frac{4i}{\sqrt{10}}\gamma_4\bar{\gamma}_5, & \dot{\gamma}_2 &= -9\gamma_2 - \frac{3i}{\sqrt{10}}\gamma_1\gamma_3 \\ \dot{\gamma}_3 &= -5\gamma_3 - \frac{7i}{\sqrt{10}}\bar{\gamma}_1\gamma_2 - \frac{9i}{5\sqrt{2}}\gamma_1\gamma_7 + r, & \dot{\gamma}_4 &= -5\gamma_4 - \frac{i}{\sqrt{10}}\gamma_1\gamma_5 \\ \dot{\gamma}_5 &= -\gamma_5 + \frac{3i}{\sqrt{10}}\bar{\gamma}_1\gamma_4 + \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_1\bar{\gamma}_6, & \dot{\gamma}_6 &= -\gamma_6 - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_1\bar{\gamma}_5 \\ \dot{\gamma}_7 &= -5\gamma_7 - \frac{9i}{5\sqrt{2}}\gamma_3\bar{\gamma}_1 \end{aligned} \quad (17.26)$$

se la forza esterna ha una sola componente, con intensità r (sul modo \underline{k}_3).
Le (17.26) ammettono soluzioni speciali in cui:

$$\begin{aligned} \gamma_j = x_j = \text{reale}, & \quad j = 1, 3, 5 \\ \gamma_j = ix_j = \text{immaginario}, & \quad j = 2, 4, 6, 7 \end{aligned} \quad (17.27)$$

e per questo occorre e basta che i dati iniziali abbiano la forma (17.27) e che r sia reale (una semplice proprietà di simmetria), come supporremo d'ora in avanti.

Per tali soluzioni le equazioni sono solo sette (mentre le (17.26) sono 14):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - \frac{4}{\sqrt{10}}x_2x_3 + \frac{4}{\sqrt{10}}x_4x_5, & \dot{x}_2 &= -9x_2 - \frac{3}{\sqrt{10}}x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -5x_3 + \frac{7}{\sqrt{10}}x_1x_2 + \frac{9}{5\sqrt{2}}x_1x_7 + r, & \dot{x}_4 &= -5x_4 - \frac{1}{\sqrt{10}}x_1x_5 \\ \dot{x}_5 &= -x_5 - \frac{3}{\sqrt{10}}x_1x_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_1x_6, & \dot{x}_6 &= -x_6 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_1x_5 \\ \dot{x}_7 &= -5x_7 - \frac{9}{5\sqrt{2}}x_3x_1 \end{aligned} \quad (17.28)$$

che chiameremo *modello NS_7* o modello troncato a sette modi delle equazioni di Navier–Stokes bidimensionali (studiate in [FT]: in cui le equazioni sono scritte per variabili ξ_i legate a quelle qui chiamate x_i da $x_i \equiv \sqrt{50}\xi_i$, x_2 è denotato $-x_2$ e $r = R\sqrt{50}$ se R è la quantità definita in [FT]; si veda anche [G1], Cap. 5, §8 (5.8.14)).

Osservazione: (simmetria) Notiamo che le equazioni (17.28) sono invarianti rispetto a un semplice gruppo di trasformazioni; cioè rispetto al gruppo a 4-elementi che consiste nelle trasformazioni

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\rightarrow \varepsilon \eta \gamma_1, & \gamma_2 &\rightarrow \varepsilon \eta \gamma_2, & \gamma_3 &\rightarrow \gamma_3, \\ \gamma_4 &\rightarrow \eta \gamma_4, & \gamma_5 &\rightarrow \varepsilon \eta \gamma_5, & \gamma_6 &\rightarrow \eta \gamma_6, & \gamma_7 &\rightarrow \varepsilon \eta \gamma_7 \end{aligned} \quad (17.29)$$

con $\varepsilon, \eta = \pm 1$, che possiamo chiamare il “gruppo di simmetria” delle (17.28).

Un modello più semplice, (considerato in [BF],[FT]: in cui le equazioni sono scritte per le variabili ξ_i legate alle x_i da $x_i \equiv \sqrt{10}\xi_i$ e x_2 è denotato $-x_2$; si veda anche [G1], Cap. 5, §8 (5.8.9)), è il seguente modello NS_5 ottenuto considerando il troncamento speciale (nel senso della (17.27)) ai primi cinque modi in (17.26):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - \frac{4}{\sqrt{10}}x_2x_3 + \frac{4}{\sqrt{10}}x_4x_5, & \dot{x}_2 &= -9x_2 - \frac{3}{\sqrt{10}}x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -5x_3 + \frac{7}{\sqrt{10}}x_1x_2 + r, & \dot{x}_4 &= -5x_4 - \frac{1}{\sqrt{10}}x_1x_5 \\ \dot{x}_5 &= -x_5 - \frac{3}{\sqrt{10}}x_1x_4 \end{aligned} \quad (17.30)$$

ossia ottenuto ponendo $x_6 = x_7 \equiv 0$ in (17.28). Le (17.30) sono invarianti rispetto allo stesso *gruppo di simmetria* definito dalle (17.29):

$$17.29a \quad \begin{aligned} \gamma_1 &\rightarrow \varepsilon \eta \gamma_1, & \gamma_2 &\rightarrow \varepsilon \eta \gamma_2, & \gamma_3 &\rightarrow \gamma_3, \\ \gamma_4 &\rightarrow \eta \gamma_4, & \gamma_5 &\rightarrow \varepsilon \gamma_5, \end{aligned} \quad (17.31)$$

with $\varepsilon, \eta = \pm 1$, which we call the “symmetry group” of (17.30).

Come si vede le equazioni (17.28), (17.30) sono abbastanza analoghe a quelle del modello di Lorenz. Tutte queste equazioni si possono interpretare come equazioni descriventi sistemi di giroscopi accoppiati, soggetti ad un momento esterno costante, ad attrito e a vincoli dinamici (cioè non olonomi) che forzano l’uguaglianza di varie componenti delle velocità angolari. È questo un caso particolare della osservazione generale discussa nel §9.

In modo analogo si potrebbero considerare troncamenti coinvolgenti più modi ovvero anche troncamenti nelle corrispondenti equazioni a $d = 3$. Ma i modelli di Lorenz e di Navier–Stokes a cinque e sette modi, che denotiamo rispettivamente L , NS_5 e NS_7 , saranno sufficienti ad illustrare vari fenomeni della teoria qualitativa dello sviluppo dei moti caotici e della turbolenza.

Problemi.

[1] Si mostri che se \underline{u} e ϑ verificano le condizioni al bordo in (17.4) e sono periodiche in x con periodo l^{-1} allora esiste una costante $C_1 > 0$ tale che: $\int (\partial_x \psi)^2 dx dz \leq C_1 l^2 \int (\Delta \psi)^2 dx dz$, ove l’ integrale in x è esteso al periodo. Si faccia, poi, vedere che il secondo membro di (17.11) può essere maggiorato da $C(R, \sigma, l) \int (\vartheta^2 + (\Delta \psi)^2)$ e si calcoli una stima esplicita per C_1 e la funzione $C(R, \sigma, l)$. (*Idea*: per la prima disuguaglianza si usi (17.3); e per il calcolo di C si usi $ab \leq \varepsilon^{-1} a^2 + \varepsilon b^2$ con $a = \vartheta$ e $b = \partial_x \psi$, ovvero $a = \Delta \psi$ e $b = \partial_x \vartheta$, fissando ε opportunamente nei due casi, in modo da compensare il termine “indesiderato” con il primo integrale a secondo membro di (17.11).)

[2] Si dimostri che se $r < 1$ l’ origine è un insieme attraente globale per le soluzioni di (17.20): tutti i dati iniziali tendono a zero con velocità esponenziale. (*Idea*: si moltiplichi (17.20) scalarmente per $(\alpha x, y, z)$, con $\alpha > 0$ ottenendo, se $E = \alpha x^2 + y^2 + z^2$: $\frac{1}{2} \dot{E} = -\alpha \sigma x^2 - y^2 - bz^2 + (\alpha \sigma + r)xy$ e si noti che la matrice (detta “matrice di stabilità”) $\begin{pmatrix} \alpha \sigma & -\frac{1}{2}(r + \alpha \sigma) \\ -\frac{1}{2}(r + \alpha \sigma) & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $\alpha \sigma - \frac{1}{4}(\alpha \sigma + r)^2$. Tale determinante ha valore massimo per $\alpha \sigma = 2 - r$ e per tale valore di α è $1 - r$. Finchè il determinante è > 0 la matrice è definita positiva ed è dunque $\geq \lambda(r) > 0$. Posto quindi $\delta = \min(\lambda(r), b)$ si vede che $\frac{1}{2} \dot{E} \leq -\delta E$ con $\delta > 0$ se $r < 1$.)

[3] Si dimostri che i moti di (17.20) evolvono in modo che (x, y, z) entri in una qualsiasi sfera di raggio $> br^{-1}(\sigma + r)$ dopo un tempo finito, dipendente dal dato iniziale. (*Idea*: visto [2] basta verificarlo per $r \geq 1$: si cambi variabile ponendo $z = \zeta - z_0$ riscrivendo le equazioni per x, y, ζ ; le si moltiplichino scalarmente per (x, y, ζ) ottenendo, con la scelta $z_0 = -(\sigma + r)$: $\frac{1}{2} \dot{E} = -\sigma x^2 - y^2 - bz^2 - b(\sigma + r)\zeta \leq -\delta' E b(\sigma + r)\sqrt{E}$, ove $E = x^2 + y^2 + \zeta^2$, $\delta' = \min(\sigma, b, 1)$ e quindi $\dot{E} < 0$ se $E > b^2(\sigma + r)^2$.)

[4] Si mostri che se $r = 0$ ogni dato iniziale del modello di Lorenz, (17.20), (17.22), evolve tendendo a zero esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$ e si valuti la costante di tempo. (*Idea*: si moltiplichino le (17.20) per x, y, z rispettivamente e si usi che $\sigma > b > 1$ per dedurre che la costante di tempo è ≥ 1 , c.f.r. [2]).

[5] Si mostri che se $r = 0$ le soluzioni di (17.26) e (17.28) tendono a zero esponenzialmente

e si mostri che la costante di tempo è ≥ 1 nei due casi. Si faccia inoltre vedere che esistono soluzioni, in entrambi i casi, che tendono a zero esattamente come e^{-t} . (*Idea:* Le soluzioni speciali corrispondono a dati iniziali con componenti tutte nulle salvo una opportunamente scelta.)

[6] Si mostri che, se $r \neq 0$ le (17.26), (17.28) hanno, per r piccolo, una soluzione stazionaria, detta anche “punto fisso”, \underline{x}_r che attrae con velocità esponenziale soluzioni con dati iniziali abbastanza prossimi a \underline{x}_0 . E se $r \neq 0$ è piccolo anche le equazioni (17.20), (17.22) hanno la stessa proprietà. (*Idea:* Per continuità la matrice di stabilità lineare, ossia la matrice che si ottiene linearizzando le equazioni nell’intorno del punto fisso, mantiene gli autovalori con parte reale ≤ -1 , dal momento che per $r = 0$ sono ≤ -1 per le stime della costante di tempo in [4] e [5].)

[7] Si mostri che la prima perdita di stabilità di (17.20), (17.22) avviene per $r = 1$ con un autovalore λ della matrice di stabilità che diviene nullo. Si mostri che questa biforcazione dà luogo a due nuove soluzioni stazionarie non più invarianti rispetto alla simmetria, insita nelle (17.20), $(x, y) \leftrightarrow (-x, -y)$. (*Idea:* Si calcolino esplicitamente soluzioni non banali delle equazioni stazionarie e si linearizzi l’equazione intorno ad una di esse ricavando la matrice di stabilità.)

[8] Si identifichino le simmetrie di (17.20), (17.28) e si faccia vedere che al crescere di r vengono successivamente “rotte”, generando per biforcazione moti stazionari con sempre meno simmetrie. (*Idea:* si calcolino le soluzioni stazionarie.)

[9] Si calcoli il valore massimo r_c di r per cui le soluzioni stazionarie senza simmetria di (17.20), (17.22) sono stabili e si faccia vedere che la perdita di stabilità avviene perché due autovalori complessi coniugati non reali raggiungono l’asse immaginario per $r = r_c$. (*Idea:* Si calcolino le soluzioni stazionarie non banali, ossia $z = r - 1$, $x = y = \pm\sqrt{r-1}$, e si linearizzi l’equazione (17.20) intorno ad una di esse ottenendo un’espressione per la matrice di stabilità. Se ne calcoli l’equazione caratteristica, per gli autovalori λ , che avrà la forma $\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$ con c_j semplicemente espresse in termini dei parametri dell’equazione, r, b, σ . Il valore critico massimo di r in corrispondenza del quale queste soluzioni stazionarie perdono stabilità si ottiene imponendo che quest’equazione abbia due soluzioni immaginarie $\lambda = \pm i\mu$ (si vede facilmente che la terza è negativa); e quindi è il valore di r per cui $-\mu^3 + c_1\mu = 0$ e $-c_2\mu^2 + c_0 = 0$. Cioè è il valore di r per cui $c_1 = c_0/c_2$, che risulta essere una equazione lineare per r con soluzione $r_c = 470/19 = 24.736842$.)

[10] Si faccia vedere che la soluzione stazionaria di (17.26) che esiste (ed è unica) per r piccolo perde stabilità per $r > \bar{r}_c$, calcolando \bar{r}_c . E si mostri che esiste $\bar{r}_{c,0} > \bar{r}_c$ tale che per $r > \bar{r}_{c,0}$ non esistono più soluzioni stazionarie stabili. (*Idea:* si calcolino esattamente tutte le soluzioni stazionarie e le rispettive matrici di stabilità; e si discuta il segno della parte reale degli autovalori. Si mostri che l’equazione (di quarto grado) per gli autovalori delle soluzioni stazionarie con minor simmetria ammette una soluzione puramente immaginaria per $r = r_{c,0}$, (il che comporta una discussione di una equazione di secondo grado.)

[11] Si faccia vedere che la perdita di stabilità, per $r = r_c$, delle soluzioni stazionarie del modello di Lorenz è *inversa*: non appaiono cioè moti periodici, sebbene la perdita di stabilità avvenga per l’attraversamento dell’asse immaginario da parte di due autovalori complessi coniugati non reali. Si trovi questo risultato analiticamente e/o empiricamente a mezzo di un calcolatore.

[12] Si consideri un troncamento a 3 modi dell’equazione di Navier-Stokes a $d = 2$ e si supponga che il modo più corto sia il modo $\underline{k}_0 = (0, 1)$. Si supponga anche che la forza $\underline{g}_{\underline{k}}$ abbia solo la componente \underline{k}_0 : $\underline{g}_{\underline{k}} = r\delta_{\underline{k}, \underline{k}_0}\underline{k}_0^\perp$. Si mostri che il moto laminare $\underline{\gamma}_{\underline{k}} = \delta_{\underline{k}, \underline{k}_0} r \underline{k}_0^\perp / \nu \underline{k}_0^2$ è linearmente stabile per tutti i valori di r .

[13] Come [12] ma con un troncamento a 5 modi.

Bibliografia: L’analisi delle sezioni (A)÷(C) è tratta da [Lo] e quella in

(D) da [FT] dagli stessi lavori sono tratti i problemi; si veda anche [G1], Cap. V, §9. Gli ultimi due problemi sono suscettibili di una notevole estensione: l'equazione di Navier Stokes, *non* troncata, a $d = 2$ e forzata sul *modo più corto* è tale che la soluzione laminare è stabile per tutti i valori dell'intensità della forza forzante (*teorema di Marchioro*), *c.f.r.* [Ma]. Questo non vuole ancora dire che nell'equazione di Navier–Stokes bidimensionale non è possibile turbolenza se la forza esterna agisce sul “modo più corto”: perché il teorema non è globale ma fornisce stabilità solo per piccole perturbazioni del moto laminare; però sembra che ci sia evidenza numerica che indica attrattività globale della soluzione laminare (in questo caso in cui la forza agisce solo sul modo più piccolo e $d = 2$).

§18 *Inizio della turbolenza. Cenni di teoria della biforcazione.*

Accade spesso che fluidi anche parecchio complessi siano descritti, in particolari regimi, da equazioni *semplici* a pochi gradi di libertà. Il motivo per cui questo non è sorprendente è che se il moto del fluido è semplice dovrebbe allora essere possibile descrivere i campi di velocità, temperatura, densità in termini di funzioni che, sviluppate su opportune basi di funzioni adattate alle condizioni al contorno del problema specifico, hanno poche componenti apprezzabilmente non nulle. È questa una quasi tautologia, ossia è in un certo senso la definizione stessa di sistema semplice, “poco eccitato”.

Esempi sono immaginabili sulla base di quanto esposto nel §17: i modelli di Lorenz e di Navier Stokes troncati sono stati analizzati sviluppando i campi descriventi il fluido sulla base di Fourier, o basi simili adattate alle condizioni al contorno considerate (*c.f.r.* §17, (17.13) per un esempio) e possono, in alcune circostanze e a dispetto della loro semplicità, essere considerati buoni modelli per la comprensione di alcune proprietà di fluidi. Il modello di Lorenz è un modello originariamente suggerito dai risultati di esperimenti numerici.¹ Ma questi sono già casi abbastanza complessi ed è utile esaminare la questione più sistematicamente.

Per una discussione più tecnica conviene limitarci, per semplicità, allo studio di moti di un fluido soggetto a forze esterne costanti. Tali moti, a causa della presenza di forze viscosive, in generale si svolgeranno su una piccola parte dello spazio degli stati possibili che chiameremo lo *spazio delle fasi* (cioè lo spazio dei campi di velocità, temperatura, pressione ...): il volume dello spazio delle fasi si contrae e domini anche grandi di dati iniziali si riducono rapidamente in dimensioni, sostanzialmente comunque esse vengano misurate.²

A volte il moto di intere regioni di spazio delle fasi si svolge, dopo un breve periodo transiente iniziale, essenzialmente su un “insieme attraente” costituito da un semplice punto fisso (ossia da uno stato di moto stazionario del fluido), convergendo asintoticamente ad esso. A volte si svolgerà asintoticamente su un moto periodico (quindi convergendo ad una curva chiusa) o quasi periodico (quindi convergendo ad un toro) o su un insieme “strano”, a struttura topologica più o meno complicata diverso da un semplice punto o curva chiusa o toro. E si dirà che il moto ha asintoticamente luogo su un “insieme attraente strano”.³

¹ Di Saltzman, *c.f.r.* §17 e [Lo] che indicavano che a volte il moto era ben rappresentabile in termini di campi di velocità e temperatura con solo tre componenti su una base naturale.

² Possono ad esempio essere misurate dal volume nello spazio delle fasi o in termini della dimensione di dimension, *c.f.r.* §15: due nozioni con significato profondamente diverso, come vedremo nel Cap. 4.

³ Qui l'aggettivo “strano” si riferisce più alla natura complessa del moto che si svolge su di esso che a una struttura geometrica strana dell'insieme attraente: vedremo che moti molto complessi sono possibili anche quando l'insieme attraente è una superficie

Per visualizzare quanto detto si pensi di rappresentare i campi di velocità, temperatura, densità, ecc., sviluppando tali funzioni su una base opportuna (ad esempio nel caso delle equazioni di Navier Stokes con condizioni periodiche al bordo si potrà usare convenientemente la base di Fourier). In questo modo ogni stato del fluido è rappresentato dalla successione $x = \{x_i\}$ delle coordinate dei campi che descrivono lo stato del sistema, sulla base scelta. Un moto del sistema sarà una funzione a valori in una successione $x = \{x_i(t)\}$ funzione del tempo.

Diremo che il sistema ha *apparentemente* “ n gradi di libertà” se riterremo che il suo stato sia completamente specificato, almeno ai fini delle nostre osservazioni e della precisione con cui ci interessa eseguirle, da n componenti della successione x . Si dirà anche che il sistema ha “ n gradi di libertà apparenti” o “ n modi apparenti”. E questo perché, immaginando di aumentare la forza che mantiene in moto il sistema, si deve ritenere che, di solito, il moto del sistema divenga più complesso e che questa maggiore complessità si possa manifestare matematicamente con la necessità di aumentare il numero di componenti non nulle, ossia di coordinate non banali, del vettore $x = \{x_i\}$ che descrive lo stato del sistema.

L’attributo di “*apparente*” è necessario perché evidentemente potrebbero esistere, e in generale esisteranno, altre coordinate in termini delle quali è ancora possibile descrivere i moti in modo soddisfacente, e che sono *in numero inferiore*.

Ad esempio un moto periodico di un fluido è descritto, in qualsiasi sistema di coordinate, da una funzione $\underline{U}_{\underline{x}}(\varphi)$ periodica di periodo 2π in φ e tale che $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{U}_{\underline{x}}(\omega t)$, se $T = 2\pi/\omega$ ne è il periodo. È chiaro che $\underline{u}(\underline{x}, t)$ può anche avere molte armoniche di Fourier in \underline{x} , diciamo n , di ampiezza confrontabile $\hat{u}_{\underline{k}}(t)$; ma è anche chiaro che, sebbene il numero di gradi di libertà apparenti di questo moto sia almeno n , il “vero numero” di gradi di libertà è 1 perché la “migliore” coordinata è proprio φ .

Una prima rozza idea del moto del fluido e della sua complessità la si può avere appunto dal numero di coordinate “essenziali” necessarie a descriverlo. Si noti che tale numero in generale dipende dalla base usata per definire le coordinate, ma ci si deve attendere che non si possa descrivere un dato moto con meno di un certo numero di coordinate: vedremo che il tentativo di definire il *numero minimo* di coordinate porta naturalmente alla nozione, anzi a varie nozioni, di “*dimensione frattale*” della regione visitata da un moto (dopo un transiente iniziale). Tale numero minimo può anche essere chiamato “*dimensione del moto*” o “numero di gradi di libertà effettivi”.

Adottando questa terminologia (di natura evidentemente fenomenologico-empirica che cercheremo di precisare sempre più nel seguito):

(1) un moto stazionario apparirà, allora, come uno stato del sistema descritto da coordinate x che sono costanti, “fisse”, nel tempo: ossia da un “punto fisso”. Un moto asintoticamente stazionario come un moto in cui le coordinate tendono ad assumere un valore fisso al tendere del tempo t

molto regolare.

all' ∞ .

(2) Un moto asintoticamente periodico apparirà come un moto attratto da una curva chiusa nello spazio delle fasi percorsa periodicamente, ossia come una funzione $t \rightarrow x(t)$, a componenti che sono tutte asintoticamente periodiche. Per t grande il moto sarà quindi con buona approssimazione $t \rightarrow \{x_i(t)\} = \{\xi_i(\omega t)\}$ con $\xi_i(\varphi)$ periodiche con periodo 2π , e la curva $\varphi \rightarrow \{\xi_i(\varphi)\}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, è "l'orbita" descritta dal moto periodico.

(3) Un moto quasi periodico a q periodi $2\pi\omega_1^{-1}, \dots, 2\pi\omega_q^{-1}$ apparirà come una funzione $t \rightarrow x(t) = \{\xi_i(\omega_1 t, \dots, \omega_q t)\}$ con $\xi_i(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ funzioni periodiche di periodo 2π nei loro argomenti. E il luogo $\varphi \rightarrow \{\xi_i(\varphi)\}$, $\varphi \in T^q$, è il "toro" *invariante* descritto dal moto quasi periodico. Evidentemente non si potranno, in modo ragionevole, impiegare meno di una coordinata per descrivere un moto periodico, ovvero meno di q coordinate per descrivere un moto quasi periodico a q periodi (razionalmente indipendenti).⁴

(4) E si può immaginare che al crescere della forza esterna, che chiameremo *la forzante*, i moti asintotici, cioè i moti osservati dopo un transiente iniziale (per permettere all' attrito di agire efficacemente e stabilire uno stato stazionario in media), siano descritti da moti quasi periodici in cui man mano che cresce l'intensità della forza si "attivano" (o "eccitano") nuove componenti rendendo necessario, per descrivere il moto, l' uso di un numero crescente q di coordinate dotate di moti periodici.⁵

(5) Un moto che non è di nessuno dei tipi precedenti, cioè non è asintoticamente quasi periodico, è chiamato "*strano*". Infatti fino a pochi anni fa si credeva, ingenuamente, che il fenomeno dell' inizio della turbolenza fosse estremamente semplice, si veda [LL], Cap. 3.⁶ Sarebbe consistito, descritto nel linguaggio appena introdotto, nel successivo emergere di nuove frequenze e di nuovi modi eccitati al crescere della forzante. Fino a che il numero di modi eccitati e di frequenze diverse, (q nelle notazioni precedenti), non fosse divenuto talmente elevato da renderli di difficile identificazione e da permettere che un moto relativamente semplice come un moto quasi periodico apparisse invece come *erratico e imprevedibile*.

⁴ Questo significa che nessuna combinazione lineare $\sum_i n_i \omega_i$ con n_i interi si annulla a meno che $n_i = 0$ per tutti gli i .

⁵ Ossia di "modi" che variano quasi periodicamente con relative frequenze fra le quali non sussiste alcuna relazione razionale.

⁶ Il lettore potrebbe aver difficoltà a trovare tracce di questo puntodi vista, una volta fermamente creduto. Perché il Ch. 3 di [LL] è stato riscritto nelle edizioni successive (postumo per uno degli autori). Laddove la nuova versione è certamente più conforme al punto di vista moderno sulla turbolenza è chiaro che la completa eliminazione della teoria originale produrrà prima o poi gravi problemi agli storiografi della scienza. Una scelta più corretta sarebbe forse stata di mantenere la teoria originale in piccolo carattere alla fine del nuovo capitolo.

In questa visione “aristotelica”, secondo cui un qualunque moto si può (almeno concettualmente) considerare come composto da moti circolari uniformi, un moto “diverso”, che non ha luogo su un toro o che, comunque, non è pensabile come composto da moti circolari uniformi, è appunto “strano”.

E da questo punto di vista può apparire poco interessante studiare l’inizio della turbolenza, dal momento che si presenterebbe come consistente in una progressiva “eccitazione” di nuovi modi: fenomeno piatto, e diverso in diversi sistemi solo per dettagli non interessanti.

È notevole che la forza di questa concezione aristotelico-tolemaica del moto, [LL], Cap. 3, è stata tale che a nessuno è venuto in mente, fino agli anni ’70, di verificare se fosse conforme ai fenomeni naturali aventi luogo nei fluidi. E questo dopo che era divenuto chiaro, a partire da Copernico e Keplero, quanto fosse fruttuoso sottoporre a verifica le analoghe concezioni antiche sulla quasi periodicità nell’astronomia, una critica che, se pure portò al temporaneo rafforzamento della concezione aristotelica della cinematica culminante nell’opera di Laplace nella quale i moti celesti erano ancora quasi periodici, nondimeno permise la nascita della scienza newtoniana moderna, *c.f.r.* [Ga99b]). E ancora 100 anni dopo che emerse, dalle opere di Poincaré, la critica definitiva della natura fondamentale dei moti quasi periodici.

Dopo la critica di Ruelle, [RT],[R2],[ER], alla fine degli anni ’60, preceduta dalla critica (indipendente e di natura un pó diversa, *c.f.r.* commenti alla fine di (C)) di Lorenz, [Lo]), i fisici sperimentali furono indotti a eseguire le esperienze assai semplici, ma fino ad allora considerate di scarsa utilità, e poterono così osservare l’ubiquità dei moti “strani”, regolati cioè da attrattori che non sono punti fissi, né orbite periodiche o quasi periodiche.

E con queste osservazioni venne ben stabilito il fatto che all’inizio della turbolenza i sistemi hanno pochi gradi di libertà, nel senso che i loro stati asintotici (ossia i loro moti osservati dopo un transiente iniziale) possono essere descritti da poche coordinate e possono essere modellati con equazioni relativamente semplici. Ma che, ciononostante, producono prsto (al variare della intensità della forzante) in generale moti strani, non quasi periodici.

Inoltre dall’analisi di [Lo],[RT], e di altri, emerse che i moti possono evolvere in complessità, pur restando a pochi gradi di libertà, seguendo poche vie o “scenarii” diversi i quali, però, possono presentarsi in ordine abbastanza arbitrario dando così vita a fenomenologie anche molto ricche; un pó come dalla semplicità degli atomi può nascere la complessità della materia.

In ultima analisi questo riposa su un fatto matematico importante e non banale: che cioè le equazioni differenziali per i moti asintotici con relativamente pochi gradi di libertà spesso presentano pochi tipi di moti veramente diversi, e tutto quello che un dato modello fa è di organizzare l’apparizione dei vari regimi possibili secondo un *ordine* prestabilito.

Che, purtroppo, *resta a tutt’oggi essenzialmente imperscrutabile*: nel senso che, dato un sistema a pochi gradi di libertà effettivi, è di solito

impossibile prevedere l'ordine e gli aspetti quantitativi del moto che seguirà senza procedere ad sperimentazione diretta per osservarlo.

Ciononostante la pochezza delle possibilità *a priori* permette di utilizzare la teoria esistente anche per un certo numero di previsioni quantitative e, fatto assai importante, per la stessa concezione e progettazione degli esperimenti.

Uno strumento matematico di base per l'analisi degli scenari dello sviluppo della turbolenza è la *teoria della biforcazione*. Cercherò qui di dare solo una idea dei risultati più noti: la loro completa (e generale) trattazione matematica esula, pur essendo relativamente elementare, dagli scopi di questo volume, si vedano tuttavia i problemi alla fine di questo paragrafo, e [G1] per maggiori dettagli.

Si immagina che il sistema possa essere descritto da un modello matematico consistente in un'equazione differenziale su uno "spazio delle fasi" R^n a n dimensioni:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}; r) \quad (18.1)$$

dipendente da un parametro r , da pensarsi come una misura dell'intensità della forzante; la $\underline{f}(\underline{x}; r)$ è una funzione C^∞ , per fissare le idee, e tale che valga *a priori* $|\underline{x}(t)| \leq C(\underline{x}(0))$ con $C(\cdot)$ opportuna funzione. Denoteremo $\underline{f}(\underline{x}; r)$ anche come $\underline{f}_r(\underline{x})$ per comodità di notazione.

Con queste ipotesi, l'ultima delle quali traduce di solito una conseguenza della conservazione dell'energia, dunque non si pongono questioni di regolarità o problemi di esistenza e unicità (che comunque abbiamo rinunciato a considerare dopo i vani sforzi dei capitoli precedenti): è chiaro che la (18.1) ammette soluzioni globali regolari, uniche a parità di dati iniziali.

Tipicamente si immagini che $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ siano le componenti di uno sviluppo del campo di velocità di un fluido su una base $\underline{u}_k(\underline{\xi})$ e dei campi di temperatura e densità su altre opportune basi, di solito scelte in modo da descrivere bene le condizioni al contorno: in modo da rendere così se non minimo almeno abbastanza piccolo il numero di componenti "non trascurabili" necessarie a rappresentare il moto. Se ad esempio il fluido è interamente descritto dal campo di velocità (come nei fluidi incomprimibili di Navier Stokes) si avrà, allora:

$$\underline{u}(\underline{\xi}) = \sum_{k=1}^n x_k \underline{u}_k(\underline{\xi}) \quad (18.2)$$

ove n dipende dalla complessità del moto che si osserva e, in certi casi, n può anche essere molto piccolo: si vedano, ancora come esempio, le (17.20) pensate come descrizione in termini di 3 coordinate "non trascurabili" delle equazioni della convezione di Rayleigh, (17.14).

Osservazioni:

(1) È opportuno ripetere che abbiamo sempre in mente lo studio di sistemi a infiniti gradi di libertà (come un fluido): e tuttavia tali sistemi possono

ammettere moti asintotici descrivibili con poche coordinate il cui *numero minimo* n chiamiamo il "*numero di gradi di libertà effettivi*". Questo lo si deve sempre aver presente e, come si è visto, è reso possibile dal carattere dissipativo dei moti che studiamo.

(2) Naturalmente poiché le equazioni che consideriamo dipendono da un parametro r il numero n varierà con il parametro. Ma se questo è mantenuto in un intervallo (finito) prefissato possiamo immaginare che il numero n sia fissato grande abbastanza per descrivere tutti i moti asintotici che si sviluppano quando r è entro questo intervallo. Questo valore di n può essere più grande del necessario per certi valori di r .

(3) Al crescere della forzante ci si aspetta che il campo di velocità assuma struttura più complessa e, quindi, il numero di coordinate ("componenti") necessarie a descriverlo cresca; con la conseguente evoluzione degli stati asintotici del sistema da situazioni molto semplici che chiamiamo *laminari* a situazioni più interessanti.

(4) Il numero di coordinate non dovrebbe, tuttavia, crescere troppo rapidamente al crescere del parametro r che misura la forza che agisce sul sistema (sebbene se $r \rightarrow \infty$ il numero n dovrebbe aumentare senza limite). In ogni caso si immagina sempre che si possa prendere n così grande da fornire abbastanza coordinate per descrivere i moti asintotici in tutto l'intervallo in cui interessa far variare r .

(5) Si noti che questo punto di vista è, in prima analisi, (forse) poco intuitivo e assai ricco: si sta infatti dicendo in forma più precisa quanto detto sopra e cioè che il moto del fluido può essere complesso pur essendo possibile descrivere lo stato del fluido a mezzo di pochi parametri. O che non è necessario che il sistema sia descritto da molti parametri perché possa mostrare comportamenti "strani". Ovviamente sarà più comune osservare moti "strani" in sistemi a molti gradi di libertà: ma i moti troppo complessi sono di difficile studio sia dal punto di vista teorico che sperimentale e, invece, quelli che si presentano in sistemi a pochi gradi di libertà effettivi sono piuttosto facili da osservare e classificare e quindi forniscono una buona base per la teoria ed è interessante che fenomeni notevoli di turbolenza siano osservabili quando ancora n è piccolo. *Ne nasce quindi un nuovo punto di vista per lo studio della turbolenza, in cui la fenomenologia dell'inizio del regime turbolento acquista grande interesse teorico.*

E si può audacemente sperare che in futuro i fenomeni che si presentano all'inizio della turbolenza possano divenire i blocchi con cui costruire la teoria della turbolenza "forte", a molti gradi di libertà, un pó come si costruisce la teoria dei sistemi macroscopici dalla teoria delle interazioni atomiche nella Meccanica Statistica.

La possibilità di sostenere questo punto di vista è emersa chiaramente dopo i lavori di Ruelle e riposa su una grande quantità di conferme sperimentali e teoriche.

(A) *Il moto laminare.*

Ritornando alla (18.1) immaginiamo n fisso e supponiamo che per $r = 0$ ("nessuna forza esterna") il sistema abbia $\underline{x} = \underline{0}$ come unica soluzione

stazionaria. Supporremo che tale soluzione stazionaria sia un insieme attraente globale nel senso che se $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ è uno stato iniziale, allora la soluzione dell'equazione del moto con dato iniziale \underline{x}_0 è tale che:

$$18.3 \quad \underline{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \underline{0} \quad (18.3)$$

Questo avverrà di solito con velocità esponenziale (ossia $|\underline{x}(t)| < c_1 e^{-c_2 t}$, $c_1, c_2 > 0$ per $t \rightarrow \infty$) e con costante di tempo uguale alla parte reale del massimo autovalore della “matrice di stabilità” $J_{ij} = \partial_{x_i} f_j(\underline{0}; 0)$, detta anche *matrice jacobiana* del punto fisso.

Questo perché per $\underline{x}_0 \simeq \underline{0}$ l'equazione appare come ben approssimata dall'equazione lineare $\dot{\underline{x}} = J\underline{x}$: e allora $|\underline{x}(t)| \simeq |e^{Jt} \underline{x}_0| \leq \text{cost } e^{\text{Re } \lambda t} |\underline{x}_0|$, se λ è l'autovalore di J a massima parte reale.⁷

Ad esempio questa proprietà è facilmente verificata nei modelli del §17 (*c.f.r.* i problemi [4],[5] del §17).

Questa situazione persiste per r piccolo almeno per quel che concerne le soluzioni che iniziano abbastanza vicino al moto laminare, che per $r > 0$ è definito come il valore \underline{x}_r tale che $\underline{f}(\underline{x}_r; r) = \underline{0}$, ove \underline{x}_r è una funzione regolare di r che per $r \rightarrow 0$ tende a $\underline{0}$ (*c.f.r.* problemi [6], [7] del §17).

(B) *Perdita di stabilità del moto laminare.*

Ma la situazione cambia, al crescere di r , e la soluzione “laminare” perde stabilità quando r raggiunge un certo valore critico r_c . Ciò avviene quando (e se) l'autovalore λ_r a parte reale più grande della *matrice di stabilità* $J_{ij}(r) = \partial_{x_i} f_j(\underline{x}_r; r)$ raggiunge, al crescere di r , l'asse immaginario del piano complesso (sul quale si pensa di segnare gli autovalori di $J(r)$ in funzione di r).

Questo può accadere in due modi: o perché $\lambda_{r_c} = 0$ ovvero perché $\text{Re } \lambda_{r_c} = 0$ ma $\text{Im } \lambda_{r_c} = \omega_0 \neq 0$. Nel secondo caso ci saranno in realtà due autovalori ($\lambda_{r_c} = \pm i\omega_0$) che raggiungono l'asse immaginario, poiché la matrice J è reale (e quindi i suoi autovalori appaiono a coppie di autovalori complessi coniugati).

Nel primo caso *non ci si deve aspettare*, in generale, che per $r > r_c$ la soluzione stazionaria \underline{x}_r , che stiamo seguendo al crescere di r , continui ad esistere. Questo infatti significherebbe che l'equazione $\underline{f}(\underline{x}_{r_c} + \underline{\delta}; r) = \underline{0}$ è risolubile con $\underline{\delta}$ che tende a zero per $r \rightarrow r_c^\pm$: evento che dovrebbe apparire “irragionevole” (a persone assennate) per i motivi che seguono.

Sia \underline{v} l'autovettore di $J(r_c)$ con autovalore nullo; allora possiamo considerare il grafico della prima componente f_r^1 del vettore \underline{f}_r in un sistema di coordinate in cui \underline{x}_{r_c} è scelto come origine e gli n autovettori di $J(r_c)$ come assi

⁷ A questo proposito si cita spesso il teorema di Grobman–Hartman, *c.f.r.* problemi [8], [9] del §19, che però a ben vedere mostra piuttosto che il punto di vista che identifica l'equazione non lineare, vicino al punto fisso, con la sua linearizzata ha dei limiti e che può essere inteso letteralmente solo nel senso della “genericità” della sua validità, *c.f.r.* (C) per una analisi della nozione di genericità).

coordinati, supponendo, per semplicità, che $J(r_c)$ sia diagonalizzabile e che \underline{v} sia l' autovettore con indice 1.

Allora il grafico, *c.f.r.* (18.4), di f_r^1 in funzione della componente x_1 di \underline{x} lungo \underline{v} , mantenendo le altre componenti fisse al valore che hanno nel punto \underline{x}_{r_c} preso come origine, apparirà come una curva con un massimo (o minimo) locale prossimo all' origine: perché in generale la derivata seconda di f_r^1 nella direzione \underline{v} sarà non nulla e quindi si esclude il flesso (in quanto possibilità "rara" e "non generale").

All' avvicinarsi di r a r_c il massimo (o minimo) di questa curva si avvicina all' origine e per $r = r_c$ coincide, per la costruzione descritta, con essa e la curva appare tangente all' asse delle ascisse (ossia \underline{v}) e giacente, localmente, nel semipiano inferiore (o superiore se è un minimo).

Facendo crescere r in generale avverrà che il grafico della curva continuerà il suo moto "discendente", *c.f.r.* la figura (18.4) seguente, (o ascendente) e il massimo (o minimo) si verrà a trovare interamente sotto (sopra) l' asse \underline{v} e quindi non si avrà più possibilità di risolvere l' equazione $f^1(\underline{x}; r) = 0$, almeno non con $\underline{x}_r \xrightarrow{r \rightarrow r_c} \underline{x}_{r_c}$. Non esisteranno dunque, beninteso in generale, soluzioni a $\underline{f}(\underline{x}; r) = \underline{0}$ vicine a \underline{x}_{r_c} , per $r > r_c$.⁸

Naturalmente ci sono anche altre possibilità: ad esempio la "velocità di discesa" (in funzione di r) del massimo della curva in funzione di r potrebbe annullarsi proprio per $r = r_c$ e cambiare segno (in questo caso la soluzione esisterebbe ancora). Ovvero per $r = r_c$ il punto \underline{x}_r potrebbe essere un flesso orizzontale.

Ma è chiaro che queste alternative sono "non generiche" nel senso che richiedono che valga una relazione speciale che lega le coordinate di \underline{x}_r e r per $r = r_c$; ad esempio la prima significa che, se $\underline{x}_{r,max}$ è il punto di massimo per $f_1(\underline{x})$ come funzione di x_1 , allora deve essere $\partial_r f_1(\underline{x}_{r,max}) = 0$ per $r = r_c$: il che non ha in generale alcun motivo di essere vero: cioè non c'è alcun motivo per cui *simultaneamente* siano nulle le derivate di f_r^1 rispetto a x_1 e r . Facciamo quindi una pausa per chiarire formalmente la nozione di genericità.

(C) *La nozione di genericità.*

Anzitutto si deve tener presente che stiamo studiando varie equazioni che hanno interesse in quanto modelli di qualche fenomeno fisico. Avendo già rinunciato *a priori* a descrivere *a fundamentis* i fenomeni rimontando all' ipotesi atomica, è chiaro che i nostri modelli avranno *natura fenomenologica*. E quindi dovrebbero essere modificabili pur producendo gli stessi risultati, entro approssimazioni ragionevoli.

Ad esempio se \underline{f}_r dipende da certi parametri empirici non dovrà essere

⁸ Si noti che questo argomento è valido qualsiasi sia la dimensione sebbene appaia piuttosto unidimensionale (e in tal caso è ovvio). La possibilità di ridurlo al caso $d = 1$ è dovuta all' ipotesi che J sia diagonalizzabile in modo che la base usata effettivamente esista. In generale questa analisi dice che l' esistenza di un punto fisso per $r > 0$, dato che $\underline{f}(\underline{x}_0, 0) = \underline{0}$, non può essere inferita (e spesso non c'è) a meno che cannot be inferred $\det J|_{r=0} \neq 0$, come noto dal teorema delle funzioni implicite.

possibile ottenere risultati qualitativamente differenti (almeno se opportunamente interpretati) cambiando il valore dei parametri entro gli errori della loro misura. Si vuole cioè, affinché un dato modello sia accettabile, che le previsioni del modello siano insensibili a cambiamenti “ragionevoli” del modello stesso.

Certamente però alcune proprietà non possono essere modificate: se, *a priori*, in base ai principi fondamentali sappiamo che, in un certo modello, \underline{f} deve avere una certa proprietà allora *non saranno permesse* modifiche che violano tale proprietà.

Così se $\underline{\partial} \cdot I \underline{f} = 0$ ha, per una opportuna matrice I , il significato di conservazione dell’energia (come accade nel caso delle equazioni di Hamilton) non potremo permettere modifiche di \underline{f} che non mantengano questa proprietà. Se una qualche legge di conservazione richiede che $\underline{f}(\underline{x})$ sia dispari in \underline{x} , allora non permetteremo modifiche di \underline{f} che violino tale proprietà (si pensi ad esempio al terzo principio della dinamica che impone che la forza fra due punti sia una funzione dispari della loro posizione relativa).

In ogni modello fisico si impongono dunque a \underline{f} alcune proprietà assai speciali: di solito poche in numero e traducendo alcune leggi fisiche, fondamentali e irrinunciabili. Fissate tali proprietà la \underline{f} avrà ancora, in generale, parametri liberi: e allora gli aspetti qualitativi e anche quantitativi della teoria non dovranno essere sensibili a piccole variazioni di questi parametri.

Quindi ci si trova nel seguente contesto: un dato problema è modellato da un’equazione differenziale $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ con \underline{f} che varia in uno spazio \mathcal{F} di funzioni che verificano tutte le proprietà che *a priori* il sistema deve irrinunciabilmente verificare (*leggi di conservazione e simmetrie*). Se si crede che *tutte le proprietà a priori siano soddisfatte* si prende poi l’atteggiamento, che appare come l’unico ragionevole, che le proprietà fisiche significative non cambino facendo variare di poco \underline{f} nello spazio \mathcal{F} .

”Poco” va inteso nel senso di una metrica che misura le distanze delle funzioni in \mathcal{F} e che deve essere definita caso per caso, e dovrebbe tradurre in forma quantitativa quello che sulla base di considerazioni fisiche siamo disposti a considerare “piccolo cambiamento”. Ad esempio:

(1) se f è una funzione di una variabile avente la forma $f(x) = r + ax^2$ allora \mathcal{F} si può indentificare con le coppie (r, a) e una metrica naturale può essere la distanza ordinaria in R^2 .

(2) se f deve essere una funzione convessa avente la forma $f(x) = r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{2k}$ con $0 \leq a_k \leq 1$ allora \mathcal{F} è lo spazio di tali funzioni e può essere metrizzato in vari modi (che però danno luogo a nozioni di vicinanza assai diverse fra loro); ad esempio si può definire la distanza fra f^1, f^2 come $|r^1 - r^2| + \sum_k |a_k^1 - a_k^2| 2^{-k}$, o come $\max_k (|r^1 - r^2| + |a_k^1 - a_k^2|)$, etc.

(3) se $x \rightarrow f(x)$ sono le funzioni analitiche olomorfe per $|x| < 1$ e limitate e se $\{a_k\}$ sono i loro coefficienti di Taylor (sì che $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$) si può definire la distanza fra f^1 e f^2 come $d(f^1, f^2) = \sup_{|x| < 1} |f^1(x) - f^2(x)|$ ovvero (ma non equivalentemente) $d(f^1, f^2) = \sum_k |a_k^1 - a_k^2| 3^{-k}$.

(4) se $x \rightarrow f(x)$ sono le funzioni di classe $C^1([0, 1])$ la distanza può corrispondere

alla metrica indotta dalla norma su C^1 , definita dal massimo del modulo di f e della sua derivata, ovvero (non equivalentemente) dalla norma definita dall'integrale del modulo di f e della sua derivata.

Viste queste premesse e se \mathcal{F} è uno spazio metrico separabile,⁹ poniamo:

Definizione: una proprietà \mathcal{P} delle funzioni $f \in \mathcal{F}$ è stabile se, dato un elemento $f \in \mathcal{F}$ che gode della proprietà \mathcal{P} , essa vale anche per gli elementi abbastanza vicini a f . Una proprietà sarà stabile in $f \in \mathcal{F}$ se vale per tutti gli elementi abbastanza vicini a f . Invece una proprietà \mathcal{P} è generica se vale per un insieme aperto denso in \mathcal{F} .

Osservazione: in analisi matematica si usa spesso una definizione leggermente diversa e si chiama generica anche una proprietà che è vera su un insieme che pur non essendo aperto è pur tuttavia un'intersezione di una famiglia numerabile di insiemi aperti densi:¹⁰ ma non ritengo utile discuterla perché non apporta ulteriori lumi alla nozione di genericità ai cui dettagli, in ogni caso, non si dovrebbe attribuire eccessiva importanza.

Esempio 1: consideriamo lo spazio delle funzioni $f(x) = r + ax^2$ della variabile reale x con $(a, r) \in \mathbb{R}^2$, e consideriamo l'equazione $f(x) = 0$. L'esistenza di una soluzione è una proprietà stabile se $r/a > 0$: ma non è generica perché l'insieme $r/a < 0$ è aperto.

Esempio 2 (non genericità della biforcazione per $\lambda = 0$): come esempio più interessante consideriamo uno spazio \mathcal{F} delle funzioni $f(x; r)$ di classe C^2 e tali che per $r \leq r_c$ esista una soluzione x_r della equazione $f(x; r) = 0$ continua in r , e tale che $f'(x_r; r) < 0$ per $r < r_c$ e $f'(x_{r_c}; r_c) = 0$ (qui $f' \equiv \partial_x f$). Se $\dot{x} = f(x, r)$ è un'equazione differenziale, questa proprietà implica che per $r < r_c$ la soluzione stazionaria x_r è stabile per $r < r_c$ e diviene instabile (o meglio marginalmente stabile) per $r = r_c$.

Sia \mathcal{F} lo spazio di tali funzioni pensato come spazio metrico con una qualche metrica (ad esempio ponendo che la distanza fra due funzioni f, g sia l'estremo superiore di $\sum_{j=0}^2 |\partial_x^j (f - g)|$). Allora genericamente in \mathcal{F} si avrà $\partial_x^2 f(x_{r_c}, r_c) \neq 0$ e $\partial_r f(x_{r_c}, r_c) \neq 0$. Quindi genericamente il grafico di $f(x, r_c)$ si troverà al di sopra o al di sotto dell'asse $f = 0$ nell'intorno di $x = x_{r_c}$; e il massimo locale $y(r)$ di f nell'intorno di x_r avrà in $r = r_c$ una derivata $y'(r_c)$ non nulla. Si ha dunque l'evoluzione descritta dai tre

⁹ La separabilità significa che nello spazio metrico \mathcal{F} c'è un insieme denso numerabile: in ogni caso è chiaro che sarebbe qui assai fuor di luogo considerare spazi più generali, mai incontrati da chi ha "i piedi per terra".

¹⁰ Che è ancora densa, sotto ipotesi molto generali, nello spazio \mathcal{F} nel quale gli insiemi sono contenuti, per un teorema di Baire, c.f.r. [DS], cap. I: ad esempio è sufficiente che \mathcal{F} sia uno spazio metrico separabile e completo.

grafici della fig. (18.4).

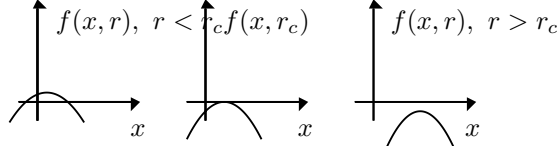


Fig. (18.4): Perdita di stabilità di un punto fisso per il passaggio attraverso 0 dell'autovalore della matrice di stabilità. Si ha una collisione fra il punto fisso stabile (a destra) con uno instabile (a sinistra) con "annichilazione".

Il che mostra la *non genericità* della esistenza di una soluzione x_r dell'equazione $f(x; r) = 0$ come funzione continua di $r > r_c$, nei casi in cui, per $r = r_c$, la derivata di f in x_{r_c} si annulla. Questo argomento si può estendere (facilmente) a casi a più dimensioni.

La perdita di stabilità, concomitante con un autovalore della matrice di stabilità che raggiunge 0 a $r = r_c$, *conduce genericamente alla sparizione della soluzione stazionaria* che si sta seguendo (come illustrato dalla Fig. (18.4)). Si dice che se un punto fisso per una equazione differenziale $\dot{x} = f(x; r)$ perde stabilità perché un autovalore della matrice di stabilità raggiunge 0 allora, genericamente, *non* si ha biforcazione: ossia il punto fisso non può essere continuato al crescere di r per $r > r_c$ in modo continuo e eventualmente convivere (instabile) con altri punti fissi (stabili).

Diverso è il caso in cui la f abbia proprietà tali da garantire *a priori* l'esistenza della soluzione per r nell'intorno di r_c : si veda l'esempio 5 che segue.

Esempio 3 (genericità del fenomeno di annichilazione): Un più accurato studio mostra che invece, genericamente, il fenomeno descritto, (ossia l'esistenza di una soluzione, continua in r , x_r di $f(x, r) = 0$ per $r \leq r_c$, con $f'(x_r, r) < 0$ e $f'(x_{r_c}, r_c) = 0$), è accompagnato dall'esistenza di un'altra famiglia, x'_r , di soluzioni della stessa equazione verificanti però $f'(x'_r, r) > 0$ e tali che $x_r - x'_r \xrightarrow{r \rightarrow r_c} 0$, c.f.r. Fig. (4.2.1) che rende questo manifesto. Ossia genericamente la perdita di stabilità per il passaggio per 0 di un autovalore reale della matrice di stabilità è concomitante ad una "collisione" (sempre al variare del parametro r che gioca il ruolo di "tempo" in questa descrizione) fra due soluzioni, una stabile e una instabile che si "annichilano" a vicenda e spariscono dall'intorno del punto di collisione per $r > r_c$, c.f.r. la Fig. (18.4) precedente.

Esempio 4: Come altro esempio (essenzialmente identico all'esempio 2 con funzioni C^2 sostituite da funzioni analitiche) si immagini che $f(x; r)$ sia un elemento di uno spazio di funzioni analitiche di x, r (ad esempio funzioni di r, x olomorfe e limitate in un dominio complesso \mathcal{D} intorno ai valori reali di x, r $r \leq r_c$ e che si annullano in un certo x_r che dipende in modo regolare da r . Possiamo rappresentare queste funzioni tramite il loro sviluppo di Taylor pensandone i coefficienti come coordinate per f . Allora consideriamo l'insieme delle funzioni che per $r = r_c$ hanno una matrice di stabilità (cioè la matrice jacobiana) in x_r con un solo

autovalore con autovettore \underline{v} , che raggiunge 0, e che abbiano, al tempo stesso, la componente f_r^1 che presenta un flesso orizzontale in funzione della componente x_1 lungo \underline{v} di \underline{x} (mantenendo fisse al valore in \underline{x}_{r_c} le altre componenti di \underline{x}).

Questa è una famiglia di funzioni i cui coefficienti di Taylor in x_r verificano una opportuna relazione (ossia sono tali che il grafico menzionato ha un flesso orizzontale, e cioè la seconda derivata rispetto a x_1 di f_r^1 risulta *nulla* per $r = r_c$ in \underline{x}_{r_c}).

E vicino ad ogni tale funzione ne esistono altre che non solo non hanno questa proprietà (cioè *non hanno* derivata seconda nulla) ma sono tali che tutte le funzioni a loro vicine neppure la hanno (semplicemente per continuità). Dunque la proprietà di avere il flesso è “non generica” e quella di non averlo è invece generica. La soluzione stazionaria \underline{x}_r di $\underline{\dot{x}}_r = \underline{f}(\underline{x}; r)$ genericamente sparirà per $r > r_c$.

Esempio 5: Ma se si considera lo spazio \mathcal{F}_0 delle funzioni analitiche (nel senso degli esempi precedenti) $f(x, r)$ dispari in \underline{x} e di classe C^2 che per $r < r_c$ hanno derivata < 0 nell'origine e per $r = r_c$ hanno derivata nulla. Allora *non è più genericamente vero* che la soluzione $x = 0$ sparisca per $r > r_c$: anzi è sempre falso. Questa non è una contraddizione in quanto l'essere in \mathcal{F}_0 è *non generico* nello spazio \mathcal{F} delle funzioni dell'esempio 4 ma è, tautologicamente, *generico* in \mathcal{F}_0 essendone la proprietà che lo definisce. È interessante vedere che in questo spazio la perdita di stabilità con autovalore che passa per 0 è accompagnata non solo dalla sopravvivenza della soluzione $x = 0$, che genericamente diviene instabile, ma anche dalla apparizione di due soluzioni stabili x_r^+, x_r^- che tendono a $x_{r_c} = 0$ per $r \rightarrow r_c$ e che esistono per $r < r_c$ o per $r > r_c$ a seconda che il segno di $f''(0; r_c)$ sia positivo o negativo. La dimostrazione segue dalla contemplazione della seguente figura nel caso unidimensionale, e può essere estesa a più dimensioni.

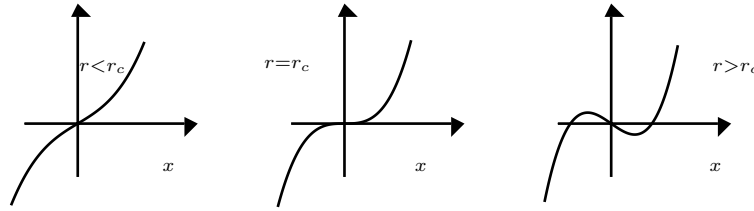


Fig. (18.5): A bifurcation in presence of symmetry: the function f is supposed odd in x and the origin remains a fixed point even though it loses stability through 0.

Questo mostra come sia delicata la discussione della genericità; una stessa proprietà può essere generica in un certo contesto (ossia in un certo spazio \mathcal{F}) e non generica in un altro.

Interpretando la proprietà $\underline{f}(\underline{x}, r) = -\underline{f}(-\underline{x}, r)$ come una “simmetria” di \underline{f} vediamo che le biforcazioni “in presenza di simmetria” possono essere piuttosto diverse e non generiche se confrontate al comportamento generico

delle biforcazioni in assenza di simmetria. E questo è un fatto generale.

Esempio 6: Se S è una trasformazione di classe C^r , $r \geq 1$, invertibile di una superficie compatta di classe C^r (si dice che S è un *diffeomorfismo* di classe C^r) e se x è un punto periodico per S con periodo τ , si dice che x è *iperbolico* se la matrice di stabilità di x quale punto fisso di S^τ non ha autovalori di modulo 1.

Le *varietà stabile* e *varietà instabile* δ -locali di O sono definite come superfici $W_O^{\delta,s}$ e $W_O^{\delta,u}$ che sono descrivibili come grafici definiti sulla sfera di raggio δ e centro O sul piano sotteso dagli autovettori con autovalori di modulo < 1 , o rispettivamente di modulo > 1 , della matrice di stabilità di S^τ in O e che godono della proprietà che $d(S^{n\tau}y, O) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ per $y \in W_O^{\delta,s}$ (o, rispettivamente, $d(S^{-n\tau}y, O) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ per $y \in W_O^{\delta,u}$).

Se S è di classe C^r allora si dimostra che, se δ è abbastanza piccolo, $W_O^{\delta,s}$ e $W_O^{\delta,u}$ esistono e sono di classe C^r e, inoltre, dipendono con regolarità C^r da eventuali parametri da cui dipende S , se S è di classe C^r anche rispetto a questi parametri, c.f.r. [R3] p. 46.

Un esempio classico di teorema di genericità è il seguente teorema di Kupka-Smale:

Teorema (genericità id iperbolicità e trasversalità per trasformazioni C^∞): Si consideri l'insieme dei diffeomorfismi di classe C^∞ di una varietà regolare compatta M tali che:

- (a) le orbite periodiche di periodo $< T_0$ sono iperboliche
- (b) se O, O' sono punti di due orbite periodiche e δ è abbastanza piccolo perché le varietà stabili ed instabili δ -locali esistano, allora $S^{-T_1}W_O^{\delta,s}$ e $S^{-T_1}W_{O'}^{\delta,s}$ hanno (eventuali) intersezioni linearmente indipendenti (cioè con piani tangenti formanti un angolo mai 0 o π)

Questo insieme è un insieme aperto denso (nella topologia di C^∞)¹¹ per ogni T_0, T_1 . Si tratta quindi di due proprietà generiche per ogni T_0, T_1 .

Dunque l'insieme delle trasformazioni di classe C^∞ con tutti i punti fissi iperbolici e intersezioni trasversali fra le relative varietà stabili e instabili è una intersezione di insiemi aperti densi. E segue da teoremi generali che tali trasformazioni formano un insieme denso (per il teorema di Baire, c.f.r. nota ¹⁰).

Concludiamo queste osservazioni notando un altro aspetto delicato della nozione di genericità: a volte, negli esperimenti reali o numerici, può capitare di “dimenticare” di notare una proprietà di un sistema (come ad esempio una simmetria) e di aver la “sorpresa” di osservare una proprietà che è non generica e che quindi non ci si aspetta di osservare. Quando questo accade è di solito un fatto assai importante, perché può condurre

¹¹ Se f, g sono due funzioni C^∞ e $\delta(x) \stackrel{def}{=} |x|/(1+|x|)$ allora la distanza in C^∞ fra f e g può ad esempio essere definita da $d(f, g) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \delta(\partial^k f - \partial^k g)$.

alla scoperta della legge di conservazione o della simmetria dimenticata.

L'idea che solo le proprietà generiche possano avere rilevanza ha condotto, [RT], al punto di vista moderno sulla teoria della turbolenza e alla riduzione del numero dei fenomeni a priori possibili e ad una loro classificazione (parziale ma complessivamente soddisfacente).

La generalità di quest'osservazione, il suo ruolo chiave e il suo uso concreto in combinazione con la teoria dei sistemi dinamici per una teoria generale della turbolenza distinguono le idee di Ruelle da quelle di Lorenz, precedenti di vari anni.

Lorenz infatti non aveva forse sottolineato appieno l'importanza dei fenomeni caotici scoperti, "limitandosi" a far vedere l'esistenza effettiva di moti caotici (semplicemente e acutamente chiamati "non periodici", in un'accezione che pone sullo stesso piano moti periodici e quasi periodici distinguendoli dai loro "opposti" non periodici) in semplici equazioni descriventi moti atmosferici, e a constatare che nella teoria delle equazioni alla base dei moti dei fluidi ci si doveva aspettare l'impossibilità *a priori* della previsione del comportamento asintotico o a tempi grandi dei moti, a causa della loro probabile non periodicità.

Invece il punto di vista di Ruelle (che cercò di collegare e *dimostrare* a mezzo della nozione di genericità) era più generale e pertanto più facilmente comunicabile e immediatamente ampiamente controllato sperimentalmente. È però anche importante ricordare che mentre le osservazioni di Lorenz ebbero luogo agli inizi degli anni '60 quelle di Ruelle invece avvennero alla fine di quegli anni quando ormai i calcolatori elettronici erano abbastanza perfezionati da poter essere impiegati per verifiche immediate e su grande scala delle nuove idee, come in realtà avvenne, con importanti riflessi sullo sviluppo delle idee stesse.

(D) Possibilità generiche di perdita di stabilità di un moto laminare. Simmetrie spontaneamente violate.

Tornando alla discussione della stabilità del moto laminare, visto come soluzione dell'equazione $\underline{f}(\underline{x}_r; r) = 0$, supponiamo che la perdita di stabilità avvenga perché un autovalore λ_r della matrice di stabilità $J(r)$ del punto fisso \underline{x}_r raggiunge $\lambda_r = 0$ per $r = r_c$. In tal caso genericamente il moto laminare sparisce e non ci sono moti del sistema che restano confinati nelle vicinanze di \underline{x}_{r_c} : il comportamento asintotico dei moti, anche se con dato iniziale vicino a \underline{x}_{r_c} , sarà allora regolato da uno o più insiemi attraenti situati in qualche *altra regione* dello spazio delle fasi, lontano dal punto \underline{x}_{r_c} (nelle cui vicinanze si svolgono invece, se $r < r_c$, i moti, almeno se i dati iniziali sono vicini a \underline{x}_r).

Dunque si perde completamente controllo di quanto avviene, dal momento che non sappiamo, nella generalità in cui ci troviamo, come sia fatta la funzione \underline{f} lontano dal punto fisso che ha "cessato di esistere" a $r = r_c$.

A questo punto però occorre dire che spesso i sistemi che si studiano hanno la proprietà di avere qualche simmetria e il moto laminare che esiste

per $r = 0$ di solito ha la stessa simmetria. È il caso in tutti gli esempi in §17, c.f.r. (17.21), (17.29), (17.31). Allora quello che può accadere è che avvengano perdite di stabilità non generiche, che possiamo chiamare *rottture spontanee di simmetria*, attraverso le quali il punto fisso iniziale viene via via sostituito, come insieme attraente dei moti del sistema, da altri punti fissi dotati di *minore simmetria* che a loro volta possono perdere stabilità al crescere di r .

Un' interessante classe di esempi di successioni di biforcazioni non generiche con perdita di simmetria è fornita dai modelli del §17 (si vedano i problemi del §17, e il successivo §20).

Le biforcazioni si possono succedere fino a che, *perdute tutte le simmetrie*, il punto fisso stabile che resta perde anch'esso stabilità con una biforcazione "generica". Se tale biforcazione avviene "per $\lambda = 0$ " non si può dire gran che, in generale, come già notato. Ma se la biforcazione avviene perché una coppia di autovalori complessi coniugati della matrice di stabilità attraversa l'asse immaginario allora si possono ancora prospettare varie possibilità, alcune assai semplici.

Il motivo sta nel fatto che una perdita di stabilità in cui una coppia di autovalori complessi coniugati della matrice di stabilità $J(r)$ passa per l'asse immaginario non distrugge l'esistenza del punto fisso. Questo, banalmente, perché in tal caso la matrice di stabilità $J(r_c)$ *non ha determinante nullo* e quindi per il teorema delle funzioni implicite si può ancora trovare un punto fisso (*genericamente instabile*, si vedano i problemi) che "continua" per $r > r_c$ il punto fisso \underline{x}_r che ha perso stabilità.

Gli autovalori di $J(r)$, per $r > r_c$, comprenderanno genericamente due autovalori complessi e coniugati $\lambda_{\pm}(r)$ con parte reale positiva e, cambiando eventualmente la definizione di r , si potrà supporre che, genericamente, $\text{Re } \lambda_{\pm} = r - r_c$; la parte immaginaria sarà $\pm \omega(r)$ con $\omega(r_c) \equiv \omega_0 > 0$.

Quando $r > r_c$ il punto fisso \underline{x}_r , essendo instabile, "respinge" essenzialmente tutti i moti che gli si avvicinano. Se i termini non lineari dello sviluppo di Taylor in \underline{x}_{r_c} della \underline{f} sono tali da forzare i dati iniziali lontani a muoversi verso il punto fisso quando $r = r_c$, caso in cui il punto fisso vien detto *vagamente attrattivo*, allora la repulsione del punto fisso per $r > r_c$ viene compensata, ad una certa distanza dal punto fisso stesso, dai termini non lineari.

Infatti nel caso semplice di dimensione 2 si può vedere (si veda il problema [[4]) che esiste un *opportuno* sistema di coordinate $\underline{x} = (x_1, x_2)$ in cui i termini non lineari \underline{w} di \underline{f} sono, per $r = r_c$, almeno di terzo ordine in $\rho = |\underline{x} - \underline{x}_{r_c}|$ e, al tempo stesso, i termini esattamente di terzo ordine in $\rho = |\underline{x} - \underline{x}_{r_c}|$ sono *invarianti per rotazione* nel piano delle coordinate. Ossia \underline{w} ha la forma $\underline{w} = c \rho^2 \underline{\rho}$ per qualche c calcolabile in termini delle prime tre derivate di \underline{f} calcolate in \underline{x}_{r_c} e r_c . Ciò è sempre possibile (e facile anche se assai laborioso a voler svolgere esplicitamente i calcoli).

Per cui la nozione di vaga attrattività si formula semplicemente *in tali coordinate* come una proprietà del segno della costante c : se $c < 0$ per r abbastanza piccolo il punto fisso \underline{x}_{r_c} ha *attrattività vaga* e i vettori \underline{w}

“puntano verso l’origine”, e se invece $c > 0$ essi puntano verso l’ esterno e si ha *repulsività vaga* (c.f.r. problema [4] e [G1] cap. V).

Nel caso che si abbia repulsività vaga non si può dire gran che dal momento che il moto abbandonerà le vicinanze del punto fisso che ha perso stabilità e ci si troverà in una situazione simile a quella precedente del passaggio dell’ autovalore per 0.

Ma nel caso di attrattività vaga e per $r > r_c$ ma $r - r_c$ piccolo, quando la distanza ρ (nelle coordinate speciali sopra introdotte) è tale che $(r - r_c)\rho$ bilancia il termine cubico $c\rho^3$ che, per ipotesi, tende a riportare il sistema sul punto fisso, si viene a creare una orbita periodica evidentemente stabile.

Tale orbita è circolare in queste coordinate, a meno di piccole correzioni dovute ai termini di ordine superiore al terzo, e di raggio $O(\sqrt{(-c)^{-1}(r - r_c)})$. Infatti nelle coordinate speciali (x_1, x_2) che consideriamo l’ equazione di evoluzione potrà scriversi, se si pone $z = x_1 + ix_2$, semplicemente $\dot{z} = (r - r_c + i\omega(r))z - c|z|^2z$ (approssimata a meno di termini $O(z^4)$): questo mostra la validità dell’ affermazione sul raggio e mostra altresì che il periodo sarà $\sim 2\pi/\omega_0$ se $\omega_0 = \omega(r_c)$, si veda il problema [4] perché se $\rho = \sqrt{(-c)^{-1}(r - r_c)}$ la funzione $z(t) = \rho e^{i\omega(\rho)t}$ è una soluzione esatta dell’ equazione approssimata.

Nel caso di attrattività vaga il moto asintotico di dati iniziali vicini al punto fisso instabile \underline{x}_r , sarà dunque un pó più complesso di quello per $r < r_c$ evolvendosi non più in un punto fisso ma in un moto periodico stabile. E il sistema, che per $r \leq r_c$ aveva moti asintotici senza scala di tempo (perché punti fissi), acquisirà una “scala di tempo” uguale al periodo $\sim 2\pi\omega_0^{-1}$ di quest’ orbita periodica.

Quanto detto nel caso bidimensionale si estende a più dimensioni, essenzialmente senza cambiamenti di rilievo (si vedano i problemi che seguono), e costituisce la teoria della “biforcazione di Hopf”. Essenzialmente questo è così perché il moto nelle direzioni trasversali a quella del piano dei due autovettori con autovalori a parte reale piccola, è un moto che, con velocità esponenziale nel tempo, si “schiaccia a 0” con scala di tempo regolata dal massimo valore (< 0) della parte reale dei rimanenti autovalori.

Quando l’ evoluzione del punto fisso conduce effettivamente, al crescere di r , ad un’ orbita periodica stabile si può proseguire lo studio analizzando l’ evoluzione della stabilità di quest’ orbita periodica. Di nuovo si presentano varie possibilità che verranno discusse nel successivo §19.

Problemi. La biforcazione di Hopf.

[1] Sia $\dot{\underline{x}} = \underline{f}_r(\underline{x})$, $\underline{x} \in R^n$, un’ equazione differenziale (di classe C^∞), che per $r < r_c = 0$ ha un punto fisso che perde stabilità perché due autovalori complessi coniugati $\lambda(r) = r + i\omega(r)$ e $\bar{\lambda}(r) = r - i\omega(r)$, con autovettori rispettivi $v(r), \bar{v}(r)$, al crescere di r passano attraverso l’ asse reale con parte immaginaria $\omega_0 = \omega(0) > 0$. Si noti che l’ ipotesi $\text{Re } \lambda(r) = r$ non è molto restrittiva e può essere sostituita dall’ ipotesi più generale $\frac{d}{dr} \text{Re } \lambda(r_c) > 0$. (Idea: se la derivata non si annulla si può cambiare variabile ponendo $r' = \text{Re } \lambda(r)$ per r vicino a $r_c = 0$.)

[2] Nelle ipotesi di [1] si supponga $n = 2$ e, denotando un punto $x \in R^2$ con $x = (x_1, x_2)$ si mostri che le equazioni linearizzate possono essere scritte, ponendo $z = x_1 + ix_2$ come

$\dot{z} = \lambda(r)z$. Inoltre le equazioni all'ordine 3 (ossia trascurando termini di quart'ordine) si possono scrivere:

$$\dot{z} = \lambda(r)z + az^2 + b\bar{z}^2 + cz\bar{z} + a_1z^3 + a_2z^2\bar{z} + a_3z\bar{z}^2 + a_4\bar{z}^3$$

ove a, b, c, a_i sono numeri complessi e \bar{z} denota il complesso coniugato di z .

[3] Nel contesto del problema [2] si faccia vedere che esiste un cambiamento di coordinate $z = \zeta + \alpha\zeta^2 + \beta\zeta\bar{\zeta} + \gamma\bar{\zeta}^2$ che consente di scrivere, nell'intorno dell'origine e di $r = 0$, la equazione troncata al terzo ordine in una forma in cui mancano del tutto i termini di secondo ordine. (*Idea*: Questa è una verifica “di forza bruta”: si esegua il cambiamento di coordinate e si constati che si possono determinare i coefficienti α, β, γ nel modo voluto.)

[4] (*Teorema di vaga attrattività*) Nel contesto dei problemi [1], [2], [3] si supponga che l'equazione troncata al terzo ordine non contenga termini quadratici (il che non è restrittivo, per il problema [3]). Analogamente al precedente problema si mostri che è possibile un cambiamento di coordinate $z = \zeta + \alpha_1\zeta^3 + \alpha_2\zeta^2\bar{\zeta} + \alpha_3\zeta\bar{\zeta}^2 + \alpha_4\bar{\zeta}^3$ tale che l'equazione assuma la *forma normale*:

$$\dot{\zeta} = \lambda(r)\zeta + \vartheta|\zeta|^2\zeta + O(|\zeta|^4)$$

con $\vartheta = \vartheta(r)$ una opportuna funzione complessa di r . Si constati, anche, che il valore di $\text{Re } \vartheta$ può essere calcolato come funzione delle sole derivate di ordine ≤ 3 , rispetto alle \underline{x} e in $\underline{x} = \underline{0}$, della funzione $\underline{f}_r(\underline{x})$ che definisce l'equazione differenziale. La soluzione stazionaria si dice “vagamente attrattiva” se $\gamma \equiv \text{Re } \vartheta < 0$. (*Idea*: come nel problema precedente, c.f.r. [G1] 5.6, 5.7).

[5] (*Biforcazione di Hopf, caso bidimensionale*) Nel contesto del problema [4], posto $\gamma = \text{Re } \vartheta < 0$, si mostri che l'equazione $\dot{\underline{x}} = \underline{f}_r(\underline{x})$ ammette una soluzione periodica attrattiva di equazione, nelle coordinate definite dal problema precedente, $|\zeta| = \sqrt{(r - r_c)(-\gamma)^{-1}} + O((r - r_c))$, per $r > r_c$ e $r - r_c$ abbastanza piccolo. Il periodo del moto è $\sim 2\pi/\omega_0$. (*Idea*: si noti che questo è ovvio per l'equazione troncata al terzo ordine. Il caso non troncato si riduce a quello troncato attraverso un'opportuna applicazione del teorema delle funzioni implicite).

[6] (*Biforcazione di Hopf inversa, caso bidimensionale*) Nel contesto del problema [4], e supponendo $\gamma = \text{Re } \vartheta > 0$, si mostri che l'equazione $\dot{\underline{x}} = \underline{f}_r(\underline{x})$ ammette una soluzione periodica repulsiva di equazione, nelle coordinate definite dal problema (4), $|\zeta| = \sqrt{(r_c - r)(\gamma)^{-1}} + O((r - r_c))$, per $r < r_c$. Il periodo del moto è $\sim 2\pi/\omega_0$. (*Idea*: come nel problema precedente.)

[7] (*Teorema della varietà centrale*) Nell'ipotesi di [1], con $n > 2$, si introduca il sistema di coordinate $\underline{x} = (x, y, \underline{z})$ con asse x parallelo a $\text{Re } v(0)$, asse y parallelo a $\text{Im } v(0)$ e $\underline{z} \in \mathbb{R}^{n-2}$ nel piano ortogonale a quello di v, \bar{v} . Si supponga che per qualche $\nu, r_0 > 0$ gli autovalori della matrice di stabilità di $\underline{x} = \underline{0}$ si mantengono non superiori a $-\nu < 0$, per $r \in (-r_0, r_0)$.

Allora per ogni $k \geq 2$ e per un opportuno $\delta_k > 0$ è possibile trovare una superficie bidimensionale $\Sigma_k(r)$ di classe C^k ed equazioni:

$$\underline{z} = \underline{\zeta}_r(x, y), \quad |x|, |y| < \delta_k, \quad |r| \leq \frac{r_0}{2}$$

tale che

- (i) se $|x_0|, |y_0| \leq 2\delta_k$, $|z_k| \leq \delta_k$ le soluzioni $t \rightarrow S_t(\underline{x}_0)$ (con dato iniziale $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, \zeta_r(x_0, y_0))$) dell'equazione restano su Σ_k se inizialmente $\underline{x} \in \Sigma_k$ (ossia Σ_k è S_t -invariante) e
- (ii) esiste D tale che se $|S_\tau(\underline{x})| < \delta_k$ per $0 \leq \tau \leq t$ allora $d(S_t(\underline{x}), \Sigma_k) \leq De^{-\nu t/2}$: ossia la superficie Σ_k è attrattiva per i moti che sono vicini all'origine, finché restano vicini;

cioè il moto si avvicina alla Σ_k e può allontanarsi dall'origine solo "scivolando" lungo Σ_k e
 (iii) $|\zeta_r(x, y)| \leq C(x^2 + y^2)$, con C costante.

Questa è una versione del "teorema della varietà centrale", (c.f.r. [G1], §(5.6), ad esempio).

Si faccia vedere che questo teorema, combinato con i precedenti risultati consente di dimostrare il teorema di biforcazione di Hopf:

Si supponga che per $r = r_c$ l'equazione differenziale del problema [1] abbia l'origine come punto fisso che perde stabilità a causa del passaggio, al passare di r attraverso r_c , per l'asse immaginario di due autovalori della matrice di stabilità complessi coniugati e al modo descritto nel problema [1]. Si supponga che un opportuno polinomio formato con le derivate di ordine ≤ 3 della f_r calcolate sul punto stazionario (l'origine per noi) risulta negativo. Allora esiste per $r > r_c$ ed $r - r_c$ abbastanza piccolo una soluzione periodica attrattiva situata in un intorno di raggio $O(\sqrt{r - r_c})$; il periodo di quest'orbita è $\sim 2\pi/\omega_0$ e tende a questo valore al tendere a zero di $r - r_c$. (Idea: Grazie al teorema della varietà centrale con k grande (basta $k = 4$, ad esempio) ci si riduce facilmente al caso $n = 2$, precedentemente trattato).

Bibliografia: [RT],[G1]. Una esposizione completa della teoria della biforcazione in relazione ai problemi qui trattati si trova in [R3].

§19 Cenni di teoria della biforcazione. Fine dell' inizio della turbolenza.

Ci occupiamo ora della stabilità delle orbite periodiche, proseguendo l' analisi del §18.

(E) Perdita di stabilità di un moto periodico. Biforcazione di Hopf.

La stabilità dei moti periodici per (18.1) in R^n può essere studiata a mezzo della *trasformazione di Poincaré*, definita come segue.

Si consideri un' orbita periodica Γ di periodo T_r come una curva chiusa nello spazio delle fasi e la si intersechi in un suo punto O con una superficie piana Σ trasversale (ossia *non* tangente a Γ) di dimensione $n - 1$, se n è la dimensione del sistema. Immaginiamo di fissare sulla Σ un sistema di coordinate $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ con origine O . Al variare dell' intensità forzante r , c.f.r. (18.1), Γ, O, Σ possono cambiare e Γ può addirittura cessare di esistere; ma nello studio del sistema per r vicino ad un valore di interesse r_c supporremo che la superficie Σ sia fissata.

Se $\underline{\xi}$ è un punto di Σ in un intorno U dell' origine O , possiamo immaginare di prenderlo come dato iniziale di una soluzione dell' equazione del moto $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}; r)$, c.f.r. (18.1). Tale moto seguirà da presso l' orbita periodica percorrendo una traiettoria che ritorna ad intersecare Σ in un punto $\underline{\xi}'$ dopo un tempo circa uguale al periodo T_r di O , almeno se, come supporremo, U è scelto abbastanza piccolo.

Definizione: Definiremo $S_\Sigma \underline{\xi}$ il punto $\underline{\xi}'$ di Σ così raggiunto a partire da $\underline{\xi} \in \Sigma$. La trasformazione S_Σ , della sezione Σ in sé, ha O come punto fisso e viene chiamata *trasformazione di Poincaré* e può essere descritta in un sistema di coordinate cartesiane $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ su Σ in cui O ha coordinate che chiameremo \underline{x}_r . La matrice M delle derivate in O di S_Σ rispetto alle coordinate $\underline{\eta}$, ossia $M_{ij} = \partial_{\eta_i} S_\Sigma(\underline{\eta})_j |_{\underline{\eta}=\underline{x}_r}$ si dirà *matrice di stabilità dell' orbita periodica Γ* .

La matrice di stabilità M (che è una matrice quadrata $(n - 1) \times (n - 1)$) evidentemente dipende oltre che da Γ anche dalla scelta di O su Γ , dalla scelta della sezione Σ per O , e infine dal sistema di coordinate definito su Σ . Tuttavia è facile rendersi conto che lo spettro degli autovalori di M *invece non dipende da alcuna di queste scelte*, c.f.r. problema [1].

La stabilità dell' orbita si discute facilmente in termini della trasformazione S_Σ . Infatti l' orbita sarà stabile, e attrarrà con velocità esponenziale i punti ad essa vicini, se la matrice M di stabilità di Γ , avrà tutti gli autovalori con modulo < 1 . Al crescere di r , che parametrizza l' equazione originale e quindi la S_Σ stessa, la perdita di stabilità si manifesta con il raggiungimento del cerchio unitario da parte di uno degli autovalori di M . Sia r_c il valore di r per cui ciò avviene.

Si hanno tre possibilità:

(1) l' autovalore di massimo modulo della matrice $M(r)$ raggiunge il cerchio unitario in un punto non reale $e^{i\delta_c}$, $\delta_c \neq 0$, e quindi insieme con un autovalore coniugato (perché $M(r)$, anche, è reale); oppure:

(2) l'autovalore di massimo modulo è semplice e raggiunge il cerchio unitario in -1 ; o infine:

(3) l'autovalore di massimo modulo è semplice e raggiunge il cerchio unitario in 1 .

Le altre possibilità (come più autovalori che raggiungono simultaneamente il cerchio) sono evidentemente non generiche e non verranno considerate anche se possono presentarsi in sistemi con speciali simmetrie.

Nei primi due casi il determinante $\det(M(r_c) - 1)$ non è nullo e, via un teorema delle funzioni implicite, si trova che il punto fisso di S_Σ , \underline{x}_r , si può “continuare” per $r > r_c$, come punto fisso (genericamente) instabile di S_Σ (che per l'equazione differenziale corrisponde, quindi, alla esistenza di un'orbita periodica instabile). Questa continuazione, nel terzo caso, è genericamente impossibile, come nell'analogo caso visto nel §18 del punto fisso che perde stabilità perché un autovalore della matrice di stabilità raggiunge 0 , si veda il problema [2].

Consideriamo il primo caso: può avvenire che per $r = r_c$, cioè al momento di perdita della stabilità da parte dell'orbita periodica Γ , i termini non lineari della trasformazione di Poincaré S_Σ siano attrattivi (analogamente a quanto visto nel §18 nei casi di attrattività vaga dei punti fissi). Allora, fissato r di poco più grande di r_c , questi bilanciano la repulsività, acquisita da O , ad una certa distanza da O e si crea su Σ una curva invariante $\gamma = S_\Sigma \gamma$ che viene trasformata in se dall'azione di S_Σ che “la fa ruotare” con un numero di rotazione circa uguale a δ_c ove δ_c è l'argomento dell'autovalore complesso $\lambda_{r_c} = e^{i\delta_c}$.¹ In questo caso si dice che il moto periodico iniziale è vagamente attrattivo per $r = r_c$.

Questo significa che le orbite che hanno i punti di γ come dati iniziali generano nello spazio a n dimensioni una superficie che topologicamente risulta essere un *toro bidimensionale invariante* stabile e che su Σ ha una sezione γ . Inoltre appare una seconda scala di tempo, il cui rapporto con quella dell'orbita periodica, ormai instabile, è circa $2\pi/\delta_c$ e il moto sul toro invariante è in generale quasi periodico.

Mentre la traiettoria “gira” seguendo essenzialmente, almeno se $r - r_c$ è piccolo, la vicina orbita ormai instabile Γ al tempo stesso la traiettoria si avvolge sul toro in modo da “riapparire” sulla sezione Σ sulla curva γ ma in un punto ruotato *in media* di un arco di curva di lunghezza δ misurata in unità in cui la lunghezza della curva Γ è 2π . Così l'orbita si chiude (approssimativamente) ogni $2\pi/\delta$ “rivoluzioni” e questo dà il significato fisico

¹ Poiché γ è invariante la trasformazione di Poincaré S_Σ può essere rappresentata come una trasformazione di un cerchio in se. Si identifica il punto di γ che ha ascissa curvilinea (da un'origine fissata su γ) uguale a s con il punto del cerchio di angolo $2\pi s/\ell$, ove ℓ è la lunghezza di γ ; e la trasformazione S_Σ diventa una trasformazione regolare $s \rightarrow g(s)$ del cerchio in se. Come vedremo, c.f.r. Fig. (19.4), la curva γ è in opportune coordinate assai vicina ad un cerchio e la trasformazione g assai vicina ad una rotazione di angolo $\omega(r_c)T_{r_c}$ e quindi è crescente. Immaginando di “svolgere” il cerchio in una retta la trasformazione S_Σ diventa una funzione g definita sulla retta $(-\infty, +\infty)$ tale che $g(s + 2\pi) = g(s) + 2\pi$. Allora si dimostra, c.f.r. [3], che esiste il limite $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{-1} g^n(s)$ ed è indipendente da s . Per ovvi motivi questo numero si chiama “numero di rotazione”.

del numero di rotazione.

L' attrattività vaga, come nel caso dei punti fissi del §18, può essere discussa più precisamente. Ad esempio consideriamo il caso in cui la dimensione della superficie Σ è 2 e il punto O viene scelto come origine delle coordinate x_1, x_2 nel piano Σ .

Le coordinate possono essere combinate nel numero complesso $z = x_1 + ix_2$ e, le coordinate x_1, x_2 possono essere *opportunamente scelte*, in modo analogo a quanto descritto nel [4] del §18: *occorre però questa volta una condizione in più e precisamente che per $r = r_c$ nessuno degli autovalori λ_i della matrice di stabilità verifichi $\lambda_i^3 = 1$ o $\lambda_i^4 = 1$.*

In tal caso si può costruire un cambiamento di coordinate, ameno regolare in classe C^1 e tale che la trasformazione S_Σ assume nelle nuove coordinate la forma

$$19.1aa \quad S_\Sigma z = \lambda(r) z e^{c(r) |z|^2 + O(z^4)} \quad (19.1)$$

ove $\lambda(r_c) = e^{i\delta_c}$, c è un numero complesso e $\lambda(r), c(r), O(z^4)$ funzioni di z, r almeno di classe C^1 .

Se $\text{Re } c(r_c) = \bar{c} < 0$ si ha *attrattività vaga* (il caso in cui i termini di terzo ordine non attraggono nè respingono per $r = r_c$, cioè $\bar{c} = 0$, è non generico). L' analisi è del tutto analoga, *mutatis mutandis*, a quella descritta nel §18.

Supponiamo che la derivata rispetto a r della parte reale di (r) in $r = r_c$ non si annulli non sarà restrittivo supporre che anche $\lambda(r) = r - r_c + i\delta(r)$. Trascurando $O(z^4)$ il cerchio $r - \text{Re } c(r) |z|^2 = 0$ è esattamente invariante, per (19.1), ed il moto su di esso è una rotazione di un angolo ϑ circa uguale a $\delta(r_c)$ (precisamente uguale a $\delta(r) + \text{Im } c(r) |z|^2$). Questo implica che c'è una curva invariante che è approssimativamente un cerchio di raggio ρ che è approssimativamente ruotato da S_Σ di un angolo ϑ con:

$$4.3.2 \quad \rho = (-\bar{c}^{-1} (r - r_c) + O((r - r_c)^2))^{1/2}, \quad \vartheta = \delta(r_c) + O(r - r_c) \quad (19.2)$$

perché i termini di $O(z^4)$ non possono cambiare troppo il quadro, come si vede ad esempio a mezzo di un teorema di funzioni implicite, *c.f.r.* problema [10].

Genericamente la condizione sulle potenze degli autovalori λ_i sarà soddisfatta: quindi si forma, nel caso di attrattività vaga, un toro invariante stabile percorso da moti con due scale di tempo rispettivamente circa uguali (per $r - r_c > 0$ e piccolo, a meno di infinitesimi in $r - r_c$) a $T_{r_c} = 2\pi\omega_0^{-1}$ (periodo del moto periodico che ha perso stabilità), e $T_1 = 2\pi T_{r_c} \delta^{-1}$, (*biforcazione di Hopf*, *c.f.r.* problemi del §18). Al diminuire di r verso r_c il toro si viene a confondere, si dice anche “collide”, con l' orbita Γ della quale “eredita” per $r > r_c$ la stabilità.

Se i termini non lineari di S_Σ per $r = r_c$ tendono, invece, ad allontanare da O (ossia se nelle coordinate speciali prima menzionate si ha $\bar{c} > 0$) si ha *repulsività vaga* e in tal caso i termini lineari (genericamente dell' ordine di $r - r_c$) non sono mai bilanciati e il moto si allontana dall' intorno dell' orbita periodica.

Ci si trova in una situazione del tipo di quella incontrata al §18 quando aveva luogo una perdita di stabilità generica perché l'autovalore massimo della matrice di stabilità raggiungeva 0. Come nel caso analogo del §18 si trova, se $\bar{\epsilon} > 0$, una curva invariante per S_Σ esistente per $r < r_c$ e instabile: quindi nello spazio delle fasi completo si ha un toro invariante instabile che per $r \rightarrow r_c$ si viene a confondere ("collide") con l'orbita periodica rendendola instabile per $r > r_c$.

Si potrebbe essere indotti in tentazione e pensare che il moto sul toro invariante che si forma per biforcazione di Hopf vagamente attrattiva da un'orbita periodica sia percorso da moti quasi periodici con due pulsazioni $\omega(r)$ e $\delta(r)$ che variando con continuità si riducono, magari genericamente e in modo strettamente monotono, a ω, δ_0 per $r \rightarrow r_c$. Invero il numero di rotazione dipende con continuità dalla trasformazione g che lo genera e g dipende con continuità da r .

Però ad un attento esame questo pensiero si rivelerebbe una conclusione affrettata. Invero se così fosse il numero di rotazione, circa uguale a $\delta(r)/2\pi$, dovrebbe evolvere assumendo valori talvolta razionali e talora irrazionali. Ma se per un certo r si avesse un rapporto razionale questo vorrebbe dire che il moto quasi periodico sarebbe in realtà periodico ed è facile convincersi che, genericamente, un moto generato su un cerchio da una trasformazione regolare S e con numero di rotazione razionale possiede un numero finito di punti periodici attrattivi o repulsivi cui gli altri moti sono asintotici.²

Cioè non ci si può attendere che il toro sia ricoperto da orbite periodiche (come nel caso delle rotazioni lineari di angolo razionale del cerchio) come dovrebbe essere se il numero di rotazione potesse variare in modo "regolare" con continuità.³

E invero quando il numero di rotazione è razionale i punti periodici attrattivi del cerchio saranno (genericamente) stabili e quindi resteranno tali per un intervallo (eventualmente molto piccolo) di r e con periodo fisso perché esso è un numero intero e non può, quindi, variare di poco: ci si deve attendere che al crescere di r il numero di rotazione resti fisso a tratti (segmentini a lunghezza > 0 sull'asse r) e in questi tratti abbia valore razionale.

Si dice che in questi intervalli di r ha luogo un fenomeno di allacciamento in fase o di risonanza, fra le due rotazioni (quella lungo l'orbita periodica e quella sulla sezione Σ).⁴

Questo non impedirà al numero di rotazione di crescere (o decrescere) con continuità al crescere di r (perché natura non facit saltus, come molti sanno). Ma il grafico del numero di rotazione in funzione di r avrà un aspetto caratteristico e apparirà piatto a tratti (e quindi non strettamente

² E' questo un caso molo particolare della dimostrazione di un teorema di Peixoto secondo il quale un'equazione differenziale su un toro a 2 dimensioni ha solo un m numero finito di punti fissi o orbite periodiche, alcune attrattivee e alcune repulsive.

³ Si noti che se il numero di rotazione è irrazionale allora il toro è effettivamente percorso da un moto privo di insiemi attraenti altri che il toro stesso.

⁴ Il fenomeno si chiama in inglese "phase locking".

monotono. Un tale grafico ha il nome di *scala del diavolo* (etimologia oscura non essendo chiaro perché l'essere in questione abbia avuto tempo da dedicare alla costruzione di tali scale, *c.f.r.* problema [6]).

(F) *Perdita di stabilità di un moto periodico. Biforcazione di sdoppiamento.*

È questo il caso in cui si ha perdita di stabilità dell'orbita periodica a causa del passaggio, quando $r = r_c$, di un autovalore della matrice di stabilità $M(r)$ per -1 . Di nuovo occorre distinguere il caso *vagamente repulsivo*, (in cui i termini non lineari, per $r = r_c$, respingono lontano dal punto fisso), da quello opposto *vagamente attrattivo*.

Il caso in cui i termini di terzo ordine non fanno, né l'una né l'altra azione è “non generico” (e quindi *tertium non datur*).

Nel primo caso di nuovo il moto si allontana dal moto periodico divenuto instabile e ci si ritrova nella situazione in cui non si può dir nulla (*sob*). Nel secondo caso invece si vede facilmente che appare un punto fisso di periodo 2 per la S_Σ .

Invero il fatto che un autovalore sia circa -1 (e maggiore di 1 in modulo) significa che, “dopo un giro”, un punto vicino a O e spostato di δ nella direzione dell'autovettore \underline{v} corrispondente all'autovalore che è circa -1 di M ritorna vicino ad O , ma essenzialmente dalla parte opposta nella direzione di \underline{v} e allontanandosi un pó più di δ dall'origine.

Iterando però il punto non si allontana troppo perché, per la supposta attrattività vaga, ad un certo punto i termini cubici bilanciano la tendenza all'allontanamento:⁵ il sistema si pone dunque “in equilibrio” visitando alternativamente, ad ogni “giro”, ossia ad ogni applicazione della trasformazione S_Σ , due punti collocati esattamente dove la repulsione lineare e l'attrazione cubica si bilanciano. Evidentemente quest'orbita periodica con periodo 2 è l'intersezione con il piano Σ di una traiettoria periodica con periodo *circa*⁶ due “volte” quello $2\pi/\omega_0$ dell'orbita che ha perso stabilità.

E anche geometricamente quest'orbita periodica sarà assai vicina all'orbita instabile e circa doppia in lunghezza e questo spiega il nome di “*biforcazione di sdoppiamento*” dato al fenomeno che studiamo.

(G) *Perdita di stabilità di un moto periodico. Biforcazione per $\lambda = 1$.*

È il caso analogo a quello già incontrato nel caso dei punti fissi perdenti stabilità per $\lambda = 0$: il punto fisso per la S_Σ genericamente cessa di esistere per $r = r_c$ e per $r > r_c$ il moto si allontana dalle vicinanze del moto periodico che abbiamo seguito fino a $r = r_c$ e non si può dire nulla, in generale. Ovviamente in caso di simmetrie si ripropone quanto già detto nel caso dei punti fissi ed è possibile che prima del “*vero salto nel buio*” (ossia la migrazione del moto verso altri lidi, costituiti da insiemi attraenti lontani dal moto periodico Γ che ha perso stabilità) si osservino alcune

⁵ Una dimostrazione è simile, ma molto più semplice, a quella proposta nel caso analogo in [E], *c.f.r.* problema [10].

⁶ Approssimativamente perché $r \neq r_c$.

biforcazioni non generiche accompagnate da rotture di simmetrie.

(H) E poi? Il Caos! e i suoi “scenari”.

Quando ci si allontana dai moti che hanno perso stabilità si possono dare vari casi: i più semplici si verificano quando i moti respinti dai punti fissi o moti periodici (o quasi periodici) divenuti instabili si approssimano ad insiemi attraenti, eventualmente lontani nello spazio delle fasi, ma semplici, ossia dello stesso tipo di quelli finora considerati (punti fissi o orbite periodiche). ■ In tal caso, al variare ulteriore di r , tutto il discorso si ripropone *negli stessi termini*. E il “vero” problema è “rinviato” a valori più grandi di r . Ma esiste la possibilità che non sia così: e gli esempi che seguono sono assai interessanti in proposito.

(H1) Scenario dell’intermittenza.

Consideriamo un’orbita periodica Γ_r che perde stabilità per $r = r_c$ a causa del passaggio attraverso 1 o -1 di un autovalore della matrice di stabilità. Può accadere che la trasformazione di Poincaré S_Σ continui a contrarre molto in tutte le direzioni *meno una* e il moto in quella direzione sia di ampiezza non piccola ma essenzialmente sia unidimensionale e quindi consista in una trasformazione di un segmento in se stesso. La direzione sarà quella dell’autovettore \underline{v}_c della matrice di stabilità $M(r_c)$ di S_Σ al punto fisso O ove la trasformazione S_Σ è definita.

Ciò avverrà se per $r = r_c$ i termini non lineari di S_Σ tendono a riportare i moti che si allontanano abbastanza dal punto $O \in \Sigma$ di nuovo vicino a O .

Si vede allora che il moto appare come avente una componente approssimativamente periodica (corrispondente al moto lungo l’orbita Γ_{r_c} che ha perso stabilità) e una componente consistente in oscillazioni trasversali a questa. ■

Ossia sembra che si svolga apparentemente su una superficie bidimensionale che si appoggia sull’orbita Γ_{r_c} (approssimata per $r > r_c$) e interseca Σ lungo una curva τ tangente (ancora approssimativamente per $r > r_c$) alla direzione \underline{v}_c dell’autovettore associato all’autovalore reale che ha raggiunto (e superato) il cerchio unitario.

Ad “ogni giro” il moto ritorna essenzialmente su tale curva τ , perché la S_Σ non fa allontanare troppo da essa, essendo instabile solo nella direzione \underline{v} e avendo supposto che la S_Σ sia tale da riportare punti di Σ lontani da O nei pressi di O (per r di poco superiore r_c , almeno).

Se sulla curva τ (che è, quasi coincidente con la retta parallela all’autovettore \underline{v}_c , almeno nell’intorno del punto fisso) definiamo l’ascissa s e la usiamo per descrivere i punti di τ , denoteremo con $s^* = s(r_c)$ l’ascissa del punto di τ che si trova sull’orbita periodica (possiamo pensare che $s(r) \equiv 0$).

In questo caso può essere una buona *approssimazione* considerare il moto proiettato sulla retta parallela a \underline{v}_c , l’autovettore considerato della matrice di stabilità $M(r_c)$. E se s è sempre l’ascissa su tale retta si potrà descrivere il moto a mezzo di una trasformazione $s \rightarrow g_r(s)$. Siamo interessati ai casi in cui dati iniziali vicini al punto fisso che ha perso stabilità non si

allontanino troppo lungo questa retta ma restino indefinitamente confinati ad un segmento $[-s_0, s_0]$ muovendosi avanti e indietro su di esso.

Una figura che illustra il fenomeno è la seguente: rappresenta la curva τ come un segmento posto nella direzione di \underline{v}_c e una famiglia di trasformazioni del segmento in se che conduce ad una perdita di stabilità in $r = r_c$ con autovalore 1, rimanendo attrattiva lontano dal punto $s^* = 0$.

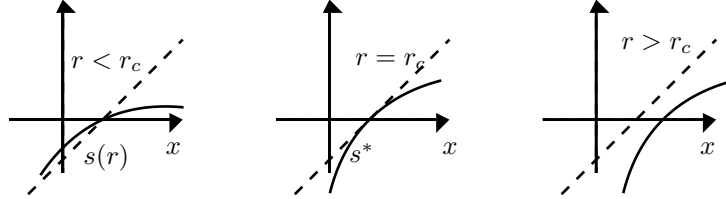


Fig. (19.3) Caso con autovalore $+1$. L'asse s rappresenta τ , il punto $s(r)$ il punto fisso; la trasformazione g tende, for $r > r_c$, ad allontanare da from s^* ; pertanto se i termini non lineari prevalgono e ritornare nelle vicinanze di s^* la g deve essere piuttosto diversa più lontano da s^* . Si veda Fig. (19.4) per una rappresentazione più globale. Il caso dell' autovalore -1 è più semplice ed è illustrato in Fig. (19.5).

La riducibilità del moto generato da S_Σ sulla sezione Σ può, però, essere *solo un' approssimazione*, in quanto la trasformazione di $[-s_0, s_0]$ in se dovrà necessariamente consistere in una espansione di $[-s_0, s_0]$ seguita da un *ripiegamento* dell' intervallo in se *c.f.r.* Fig. (19.3), vicino al punto fisso che ha perso stabilità). Perciò esisteranno punti $s = g_r(s_1) = g_r(s_2)$ che sono immagini di punti diversi s_1 e s_2 . Quindi se il moto si svolgesse davvero su una superficie invariante che interseca Σ sulla curva τ verrebbe violata la unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali, che invece generano in ultima analisi il nostro moto. Nella figura (19.3) il “ripiegamento” non è illustrato, ossia si deve immaginare che avvenga a una distanza da s^* non mostrata inella figura: si veda la figura seguente per un esempio.

Dunque la descrizione “1-dimensionale” non può che essere approssimata e si deve pensare che il segmento $[-s_0, s_0]$ consista di molti (infiniti) segmenti paralleli vicinissimi, tanto da non essere distinti dalle osservazioni che ne facciamo. Tuttavia in questa approssimazione si può pensare il moto come 1-dimensionale, almeno nei casi in cui la perdita di stabilità avviene in 1 dimensione, ossia con autovalore che passa per 1 o -1 .

Nel caso di *passaggio per 1* si può immaginare che la g_r abbia un grafico del tipo seguente, prima della perdita di stabilità, alla perdita e dopo.

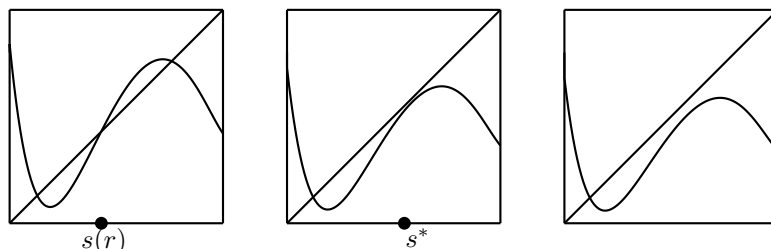


Fig. (19.4): Un esempio del fenomeno di intermittenza: la figura rappresenta il grafico di $g(s)$ su $[-s_0, s_0]$ e il quadrato contenente il grafico è di solito aggiunto come aiuto ottico perchè “a vista” sia chiaro che l’intervallo $[-s_0, s_0]$ è invariante. La diagonale aiuta a visualizzare i punti fissi e le iterate della trasformazione.

La perdita di stabilità allora sarà accompagnata da un “*fenomeno di intermittenza*“, infatti per $r > r_c$ la trasformazione g_r che per $r = r_c$ fu tangente alla diagonale non avrà più punti in comune con la diagonale stessa nell’intorno dell’ultimo punto di tangenza e quindi i moti *spenderanno un lungo tempo* presso il luogo di ultima esistenza del punto fisso, *che non esiste più* per $r > r_c$, per poi allontanarsi e, eventualmente, ritornare dopo aver visitato altre regioni dello spazio delle fasi (che è ora ridotto ad un intervallo). A meno che, allontanandosi abbastanza, non si trovino altrove nello stesso intervallo ad entrare in bacini di attrazione di altri punti fissi stabili o orbite periodiche stabili, nel qual caso il discorso può essere ricominciato da capo.

In questa situazione il moto non appare né periodico né quasi periodico, ma si succedono periodi, (anche molto lunghi se $r \sim r_c$), in cui il moto sembra mantenersi essenzialmente periodico ad una frequenza (questo è dovuto al fatto che il moto ritorna presso quello che per $r = r_c$ era ancora un punto fisso di S_Σ ad ogni giro eseguito vicino a quella che per $r = r_c$ era ancora un’orbita periodica e che per $r > r_c$ lo sarà ancora in un senso approssimato, se $r - r_c$ è piccolo), seguiti (a causa del fenomeno illustrato nella terza delle figure (19.3)) da moti erratici in cui il punto si allontana dall’orbita periodica che ha perso stabilità fino a che non ne viene “catturato” di nuovo. È inverosimile rendersi conto che per $r - r_c > 0$ piccolo occorrono $O((r - r_c)^{-1/2})$ iterazioni di S_Σ per allontanarsi apprezzabilmente dal punto di ascissa $s_{r_c}^*$ (che non è più un punto fisso).

Si hanno moti “caotici” o “turbolenti” che nascono con lo *scenario di Pomeau–Manneville* o *scenario dell’intermittenza*, [E].

(H2) *Scenario dello sdoppiamento.*

Uno scenario diverso si sviluppa se la perdita di stabilità avviene perché un autovalore di $M(r)$ raggiunge -1 . In questo caso la rappresentazione unidimensionale sarà ancora possibile, ma il grafico di g_r dovendo tagliare a 90° la bisettrice per $r = r_c$ (in modo che $g'_{r_c}(0) = -1$), non potrà divenire tangente ad essa per $r > r_c$ e $r - r_c$ piccolo.

Questa volta il punto fisso O (di ascissa $s^*(r)$ su τ) continua ad esistere instabile anche per $r > r_c$ perché la matrice di stabilità di O non ha autovalore 1 per $r = r_c$ (e il punto fisso che continua O esiste come assicurato da un teorema delle funzioni implicite). Quello che si immagina è che il modulo della derivata di g_r valutata al punto fisso instabile s^* aumenti ancora: e si può allora applicare una teoria generale delle biforcazioni associate a trasformazioni di un intervallo il cui grafico ha la forma in figura.

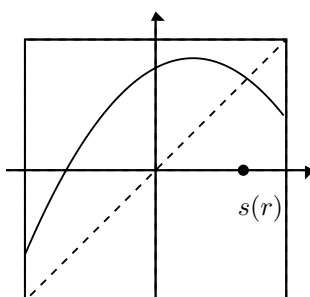


Fig. (19.5): Il grafico illustra una trasformazione g che ha un punto fisso $s(r)$ con autovalore di stabilità circa -1 , e minore di 1 in modulo. Al variare di r si deve immaginare che la pendenza in $s(r)$ raggiunga per $r = r_c$ il valore -1 e poi cresca ulteriormente in modulo per $r > r_c$ dando luogo ad una biforcazione di sdoppiamento. che è una delle più semplici forme che permettono di definire una trasformazione che stira un intervallo e lo lo ripiega su se stesso: un'altra è stata illustrata nella figura precedente..

Questa teoria, dovuta a Feigenbaum, prevede, sebbene non “genericamente” tuttavia “abbastanza in generale”, che alla prima biforcazione di sdoppiamento segua una *catena infinita*, in un brevissimo intervallo di r , di *biforcazioni di sdoppiamento*, in cui l'orbita iniziale si sdoppia successivamente raddoppiando ogni volta di periodo. Gli intervalli di r al termine dei quali avvengono le successive biforcazioni si contraggono esponenzialmente con ragione asintotica $1/4.68..$ che è una costante universale (indipendente cioè dal particolare sistema che si osserva), detta *costante di Feigenbaum*.

Il moto caotico, non periodico, sopravviene (o può sopravvenire) alla fine della catena, e questa transizione al caos è detta *scenario di Feigenbaum* o *scenario dello sdoppiamento*, [F1],[F2], [E],[CE].

(H3) Scenario di Ruelle–Takens.

Infine resta da considerare cosa accada se si è creato un toro invariante attraverso una biforcazione di Hopf. Tale toro appare, nella sezione di Poincaré, come una curva chiusa γ (intersezione del toro con la superficie di sezione Σ).

Il tentativo di definire una trasformazione di Poincaré per studiare la stabilità del moto quasi periodico fallisce perché ora la trasformazione dovrebbe essere una trasformazione di una curva γ_0 (deformazione della curva invariante γ che rappresenta l'intersezione fra il toro e la superficie

di sezione Σ e della quale si studia la stabilità) in una curva γ'_0 (immagine della γ_0 dopo “un giro”). E fallisce non tanto perché tale trasformazione sarebbe una trasformazione a dimensione infinita (avendo per oggetto una curva piuttosto che un punto), quanto per il fatto che in generale *non sarà ben definita* perché sul toro possono apparire nuovi tipi di moto.

Ad esempio eventuali piccole orbite periodiche sulla superficie del toro o nelle sue vicinanze rendono la trasformazione di Poincaré, che si vorrebbe introdurre, dipendente in modo critico dalla scelta di Σ e spesso mal definita (mentre si vede facilmente che nel caso precedente dell’analisi della stabilità delle orbite periodiche, invece, tutte le sezioni sono equivalenti). Ed è chiaro che se esiste un insieme invariante E sul toro che ha diametro piccolo e che non è intersecato dalla superficie Σ allora non potremo decidere dal comportamento della trasformazione di Poincaré eventuali instabilità dovute ai moti che si svolgono in E , semplicemente perché le loro traiettorie non visitano mai Σ .

Questa situazione si presenta spesso quando le due scale di tempo sul toro diventano commensurabili (al variare di r) e cioè si ha *risonanza o allacciamento in fase, c.f.r. (F)* e il moto è asintoticamente periodico e non quasi periodico. Questo è spesso il caso che si presenta quando le due scale di tempo associate al moto sul toro divengono (al variare di r) commensurabili (*risonanza o allacciamento in fase, c.f.r. (F)*) e il moto è asintoticamente periodico e non quasi periodico.

Oppure alla perdita di stabilità del toro il moto si viene a svolgere su una superficie di dimensione superiore ma, sia che questa sia un toro a tre dimensioni o altro, i moti che si svolgono su di essa genericamente *non sono quasi periodici o periodici* e questo rende difficile una teoria del moto sulla superficie stessa.

Il problema è reale perché, come è stato provato, [RT], la perdita di stabilità di un toro bidimensionale, *anche ammettendo che dia luogo ad un toro tridimensionale invariante*, è seguita, genericamente, da un moto che non è semplicemente un moto quasi periodico a tre frequenze su un toro tridimensionale (come nello *scenario aristotelico* classico), bensì un moto regolato da un *insieme attraente strano*, ossia un insieme attraente sul quale si svolge un moto che non è né un punto stazionario, né un’orbita periodica né un moto quasi periodico. Dunque la perdita di stabilità di un toro invariante fornisce un terzo scenario, detto di *scenario di Ruelle e Takens*, (che appunto hanno mostrato quanto ora affermato sulla genericità dei moti strani originati dalla perdita di stabilità di un moto quasi periodico a due frequenze), [RT],[E].

Più precisamente in [RT71] si mostra che se per qualche motivo un toro invariante di dimensione 4, poi ridotta a 3, è generato ad un certo valore di r , allora genericamente il moto su di esso *sarà* quasi periodico. E il punto del lavoro fu di criticare l’idea che potrebbe essere invece comune che un toro 2-dimensionale percorso da moti quasi periodici biforcasse in un toro 3-dimensionale pure percorso da moti quasi periodici.

(I) Conclusioni:

I tre scenari sopra menzionati non esauriscono tutte le possibilità: ma coprono abbastanza bene le instabilità che sono possibili quando diventano instabili i moti che sono stati a loro volta generati da una perdita di stabilità di un moto periodico.

Questo almeno nei casi in cui la perdita di stabilità delle orbite periodiche avviene per il passaggio di un solo autovalore della matrice di stabilità di una trasformazione di Poincaré, o di due complessi coniugati, per il cerchio unitario, mentre gli altri restano bene all'interno del cerchio.

In modo che sia ragionevole pensare che il moto instabile generato, sulla superficie su cui si realizza una trasformazione di Poincaré sia, con buona approssimazione, unidimensionale e svolgentsi su un segmento (nei casi dei primi due scenari) o su una curva chiusa, nel caso di Ruelle e Takens.

Esistono *altre possibilità*, come l'allontanamento definitivo dal punto fisso (o moto periodico) divenuto instabile (nei casi di repulsività vaga): questo caso o dà in un certo senso luogo a una palingenesi, perché il problema si ripropone con lo studio del moto nell'intorno di nuovi insiemi attraenti, se semplici; oppure si può considerare un *quarto scenario* possibile, quello della *transizione diretta al caos*.

Ovvero può avvenire che si abbia un gran numero di autovalori della matrice di stabilità vicini al cerchio (o all'asse immaginario a seconda dei casi); caso in cui il moto può "apparire" come caotico a causa delle molte scale di tempo che ne regolano lo sviluppo. Si può sperare, e lo si osserva, che questo caso sia raro vista la non genericità dell'attraversamento simultaneo dell'asse immaginario o del cerchio unitario da parte di più di un autovalore reale o da più di due complessi coniugati. E in ogni caso lo si può mettere in un *quinto scenario*: lo "*scenario degli altri casi*".

Fra gli "altri casi" c'è anche la possibilità delle successive formazioni di moti quasi periodici a numero di frequenze crescenti, cioè c'è la possibilità che si verifichi questo scenario detto a volte *scenario di Landau* (o anche di *Hopf*, che pure lo propone). Sono senz'altro matematicamente possibili esempi di questo, anche se non se ne conoscono di rilevanti per la fluidodinamica: ove questo scenario non è *quasi mai* stato osservato: dal punto di vista delle simulazioni numeriche al più si sono osservati, in troncamenti a 7 modi dell'equazione di NS 3-dimensionale, moti interpretabili come moti quasi periodici a 3 frequenze indipendenti svolgentesi su tori 3-dimensionali, *c.f.r.* [LFL], e fenomeni simili sono stati notati in esperimenti reali, *c.f.r.* [GZa].

Si noti anche che, come si è discusso in (E) a proposito delle scale del Diavolo, già quanto avviene in occasione di una ordinaria biforcazione di Hopf è in un certo senso "contrasto" con lo scenario dei moti quasi periodici a numero di frequenze crescente perché in realtà si generano fenomeni di allacciamento in fase in luogo di moti quasi periodici con numero di rotazione che varia in modo strettamente monotono.⁷

⁷ Non è ragionevole pensare che Landau ignorasse il fenomeno dell'allacciamento in fase in questo contesto: probabilmente pensò che avesse conseguenze trascurabili nello

A questo punto si deve però anche dire, a difesa del punto di vista di Landau, che se è vero che i moti quasi periodici sono da considerarsi non generici resta vero che esistono insiemi generici ma di *volume estremamente piccolo*⁸ mentre esistono insiemi non generici e di *volume estremamente grande*.⁹ Dunque c'è la possibilità che, cambiando la nozione di piccolo e grande, intendendo per grande ciò che ha volume grande (anziché ciò che è generico) lo scenario di Landau ritorni accettabile. In definitiva la vera critica che si può muovere allo scenario di Landau è che non si osserva se non, forse, in casi rarissimi.

E poi al crescer ulteriore di r tutte le possibilità viste si accavallano potendosi manifestare in varie regioni dello spazio delle fasi, rendendo il problema della turbolenza sviluppata assai arduo.

Ma per quel che concerne l'inizio della turbolenza i primi quattro scenari descritti forniscono un quadro abbastanza generale delle possibilità e di rado, forse mai, si sono osservate transizioni al caos devianti in modo rilevante da uno di questi scenari.

Va infine anche notato che sebbene di solito la crescita di r favorisca lo svilupparsi di instabilità, non è detto che le biforcazioni debbano sempre presentarsi nel verso in cui le abbiamo discusse: a volte al crescere di r si osservano gli stessi fenomeni ma in ordine inverso (ossia ad esempio si osservano orbite che si dimezzano anziché raddoppiarsi, in una successione "inversa" di Feigenbaum, raggiungendo uno stato finale costituito da un'orbita periodica stabile che, all'ulteriore crescere di r , potrà però ancora divenire instabile via uno qualsiasi dei tre scenari possibili). Inoltre quanto avviene in certe regioni dello spazio delle fasi è, o può essere, largamente indipendente da quanto avviene in altre.

Quando si verifica che, per uno stesso valore r della forzante esistono insiemi attrattanti diversi (con diversi bacini d'attrazione, naturalmente) si dice che il sistema presenta un fenomeno di *isteresi*.

E molte transizioni "dirette al caos", (quarto scenario), *divengono invece normali evoluzioni inverse secondo uno dei primi tre scenari*. Infatti quello che talvolta accade è che in una transizione "diretta" al caos ci si allontana da un insieme attrattante divenuto instabile e si venga attratti da un altro insieme attrattante che, al valore di r considerato, è caotico ma è risultato dalla evoluzione indipendente e secondo uno dei primi tre scenari di un altro insieme attrattante situato in un'altra regione dello spazio delle fasi.

sviluppo della turbolenza e che le "cose" andassero come se fosse inesistente. L'allacciamento in fase apparirebbe su intervalli sempre più corti al crescere della forzante. Questo è un punto di vista assai fecondo e comune in Fisica: si pensi all'ipotesi ergodica o all'ipotesi geocentrica dell'Astronomia antica: si veda il Cap. 4 per altri esempi.

⁸ Si pensi all'unione degli intervalli di lunghezza $\varepsilon 2^{-n}$ centrati intorno all' n -mo punto razionale di $[0, 1]$.

⁹ Si pensi all'insieme dei punti ω dell'intervallo $[0, 1]$ tali che $|\omega q - p| > Cq^{-2}$ per una C opportuna e per tutte le coppie (p, q) con $q > 0$: sono i punti "Diofantini" di esponente 2, che formano un insieme di misura 1 ma con complementare denso, c.f.r. problemi di §21.

In conclusione si può dire che scenarii alternativi ai quattro su descritti non sono mai stati osservati con certezza in modelli di interesse per la fisica (sebbene siano matematicamente possibili, come si vede con semplici esempi).

Chiameremo pertanto “normale” un’evoluzione verso moti caotici che segue uno dei quattro scenarii sopra descritti: anomali saranno i casi dello *scenario aristotelico* (in cui appaiono moti quasi periodici a sempre più frequenze, senza dare mai luogo a un vero moto strano), spesso attribuito a Landau cui in questo caso è spesso assegnato il ruolo scomodo di moderno Tolomeo (che per Landau non dovrebbe suonare irrispettoso visto che le critiche a Tolomeo sono spesso infondate e in ogni caso non intaccano la statura scientifica, [Ga99b]).

Problemi.

[1] Si verifichi che lo spettro della matrice di stabilità M della trasformazione di Poincaré associata ad un’orbita periodica Γ non dipende né dal punto O né dalla sezione Σ scelti per definirla. (*Idea*: si mostri che i cambiamenti di O , ovvero di Σ , cambiano la M per similitudine; cioè esiste una matrice J tale che la nuova matrice di stabilità M' è $M' = JMJ^{-1}$.)

[2] Procedendo in analogia a quanto visto nei problemi del §18 si formuli la teoria della biforcazione di Hopf per la stabilità delle orbite periodiche. (*Idea*: Il ruolo giocato dall’asse immaginario è ora preso dal cerchio unitario. La teoria è essenzialmente identica con la novità della possibilità di perdita di stabilità per $\lambda = -1$, che dà luogo alle biforcazioni di sdoppiamento. La teoria delle forme normali, *c.f.r.* §18 problema [4] è anch’essa molto simile. Formulato, e accettato, un teorema analogo al teorema della varietà centrale, *c.f.r.* §18 problema [7], l’analogo del teorema di biforcazione di Hopf si discute allo stesso modo, tenendo in conto al momento opportuno la condizione aggiuntiva su menzionata che non ci siano autovalori della matrice di stabilità a $r = r_c$ che siano radici terze o quarte dell’unità, *c.f.r.* [G1].)

[3] Sia $\alpha \rightarrow g(\alpha)$ una funzione di classe C^∞ definita per $\alpha \in (-\infty, \infty)$ e tale che:

$$g(\alpha + 2\pi) = g(\alpha) + 2\pi$$

crescente. La trasformazione del cerchio $[0, 2\pi]$ definita da $\alpha \rightarrow g(\alpha) \bmod 2\pi$ è pur essa di classe C^∞ : si dimostri che il limite $\lim_n \frac{1}{n} g^n(\alpha)$ è indipendente da α , se esiste. Si dimostri poi che il limite esiste.

(*Idea*: La monotonia di g implica che $g^n(0) \leq g^n(\alpha) \leq g^n(2\pi) = g^{n-1}(g(2\pi)) = g^{n-1}(g(0) + 2\pi) = \dots = g^n(0) + 2\pi$. Similmente $g^n(2\pi k) = g(0) + 2\pi k$: si noti poi che

$$g^{n+m}(0) \leq g^n(0) + g^m(0) + 4\pi$$

perché ponendo $g^m(0) = 2\pi k_m + \delta_m$, $0 \leq \delta_m < 2\pi$ si ha $g^{n+m}(0) \leq g^n(2\pi k_m + \delta_m) \leq g^n(2\pi(k_m + 1)) = g^n(0) + 2\pi(k_m + 1) \leq g^n(0) + g^m(0) + 4\pi$. Quindi chiamando $L = \liminf_{m \rightarrow \infty} m^{-1} g^m(0)$ e se m_0 è tale che $m_0^{-1} g^{m_0}(0) < L + \varepsilon$ con ε positivo, scriveremo $n = k m_0 + r_0$ with $0 \leq r_0 < m_0$. Allora $g^n(0) \leq k g^{m_0}(0) + 4\pi k + 4\pi$ e dividendo per n entrambi i membri e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ otteniamo $\limsup n^{-1} g^n(0) \leq m_0^{-1} g^{m_0}(0) + 8\pi/m_0 \leq L + \varepsilon + 8\pi/m_0$ e per la arbitrarietà di ε e la possibilità di scegliere k_0 grande quanto si auspichi troviamo $\limsup n^{-1} g^n(0) \leq \liminf m^{-1} g^m(0)$, cioè i limiti esistono. Si veda §24 per una dimostrazione alternativa e il problemi [28], [29] del §21 per una *dimostrazione costruttiva*.)

[4] Utilizzando esclusivamente un calcolatore si analizzino le biforcazioni di (17.30) e, procedendo sperimentalmente, si verifichi l’esistenza di biforcazioni di sdoppiamento. Si cerchi, in un opportuno intervallo di r , anche moti periodici che al decrescere di

r si “annichilano”, in una biforcazione per 0, *c.f.r.* [FT]. (I risultati si trovano descritti anche in [G1], Cap. V, §8).

[5] Si studi empiricamente con un calcolatore la struttura delle biforcazioni delle soluzioni stazionarie e (eventuali) orbite periodiche delle (17.28), *c.f.r.* [Fr1]. (I risultati si trovano descritti anche in [G1], Cap. V, §8).

[6] Si costruisca un esempio di una funzione continua su $[0, 1]$ il cui grafico sia una “scala del diavolo”, ossia che sia una funzione non decrescente e tale che ogni valore razionale sia assunto in un intervallo in cui la funzione è costante e inoltre la funzione sia crescente in tutti i punti in cui non ha valore razionale. (*Idea*: si consideri l’ n -mo punto razionale x_n , $n = 1, 2, \dots$ (numerando i razionali in modo arbitrario). Si definisca $f(x) = x_1$ per x nel “primo intervallo triadico” I_1 (ossia nell’intervallo aperto che contiene i numeri la cui prima cifra in base 3 non è 1: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$).¹⁰ Si consideri x_2 e se $x_2 < x_1$ si definisca $f(x) = x_2$ nel primo intervallo triadico a sinistra di I_1 , o se $x_2 > x_1$ nel primo intervallo triadico a destra di I_1 . Si proceda iterativamente e sia $f(x)$ la funzione cui si perviene: questa, estesa per continuità agli altri punti (che formano l’insieme di Cantor) ha per grafico una scala del Malvagio.)

[7] Si congetturi che ogni trasformazione C^∞ , S , di R^n in se che ha l’origine come punto fisso iperbolico (ossia con matrice di stabilità senza autovalori λ_i di modulo 1) sia trasformabile mediante un cambiamento di coordinate di classe almeno C^2 in una trasformazione S' che sia *esattamente* lineare in un intorno dell’origine (abbastanza piccolo). Si mostri che la congettura è falsa facendo vedere che la trasformazione:

$$x'_1 = \lambda^2 x_1 + N_{123} x_2 x_3, \quad x'_2 = \lambda^{-1} x_2, \quad x'_3 = \lambda^3 x_3$$

con $\lambda > 1$ fornisce un controesempio non essendo trasformabile in $\xi'_1 = \lambda^2 \xi_1$, $\xi'_2 = \lambda^{-1} \xi_2$, $\xi'_3 = \lambda^3 \xi_3$ con una trasformazione di classe C^2 . (*Idea*: Si supponga che ciò sia possibile e si mostri che $\xi'_j = x_j + \sum_{i,k} m_{j,ik} x_i x_k + o(x^2)$ dá luogo a equazioni incompatibili per i coefficienti $m_{j,ik}$ se $N_{123} \neq 0$, perché dovrebbero verificare $(\lambda_j - \lambda_i \lambda_k) m_{ijk} = N_{ijk}$.)

[8] Si mostri che il risultato in [7] non è incompatibile con il *teorema di Grobman–Hartman* che invece dice che, se S è di classe C^1 almeno, allora è trasformabile in un intorno dell’origine nella trasformazione esattamente lineare a mezzo di una “trasformazione di coordinate” localmente invertibile e *continua*, ma non necessariamente differenziabile. Si può mostrare che se S è di classe C^∞ allora esiste, nell’intorno del punto fisso (l’origine), un cambiamento di coordinate che la linearizza localmente e che è di classe C^1 se $\lambda_j \neq \lambda_i \lambda_k$ per tutti i valori di i, j, k . Si dice che la S verifica “condizione di non risonanza” di ordine 2 sul punto fisso. Se poi $\lambda_i \neq \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n}$ per tutte le n -ple di interi non negativi k_1, \dots, k_n a somma ≥ 2 allora il cambiamento di coordinate può essere scelto di classe C^∞ , *c.f.r.* [R3] e inoltre dipende con continuità, in classe C^1 , da parametri da cui dipende eventualmente S (se S è C^∞ in questi parametri). Si dice che la S verifica “condizione di non risonanza” a tutti gli ordini sul punto fisso. Risultati analoghi valgono per la linearizzazione esatta di equazioni differenziali intorno ad un punto fisso la cui matrice di stabilità abbia autovalori λ_j tali che $\lambda_j \neq \sum_i k_i \lambda_i$ per \underline{k} come sopra, *c.f.r.* [R3], p. 25.

[9] Si suppongano valide le ipotesi di *non risonanza* ad ordine arbitrario allora si mostri che i risultati citati in [8] possono essere usati per mostrare l’esistenza regolarità e dipendenza regolare dai parametri (eventuali) di S di due varietà, contenute in un intorno di O di raggio δ abbastanza piccolo, $W_O^{\delta,s}$ e $W_O^{\delta,u}$ tali che $S^n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} O$ se $x \in W_O^{\delta,s}$ o, rispettivamente, $x \in W_O^{\delta,u}$. (*Idea*: Questo è ovvio se S è lineare, e resta vero anche nel caso non lineare non risonante usando il cambiamento di coordinate citato in [8]. È questa una dimostrazione complicata della esistenza delle varietà stabili e instabili di un punto fisso iperbolico: esistenza che può essere dimostrata con mezzi più elementari e in condizioni molto più generali, in cui la equazione *non* è linearizzabile: le varietà esistono

¹⁰ In generale dato un intervallo I lo si può dividere in tre terzi, I_0, I_1, I_2 : chiamandoli 0-mo, 1-mo and the 2-mo (ossia usiamo le convenzioni del linguaggio C).

sempre per qualsiasi punto fisso iperbolico ed hanno la *stessa* regolarità della S , purché questa sia di classe C^1 almeno, *c.f.r.* [R3], p.28.)

Bibliografia: [RT],[F1],[F2],[E],[CE],[ER],[R2],[GZa], [LL] e principalmente [R3]. Lo scenario di Landau nella sua formulazione originale può essere trovato nelle prime edizioni del trattato [LL]: in quelle più recenti sono state apportate modifiche per tener conto delle novità generate da [RT].

Nota: Alcuni amanti del Dolce Stil Novo preferiscono dire “mappa di Poincaré” in luogo di “trasformazione di Poincaré” sulla base del fatto che gli autori di lingua inglese chiamano tale trasformazione *Poincaré’s map*, argomento che io trovo scarsamente convincente, almeno non al punto da cambiare il significato di una parola italiana, molto usata in geografia.

┐

┐

276

§19: Scenarii del Caos

.

┐

┐

§20 *Tavole dinamiche.*

Discutiamo in questo paragrafo gli stati stazionari che vengono raggiunti a partire da dati iniziali presi a caso. Tali stati stazionari dipendono dal valore di un parametro, r negli esempi del §17, che chiameremo convenzionalmente *numero di Reynolds*: è una misura della intensità della forza esterna applicata al sistema, per mantenerne lo stato di moto.

Questo parametro verrà considerato, al fine di dare un'immagine visiva più cogente, come un "tempo": per cui si dirà che "al crescere di r " avviene una biforcazione di un certo stato stazionario, che "porta alla creazione" di nuovi stati stazionari stabili. Ovvero che "al crescere di r " avviene, in qualche punto dello spazio delle fasi, una "creazione di una coppia di punti fissi" od orbite periodiche, uno stabile e uno instabile, ovvero avviene una "annichilazione" di una tale coppia, *etc.*

Dalla discussione dei §18,19 emerge la seguente visione dell'inizio della turbolenza. Il moto laminare iniziale perde stabilità per successive biforcazioni dalle quali nascono nuovi moti laminari meno simmetrici (ammesso che il sistema possieda simmetrie) che ne assumono, sostituendolo, il ruolo di insiemi attraenti dei moti che iniziano con dati iniziali scelti a caso (con una distribuzione di probabilità dotata di densità rispetto alla misura di volume sullo spazio delle fasi). Ovvero "scompare" dall'elenco degli insiemi attraenti a causa di una collisione con un moto stazionario instabile, ovvero diventa, via una biforcazione, un moto periodico instabile.

Il nuovo moto periodico attrattivo, o ciascuno dei nuovi insiemi attraenti, a loro volta, al crescere del numero di Reynolds r , diviene instabile (e sparisce dall'elenco degli insiemi attraenti). Questo può avvenire in vari modi:

- (1) per "collisione" con un moto periodico instabile (con eventuale passaggio ad un moto caotico (secondo lo scenario dell'intermittenza)
- (2) o per "sdoppiamento", oppure
- (3) dando luogo ad un moto quasi periodico su un toro bidimensionale.

Nel caso (3) il toro bidimensionale evolverà perdendo stabilità e dando luogo ad insiemi attraenti strani (scenario di Ruelle-Takens); e così le orbite periodiche sdoppiate potranno continuare a sdoppiarsi in una successione sempre più rapida (al crescere di r) di biforcazioni con uno scenario di passaggio al caos attraverso una catena di infiniti sdoppiamenti successivi (scenario dello sdoppiamento).

È anche possibile che orbite periodiche stabili o punti fissi (o altri tipi di insiemi attraenti) appaiano in qualche luogo dello spazio delle fasi, contendendo il ruolo di insieme attraente ad insiemi attraenti esistenti in altre regioni dello spazio delle fasi: è il fenomeno chiamato *isteresi* nel §19.

La "contesa" avviene perchè i bacini di attrazione dei vari insiemi attraenti avranno in genere frontiere comuni e, spesso, molto complicate geometricamente; per cui può essere difficile decidere a quale bacino appartenga un dato iniziale, e quindi quale sarà il comportamento a tempi grandi del moto da esso generato.

Ad esempio una coppia di punti fissi o moti periodici, uno stabile e uno

instabile, possono nascere, per un certo valore di r , in qualche regione dello spazio delle fasi ed evolvere in modo simile all'evoluzione della "serie principale", che definiamo informalmente al modo seguente

Definizione (serie principale): Chiameremo "serie" una famiglia di insiemi attraenti parametrizzata dall'intensità r e variante con continuità con r (a causa di possibili biforcazioni ad ogni r corrisponderanno in generale più insiemi attraenti). Una famiglia di punti fissi, orbite periodiche, tori invarianti, altri insiemi invarianti che possono essere seguiti con continuità al variare di r a un insieme attraente che esiste per $r = 0$ sarà chiamata una "serie principale" o "famiglia principale" di biforcazioni, le altre famiglie saranno "serie secondarie".

Osservazione: Di solito ci sarà un' unica famiglia principale perché per $r = 0$ ci sarà un solo punto stazionario globalmente attraente (che chiamiamo "moto laminare").

Non appena esistono due (o più) insiemi attraenti diversi lo spazio delle fasi si divide in regioni che appartengono ai bacini di attrazione dei due insiemi attraenti; e ovviamente sui punti di frontiera dei bacini si avranno fenomeni ulteriori ("difficili da vedere" perché è impossibile porsi esattamente sulla frontiera del dominio di attrazione di un insieme attraente, a meno che non sia determinata da speciali simmetrie del sistema, che ne impongano una forma geometrica semplice).

L'ordine in cui tipi diversi di insiemi attraenti appaiono in una serie di biforcazioni, principale o secondaria, non è necessariamente una successione ordinata di punti fissi prima, quindi orbite periodiche quindi tori invarianti etc: alcuni passi possono mancare e l'ordine cambiare e, anche, essere invertito.

(A) Biforcazioni e loro rappresentazioni grafiche.

È importante trovare un metodo per rappresentare questa fenomenologia in modo da capire con un colpo d'occhio quale sia la situazione che si realizza in un dato caso particolare.

Un metodo conveniente conduce alle seguenti "tavole dinamiche".

Consideriamo la famiglia di punti fissi stabili e di insiemi attraenti che possono essere seguiti con continuità al crescere di r a partire dal moto laminare fondamentale del sistema, che supponiamo per semplicità sempre esistente e globalmente attrattivo per r molto piccolo; cioè consideriamo la "serie principale" di biforcazioni secondo la precedente definizione.

Traceremo in un piano che ha in ascisse l'asse r , un punto su un asse parallelo all'asse r che simbolizzi il moto laminare corrispondente al parametro r . La perdita di stabilità in $r = r_c$ verrà segnata con un punto I nella figura. Il segmento OI sarà denotato F_0 (per "fisso"). Se in r_c si ha una biforcazione con perdita di simmetria, si fanno partire da I due nuove linee, tante quanti i nuovi punti fissi creati, disegnando come linee tratteggiate i punti fissi instabili e come linee continue quelli stabili. L'asse delle ordinate non ha *significato* e il piano è usato solo per avere

spazio per il disegno.

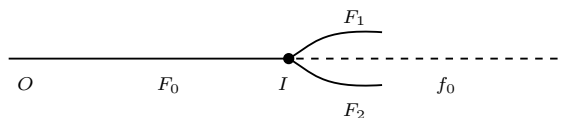


Fig. (20.1): Il segmento OI rappresenta una famiglia di punti fissi che biforca in I con una rottura di simmetria in due punti fissi stabili e uno instabile.

Così da una figura in cui tutte le famiglie di punti fissi collegati fra loro con continuità sono state rappresentate da linee parallele all'asse r si vede subito quanti punti fissi coesistono in corrispondenza di un dato r e da quale "storia" provengono al crescere di r : basta tracciare una retta perpendicolare e contare le intersezioni.

Per continuare in modo sistematico conviene stabilire regole generali di disegno. Useremo i seguenti simboli:



Fig. (20.2) La figura rappresenta una famiglia di punti fissi (F) che evolvono con continuità al variare di r in (r_1, r_2) , o una famiglia di orbite periodiche stabili (O), o di tori invarianti stabili (T), o di insiemi attrattori strani (S), rispettivamente.

per denotare che in corrispondenza dell'intervallo (r_1, r_2) si ha un punto fisso stabile che dipende con continuità da r nel caso F , o un'orbita periodica stabile nel caso O , o un toro invariante percorso con moto quasi periodico nel caso T , o infine un insieme attrattore strano nel caso S .

Gli stessi simboli, a *carattere tratteggiato* saranno usati per denotare analoghi enti instabili. Chiameremo, per brevità, "autovalori" di un punto fisso o di un'orbita periodica gli autovalori della sua matrice di stabilità.

Una biforcazione sarà denotata con un pallino nero, che porterà un indice per distinguerne il *tipo*: ad esempio:

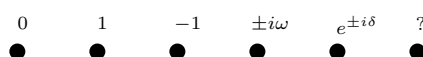


Fig. (20.3) Simboli per vari tipi di biforcazioni.

denoteranno rispettivamente i seguenti casi:

- (1) Caso denotato 0: una perdita di stabilità di un punto fisso per passaggio per 0 di un autovalore reale (di solito con perdita di simmetria e persistenza dell'orbita precedente come orbita instabile), ovvero una creazione (o annichilazione) di una coppia di punti fissi, uno stabile e uno instabile;
- (2) Caso denotato 1: una perdita di stabilità di un'orbita periodica per il passaggio per 1 di un suo autovalore reale con conseguente rottura di una simmetria, o una creazione (o annichilazione) di una coppia di orbite periodiche una stabile e una instabile. Così sul pallino nero della fig. (20.1) andrebbe posto l'indice 0 sopra il punto I .
- (3) Caso denotato -1 : una perdita di stabilità di un'orbita periodica per

il passaggio per -1 di un suo autovalore reale, con conseguente apparizione di un' orbita stabile di periodo circa doppio e persistenza dell' orbita precedente come orbita instabile;

(4) Caso denotato $\pm i\omega$: una perdita di stabilità di un punto fisso per il passaggio attraverso l' asse immaginario di una coppia di autovalori coniugati, con conseguente apparizione di un' orbita periodica stabile e permanenza del punto fisso come punto instabile, oppure con sparizione di un' orbita periodica instabile e conseguente apparizione di un insieme attraente strano attorno all' orbita periodica divenuta instabile;

(5) Caso denotato $e^{\pm i\delta}$: una perdita di stabilità di un' orbita periodica per il passaggio attraverso il cerchio unitario di una coppia di autovalori complessi coniugati, con conseguente apparizione di un toro invariante (stabile o instabile) e permanenza dell' orbita come orbita instabile.

(6) Resta poi spesso qualche biforcazione il cui tipo è difficile da studiare o è ambiguo o altro e sarà denotata apponendo sul pallino un $?$.

Una *punta di freccia* indicherà che la storia di un'orbita o insieme attraente prosegue, al variare del parametro r , nella direzione segnalata dalla freccia potendo, eventualmente, subire altre biforcazioni *che non sono indicate*.

(B) Un esempio: la tavola dinamica per il modello NS_5 .

La discussione dei paragrafi §18 e §19 combinata con le convenzioni grafiche appena stabilite consente di riassumere i risultati teorici sull' equazione (17.30), che sono descritti nei problemi del §17, §19, e quelli sperimentali, ottenuti in [FT], in una *tavola dinamica* che consente immediatamente di formare una visione "globale" della fenomenologia. We recall that the NS_5 , i.e. (17.30), possess a symmetry being invariant under a simple symmetry group with four elements, see §17.@@

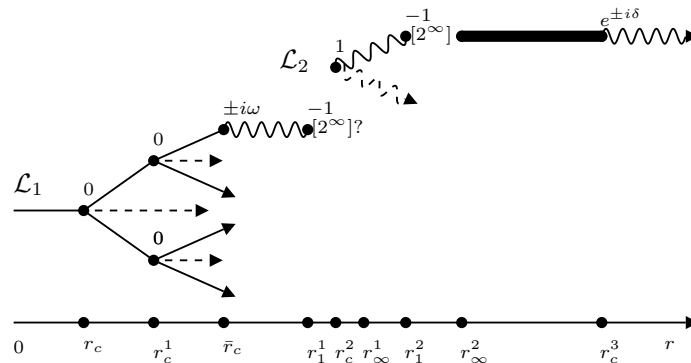


Fig. (20.4): Una tavola dinamica abbastanza dettagliata rappresentante la fenomenologia osservata nel modello NS_5 .

La figura (20.4) illustra, in effetti, la tavola dinamica reale della equazione (17.30), calcolata in [FT] (*c.f.r.* anche i problemi del §17 e §19). I punti r_c, r_c^1 segnati sull'asse delle r sono i valori di soglia delle successive biforcazioni

di perdita di simmetria. Il primo segna la rottura della simmetria (17.31) nel senso che i nuovi punti fissi sono trasformati l'uno nell'altro dalle trasformazioni con $\varepsilon = \pm 1$ ma sono ancora invarianti rispetto al sottogruppo con $\eta = \pm 1$ e $\varepsilon = 1$; a r_c^1 la simmetria è completamente rotta e i 4 punti fissi stabili che emergono per biforcazione dei due precedenti sono distinti e trasformati l'uno nell'altro dalle trasformazioni del gruppo di simmetria.

In \bar{r}_c ognuno dei quattro punti fissi stabili generati dalle biforcazioni precedenti perde stabilità con una biforcazione di Hopf, generando (ognuno) un'orbita periodica stabile (o meglio quattro orbite simmetriche): una di esse è indicata dalla linea ondulata (le altre si otengono da questa applicando le trasformazioni del gruppo di simmetria dell'equazione e sono suggerite dalle frecce).

Questa orbita perde stabilità per sdoppiamento in r_1^1 e segue una successione di infinite biforcazioni di sdoppiamento, indicate con il simbolo $[2^\infty]$. Se ne osservano in realtà *solo tre*, perchè al valore $r_c^2 < r_\infty^1 = \{ \text{valore dove la successione di biforcazioni di sdoppiamento "dovrebbe" accumularsi} \}$ (secondo la teoria di Feigenbaum) si sviluppa un fenomeno di isteresi.

Ossia nasce, in un' *altra regione* dello spazio delle fasi (non lontana, ma distinta, da quella dove si trovano le orbite che al crescere di r subiscono biforcazioni di sdoppiamento), una coppia di orbite periodiche, una stabile e una no, e si ha quindi un fenomeno d'isteresi fra quest'ultima orbita stabile e le precedenti.

Il bacino di attrazione della nuova orbita stabile rapidamente si estende, al crescere di r in un piccolissimo intervallo, ed ingloba la regione dove si dovrebbero trovare le orbite periodiche nate dallo sdoppiamento (che o spariscono o hanno un bacino di attrazione talmente piccino da non essere osservabile). In tal modo la "serie principale" di biforcazioni, denotata \mathcal{L}_1 , termina (ingloriosamente) la sua storia.

Si noti che un sistema come quello in esame che ha varie simmetrie presenta, necessariamente, fenomeni di isteresi quando gli insiemi attraenti non hanno anch'essi piena simmetria. Questo è dunque il caso per $r > \bar{r}_c$: la tavola dinamica in realtà consiste, per $r > \bar{r}_c$, di quattro tavole uguali delle quali una sola è descritta in (20.4) (le altre emergono dalle altre "frecce" associate ai punti fissi stabili. Fra questi 4 insiemi attraenti *coesistenti* hanno luogo naturalmente fenomeni di isteresi. Ma il fenomeno di isteresi fra le linee \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 in (20.4) è di *altra natura*, cioè non è banalmente legato ad una coesistenza di insiemi attraenti simmetrici, perchè nessun elemento della prima serie è immagine, per una trasformazione del gruppo di simmetria, di uno della seconda.

Nella figura (20.4) non sono state segnate le orbite periodiche instabili che restano, come "scia", dopo ognuna delle serie di biforcazioni di sdoppiamento: in realtà per un pò possono essere seguite. Il loro disegno complicherebbe troppo la figura; ma si può immaginare che il simbolo $[2^\infty]$ le includa. Il punto interrogativo che segue $[2^\infty]$ significa che in realtà si osservano solo poche biforcazioni di sdoppiamento perchè ad un certo punto, fra r_c^2 e il valore r_∞^1 (estrapolato dai tre o quattro valori, realmente osservati, delle

biforcazioni di sdoppiamento, sulla base della teoria dell' *universalità* di Feigenbaum) avviene (apparentemente),¹ come detto, la “collisione” fra le orbite stabili prodotte dalla successione di sdoppiamenti e il bacino di attrazione delle orbite periodiche stabili della *nuova serie* \mathcal{L}_2 . E in realtà non si osserva più nulla della famiglia \mathcal{L}_1 .

La nuova serie \mathcal{L}_2 nasce (al crescere di r) con una creazione di una coppia di orbite periodiche, una stabile e una no: seguendo l' orbita stabile si osserva che, per $r = r_1^2$, perde stabilità per sdoppiamento al quale segue una successione di infinite biforcazioni di sdoppiamento di Feigenbaum.

Al termine dell' evoluzione di questa famiglia che ha luogo per $r = r_\infty^2$ ove le soglie successive r_j^2 si accumulano per $j \rightarrow \infty$ (con una progressione geometrica di ragione uguale alla costante di Feigenbaum, 4.68...), si osserva la nascita di un insieme attraente strano, a cui però segue un' orbita periodica stabile.

Quest' ultima, seguita *al decrescere* di r , perde stabilità per $r = r_c^3$ a causa del passaggio di due autovalori complessi per il cerchio unitario *senza* che però nasca un toro invariante: ciò significa che la biforcazione (al decrescere di r) è “inversa” e a $r = r_c^3$ si è potuto osservare che l' orbita periodica che esiste stabile per $r > r_c^3$ ha colliso con un' altra orbita periodica instabile (non rappresentata in figura) che esiste per $r > r_c^3$, almeno se $r - r_c^3$ è piccolo) e che si annichila con quella stabile lasciando (per $r < r_c^3$) un insieme attraente strano su cui ha luogo un moto caotico.

L' insieme delle linee connesse a quella che rappresenta il moto laminare a piccolo numero di Reynolds è la *linea o serie principale* di biforcazione e le altre sono le *serie secondarie* (una sola nel caso della figura (20.4)), se non si contano le altre 3 che esistono a causa della simmetria (17.29) del modello).

La rappresentazione descritta è però, come spesso accade negli esperimenti, numerici o reali, valida solo in prima approssimazione. Affinando le misure si possono invero trovare altri dettagli: ad esempio la zona $[r_\infty^2, r_c^3]$, che appare descritta da un insieme attraente strano nella figura (20.4), si rivela avere una struttura assai più complicata.

Ad esempio si può “risolvere”, con osservazioni molto delicate dal punto di vista sperimentale, c.f.r. [Fr], al modo seguente:

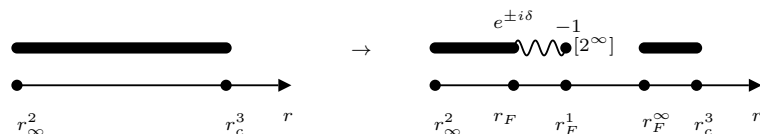


Fig. (20.5): Risoluzione di un intervallo di valori di r ove il moto appare, dapprima, sempre caotico, in regioni ove è ancora caotico e in regioni *minuscole*, (non in scala nella figura) ove esistono orbite periodiche stabili ed evolvono via una rapida successione di biforcazioni di sdoppiamento.

ove la “*finestra*” (descrivente la nascita dell' orbita periodica e le sue successive

¹ Si tenga presente che si stanno discutendo risultati sperimentali.

biforcazioni di Feigenbaum) per $r > r_F \simeq 30$ ha una larghezza veramente piccola dell'ordine di 10^{-2} ! (non in scala nella figura (20.5)) e termina nel punto r_F^∞ di accumulazione delle biforcazioni di sdoppiamento cui segue di nuovo un moto caotico.

(C) *La tavola del modello di Lorenz.*

La tavola dinamica per l'equazione di Lorenz, costruita a partire dai risultati discussi fra i problemi del §17, è più semplice:

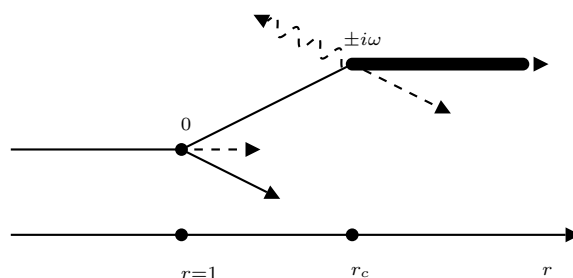


Fig. (20.6): Tavola dinamica del modello di Lorenz rappresentante una rottura di simmetria seguita da una collisione, tra il conseguente punto stazionario e una orbita periodica instabile, che genera moto caotico.

e fa vedere come il moto laminare evolva, al crescere del parametro r , perdendo dapprima simmetria e biforcando, per $r = 1$, in due punti fissi stabili trasformati l'uno nell'altro dal gruppo di simmetria a 2 elementi, *c.f.r.* (17.21). Ognuno di questi perde stabilità, per $r = r_c$ con due autovalori complessi coniugati che passano l'asse immaginario. Però la biforcazione non è “diretta”, cioè i punti fissi non generano un'orbita periodica stabile (*c.f.r.* (20.6) per $r = r_c$); bensì il punto fisso perde stabilità perchè collide con un'orbita periodica instabile (rappresentata dalla linea ondulata tratteggiata). Dopo la perdita di stabilità resta il punto fisso instabile; e non si genera un moto periodico stabile ma, come la figura (20.6) indica, direttamente un moto caotico, ossia un insieme attraente strano (transizione diretta al caos, quarto scenario).

Una più attenta analisi mostra che anche in questo modello esistono intervalli di r in (r_c, ∞) in cui esiste un insieme attraente stabile consistente in un moto periodico che, al variare di r evolve con una successione di biforcazioni di sdoppiamento come nel caso illustrato nella figura (20.5), *c.f.r.* [Fr2].

(D) *Osservazioni.*

Dalla teoria della biforcazione abbiamo visto che alcune biforcazioni non sono generiche: quindi di solito si devono immaginare solo tavole dinamiche in cui appaiono biforcazioni generiche. In questo modo si possono fare solo un numero relativamente piccolo di combinazioni, ad ogni biforcazione. e, ovviamente, ne esistono moltissimi altri, fra i quali la biforcazione della figura (20.1) in assenza di una corrispondente rottura di una qualche simmetria. Alcuni esempi di biforcazioni non generiche, come segue dalla analisi del

§18, sono:

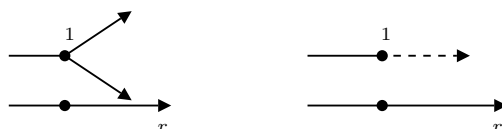


Fig. (20.7): Biforcazioni non generiche “proibite”.

In linea di principio c'è da attendersi che qualsiasi tavola dinamica “generica” sia realizzabile in qualche modello: e infatti la loro varietà è assai grande. Si vedano in proposito i lavori [Fr1],[Fr2], [FT]. Esaminando le tavole dinamiche presentate in questi lavori, si vede con un colpo d'occhio la complessa fenomenologia delle successioni di biforcazioni con vari fenomeni di *isteresi*, ossia di coesistenza di vari insiemi attraenti, in corrispondenza ad un fissato valore di r , come nel caso della figura (20.4) (nell'intervallo fra r_c^2 e r_∞^1).

Si osservano anche molti casi di *risoluzioni* di insiemi attraenti, apparentemente “semplici”, in vari insiemi attraenti che, come nell'esempio della figura (20.5), a volte risultano in strutture assai più complicate di quella della figura (20.4). Ma la maggiore complicazione si manifesta su intervalli assai piccoli di r e può facilmente essere “mancata” se le osservazioni sono poco precise o se eseguite in modo poco sistematico.

Le tavole dinamiche forniscono un modo per visualizzare rapidamente *senza inutili e monotone descrizioni* il quadro generale della fenomenologia di un dato esperimento.²

Non si deve credere che la compilazione delle tavole dinamiche sia semplice *routine*: di solito richiedono e descrivono accurate e pazienti analisi, specie in presenza di fenomeni di isteresi, quando può essere difficile seguire un dato insieme attraente al variare del numero di Reynolds. Ovvero quando si vuol seguire la storia di un insieme attraente che dopo una biforcazione sopravvive ma diviene instabile. Quest'ultima impresa, comprensibilmente assai difficile, si rivela a volte necessaria perchè uno stesso insieme attraente può perdere stabilità in corrispondenza di un certo valore del numero di Reynolds, per poi riacquisirla successivamente in corrispondenza di un altro valore (tipicamente “collidendo” con un altro insieme attraente stabile e “donandogli” la instabilità e prendendone la stabilità, in linguaggio pittorico).

² Non distingueremo più, salvo quando necessario, fra esperimenti numerici o esperimenti eseguiti su fluidi reali: è chiaro che entrambi i tipi di esperimenti sono “reali” e con pari “dignità”.

(E) *Altro esempio: la tavola del modello NS_7 .*

Il modello NS_7 del §17 è stato studiato in dettaglio in [FT] che hanno eseguito misure sufficienti a stabilire la seguente tavola dinamica.

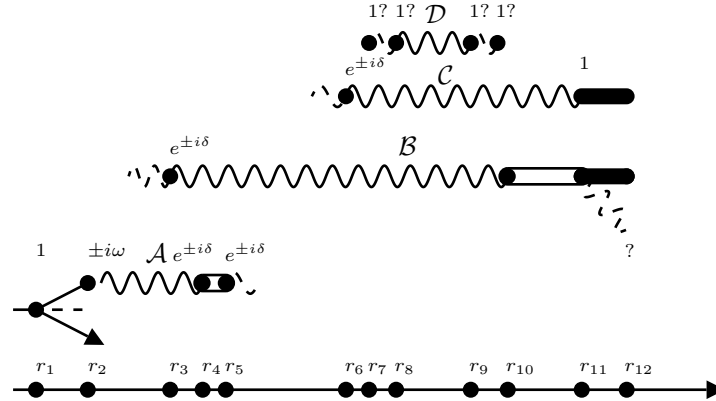


Fig. (20.8) Una tavola dinamica per l'equazione NS_7 . La serie che precede r_1 , "ultima biforcazione con rottura della simmetria" in (17.29), ha la stessa forma di quella che precede r_c^1 in Fig. (20.4).

Si vedono in questa tavola vari fenomeni di isteresi; gli insiemi attraenti strani che nascono a grandi r non sono diversi nel senso che *apparentemente* le linee C e B finiscono entrambe sullo stesso insieme attraente (anche se nella tavola appare disegnato diverso) modulo le simmetrie del modello: si deve infatti sempre tener presente che se un'equazione differenziale ha certe simmetrie allora gli insiemi attraenti o sono simmetrici ovvero gli insiemi che si ottengono applicando la trasformazione di simmetria a uno di essi ne genera un altro (che "ne è copia") con le stesse proprietà. Questo dà luogo a fenomeni d'isteresi ("banali" nel senso descritto nei commenti alla (20.4)).

Non tutte le biforcazioni sono chiare nella tavola (20.8), in particolare quelle della linea D . Le biforcazioni su cui appare l'indicazione del tipo come ? non sono state studiate (perchè resta sempre qualcosa da fare).

Poichè i dettagli che si vedono nelle tavole dinamiche dipendono dalla precisione con cui si eseguono (o meglio si possono eseguire) le misure è chiaro che eseguendo misure più accurate ci si può aspettare qualche cambiamento nel senso dell'apparizione di maggiori dettagli, come già nel caso del modello NS_5 .

(F) *La tavola dell'equazione di NS bidimensionale a piccolo numero di Reynolds.*

Infine concludiamo considerando le tavole dinamiche dell'equazione di NS bidimensionale con regolarizzazione assai alta. Questo delicato studio indica che la fenomenologia che ha luogo a piccoli valori del numero di Reynolds *sembra* stabilizzarsi al crescere del numero di modi di Fourier

considerati.

Fino a numeri di Reynolds dell'ordine di 200 appare che almeno i moti laminari divengono indipendenti da dal valore del taglio ultravioletto M che definisce la regolarizzazione selezionando i soli modi di Fourier tali che $|\underline{k}| = \max(|k_1|, |k_2|) \leq M$.

Consideriamo le tavole dinamiche di queste regolarizzazioni dell'equazione di NS bidimensionale, che denoteremo $NS^{(M)}$, con $M = 26, 37, 50, 64$, tratte da [FGN], da $r = 50$ a circa $r = 180$. La forza agisce su un solo modo $\underline{k} = (2, -1)$ ed è reale. Si studiano solo soluzioni in cui le varie componenti di Fourier $\gamma_{\underline{k}}$ sono o reali o immaginarie pure, estendendo l'osservazione vista al §17, *c.f.r.* (17.27).

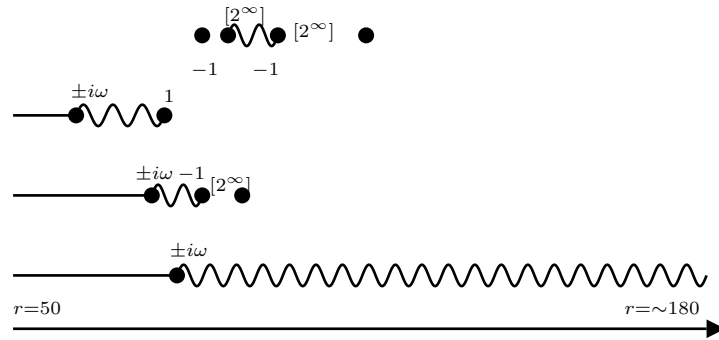


Fig. (20.9): La fenomenologia stabile per le equazioni di NS 2-dimensionali fino a numero di Reynolds ~ 200 e troncate a ordine $M = 26, 37, 50, 64$ (i risultati, però, non dipendono dall'ordine del troncamento).

Le tavole coincidono da $R = 0$ fino a $R = 180$ circa, e quindi è riportata solo quella relativa a $M = 64$ (che consiste in circa 5200 equazioni). La figura illustra un intervallo di r che va da 50 a ~ 180 .

Per valori più grandi si osservano ancora importanti variazioni soprattutto per $r > 200$. In tutti i casi appare prima o poi un moto quasi periodico bidimensionale; però a valori di r che variano fra circa 250 e 600 a secondo del troncamento che si considera.

Per quanto detto al §19, (F), il moto “quasi periodico” dovrebbe apparire fra moti periodici in risonanza (“allacciamento in fase”): il fatto che si osservi di fatto un moto quasi periodico significa, allora, che i gradini della “scala del diavolo” sono talmente corti da non essere osservabili entro la precisione considerata.

Questo fa vedere quanto sia delicato il processo di “convergenza” per $M \rightarrow \infty$ degli insiemi attraenti delle equazioni $NS^{(M)}$ a quelli di NS . E a rigore non sappiamo neppure se questa convergenza abbia effettivamente luogo: la teoria matematica, svolta nel Cap. II, delle equazioni di NS a 2 dimensioni (con condizioni periodiche), sebbene piuttosto completa dal

punto di vista della esistenza, unicità e regolarità, non consente di ottenere risultati asintotici per $t \rightarrow \infty$ ed è quindi di scarsa utilità per le questioni che ci interessano qui.

Problemi.

[1] Sulla base della fenomenologia descritta in [Fr] si disegnano le tavole dinamiche descrivono i moti asintotici dei sistemi considerati in tali lavori.

[2] Si disegnano le tavole dinamiche che descrivono i moti asintotici descritti nel lavoro [Ri].

Bibliografia: I risultati sperimentali qui esposti derivano principalmente da [FT],[FGN];[Fr1],[Fr2], [Ri],[G1]. Le tavole dinamiche sono state introdotte ed ampiamente usate in queste pubblicazioni.

┐

┐

288

§20: Tavole dinamiche

.

┐

┐

§21 *Ordinamento del Caos. La descrizione quantitativa dei moti caotici, prima della turbolenza sviluppata. Spettro continuo.*

Dopo le discussioni dei paragrafi precedenti emerge imperiosa la necessità di trovare metodi quantitativi di studio, o anche semplicemente di descrizione, dei vari fenomeni che ci si aspetta di osservare in esperimenti sui moti dei fluidi.

Questo paragrafo, come parte dei successivi, sarà dedicato alla descrizione di varie quantità misurabili. Poniamo la seguente definizione formale:

1 Definizione (flussi e sistemi dinamici continui):

Si consideri il “sistema dinamico continuo” (o “flusso”) (M, S_t) definito da uno spazio delle fasi M , che supporremo essere una superficie regolare limitata in R^n , e da un gruppo di trasformazioni regolari S_t che generano le soluzioni di un’equazione differenziale su M . Chiameremo osservabile ogni funzione $O : M \rightarrow R$ di $C^\infty(M)$. A volte considereremo anche funzioni O che sono solo regolari (C^∞) a tratti chiamandole osservabili regolari a tratti.¹

Sia $\underline{u} \in M$ un generico punto dello spazio delle fasi e sia $t \rightarrow S_t \underline{u} = \underline{u}(t)$ un moto che o si svolge su un insieme attraente, o che ha asintoticamente tale proprietà. Sia $O(\underline{u})$ un’osservabile, vista al variare di t : ossia si consideri la funzione $t \rightarrow F(t) = O(\underline{u}(t))$, che chiamiamo *la storia* di O sul moto in questione.

Ad esempio se $\underline{u}(\underline{x})$ è il campo di velocità di un fluido un’osservabile tipica² è la componente 1 della velocità in un fissato punto \underline{x}_0 dello spazio: $O(\underline{u}) = u_1(\underline{x}_0)$; e la *storia* di questa osservabile su un dato moto del fluido è la funzione $t \rightarrow F_O(t) = O(\underline{u}(\underline{x}_0, t))$.

Una prima semplice proprietà qualitativa che è interessante associare ad un moto è lo *spettro di potenza* di un’osservabile O . Lo si potrebbe definire come la funzione $p \rightarrow A(p)$:

$$\begin{aligned}
 A(p) &= \lim_{T \rightarrow \infty} A_T(p) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_0^T e^{-ipt} F_O(t) dt \right|^2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt \int_0^T d\tau F_O(t) F_O(\tau) \cos p(t - \tau) = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\vartheta \int_{(-\vartheta) \vee 0}^{T - (\vartheta \vee 0)} d\tau F_O(\tau + \vartheta) F_O(\tau) \cos p\vartheta
 \end{aligned} \tag{21.1}$$

¹ Occasionalmente M potrà essere una superficie in uno spazio di Banach a dimensione infinita quale, ad esempio, $C^\infty(\Omega)$. Se M è uno spazio a dimensione infinita la nozione di osservabile va precisata caso per caso. Ad esempio se M è lo spazio dei campi di classe C^∞ e divergenza nulla richiederemo che fra le osservabili ci siano le funzioni $O(\underline{u})$ che sono esprimibili come polinomi nei valori della \underline{u} , calcolata in un numero finito di punti, o i loro integrali (con pesi regolari) rispetto alle posizioni di questi punti.

² Se il moto del fluido è a dimensione infinita, come nel caso dei moti descritti dall’equazione di NS senza alcun troncamento, si veda la nota ¹ precedente.

ove A e A_T sono qui implicitamente definite e $a \vee b = \max(a, b)$, $a \wedge b = \min(a, b)$. Se esiste il limite:

$$21.2 \quad \Omega(\vartheta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(-\vartheta) \vee 0}^{T - (\vartheta \vee 0)} dt F_O(t + \vartheta) F_O(t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle F_O(\cdot + \vartheta) F_O(\cdot) \rangle \quad (21.2)$$

(che definisce il membro di destra della (21.2)), e se fosse lecito permutare il limite su T e l'integrale su ϑ allora si avrebbe:

$$21.3 \quad A(p) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta \Omega(\vartheta) \cos p\vartheta \quad (21.3)$$

Ma lo scambio di questi limiti è sempre di difficile discussione (anche se “sostanzialmente sempre possibile”) e per evitare le sottili questioni matematiche si adotta di solito la seguente definizione:

2 Definizione (funzioni di correlazione):

Lo spettro di potenza dell'osservabile O sul moto $t \rightarrow u(t)$, è la trasformata di Fourier della “funzione di correlazione” $\Omega(\vartheta) = \langle F_O(\cdot + \vartheta) F_O(\cdot) \rangle$, , (21.3), della storia $F_{O,u}(t) = O(u(t))$.

Per capire l'interesse della nozione è bene studiare dapprima gli spettri di potenza di osservabili su moti quasi periodici.

(A) *Spettri quasi periodici diofantini.*

Un moto quasi periodico è, come abbiamo già più volte ripetuto, un moto che si svolge su un toro regolare a l dimensioni nello spazio delle fasi. È dunque un moto che si svolge su una superficie che ha equazioni parametriche $\underline{\varphi} \rightarrow u = U(\underline{\varphi})$ ove $\underline{\varphi}$ varia su un toro standard a l dimensioni, ossia $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_l)$ è una l -pla di angoli, e U è una funzione di questi angoli, regolare (C^∞ , per fissare le idee) e periodica.

Inoltre l'equazione oraria del moto è una semplice rotazione uniforme degli l angoli: $\underline{\varphi} \rightarrow \underline{\varphi} + \underline{\omega}t$ ove $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_l) \in R^l$ è un vettore a componenti razionalmente indipendenti, (nel senso che se per una l -pla \underline{n} di interi si ha: $\sum_i \omega_i n_i = 0$, allora $\underline{n} \equiv \underline{0}$).

Dunque tutte le osservabili O definite da funzioni regolari (C^∞ per fissare le idee) definite sullo spazio delle fasi M hanno una storia F quasi periodica, ossia una storia che si scrive come $t \rightarrow F(t) = \Phi(\underline{\omega}t)$ con $\Phi(\underline{\varphi})$ funzione regolare e periodica degli l angoli $\underline{\varphi}$.

Si noti che se $l = 1$ il moto è in realtà periodico.

Allora dalla teoria della serie di Fourier si evince immediatamente l'esistenza di coefficienti $\Phi_{\underline{n}}$ tali che:

$$21.4 \quad F(t) = \sum_{\underline{n}} \Phi_{\underline{n}} e^{i\underline{\omega} \cdot \underline{n}t} \quad (21.4)$$

ove \underline{n} è un vettore a componenti intere e i coefficienti $\Phi_{\underline{n}}$ hanno decrescita rapida per $\underline{n} \rightarrow \infty$ (perchè il toro ha equazioni regolari, per ipotesi, e quindi

la funzione $\Phi(\underline{\varphi})$ è altrettanto regolare e, dunque, i coefficienti di Fourier della Φ decadono molto velocemente per $\underline{n} \rightarrow \infty$.

Supponiamo che il vettore $\underline{\omega}$ sia *diofantino*, cioè che esistano due costanti C, γ tali che:

$$21.5 \quad \frac{1}{|\underline{\omega} \cdot \underline{n}|} < C |\underline{n}|^\gamma \quad \text{per ogni } \underline{0} \neq \underline{n} \in Z^l \quad (21.5)$$

ove Z^l denota i vettori a componenti intere in R^l . È noto che tutti i vettori $\underline{\omega} \in R^l$ sono diofantini *ad eccezione di un insieme di volume nullo*, c.f.r. problema [4].

Calcolando l' integrale (21.1) nel caso della (21.4) si trova:

$$\begin{aligned} A(p) &= \lim_{T \rightarrow \infty} A_T(p) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{\underline{n}, \underline{n}' \in Z^l} \Phi_{\underline{n}} \overline{\Phi_{\underline{n}'}} \frac{1}{T} \frac{e^{i(\underline{\omega} \cdot \underline{n} - p)T} - 1}{i(\underline{\omega} \cdot \underline{n} - p)} \frac{e^{-i(\underline{\omega} \cdot \underline{n}' - p)T} - 1}{-i(\underline{\omega} \cdot \underline{n}' - p)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \sum_{\underline{n}, \underline{n}' \in Z^l} \Phi_{\underline{n}} \overline{\Phi_{\underline{n}'}} e^{i\omega \cdot (\underline{n} - \underline{n}') \frac{T}{2}} \frac{1}{T} \frac{\sin(\underline{\omega} \cdot \underline{n} - p) \frac{T}{2}}{(\underline{\omega} \cdot \underline{n} - p)} \frac{\sin(\underline{\omega} \cdot \underline{n}' - p) \frac{T}{2}}{(\underline{\omega} \cdot \underline{n}' - p)} = \\ 21.6 \quad &= \pi \sum_{\underline{n}} |\Phi_{\underline{n}}|^2 \delta(p - \underline{\omega} \cdot \underline{n}) \end{aligned} \quad (21.6)$$

ove δ è la funzione delta di Dirac: se i limiti sono intesi nel senso della teoria delle distribuzioni, c.f.r. problema [5]. Questo segue essenzialmente da: $\frac{1}{T} \left(\frac{\sin x T/2}{x} \right)^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \delta(x)$.³ Quindi

Proposizione: I sistemi con insiemi attraenti E cui i moti si avvicinano con velocità esponenziale (ossia tali che dati iniziali abbastanza vicini si avvicinano in modo che la distanza da E tende a zero esponenzialmente nel tempo) e che sono tori l dimensionali, sui quali i moti sono quasi periodici, danno spettri di potenza che sono una somma di delte di Dirac concentrate sulle “frequenze” $p = \underline{\omega} \cdot \underline{n}$ ove $\underline{n} \in Z^l$ è un vettore intero e $\underline{\omega}$ è lo spettro di frequenza del moto quasi periodico.

Osservazioni':

(1) In pratica si può solo osservare, negli esperimenti, la quantità $A_T(p)$ con $T < \infty$ e, in tal caso, le funzioni δ sono “arrotondate” e il grafico dello spettro di potenza appare come una successione di “picchi” intorno ai valori $p = \underline{\omega} \cdot \underline{n}$.

(2) Si deve anche osservare che se $\underline{\omega}$ sono frequenze indipendenti (come supponiamo, senza ledere la generalità, c.f.r. problema [1]), e se $l > 1$, allora i valori assunti da $\underline{\omega} \cdot \underline{n}$ al variare di \underline{n} riempiono densamente la retta

³ Relazione nota dalla teoria elementare delle serie di Fourier, c.f.r. [Ka] p.12 (teorema di Fejér). Si ottiene notando che $\delta_N(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-N}^N e^{ikx} dk$ tende a $\delta(x)$ per $N \rightarrow \infty$ e quindi anche la sua media $T^{-1} \int_0^T dN \delta_N(x)$ tende a $\delta(x)$.

p . Ma l'ampiezza $|\Phi_{\underline{n}}|^2$ tende a zero molto rapidamente se $\underline{n} \rightarrow \infty$, e quindi l'altezza dei vari picchi è molto disuguale: per la totalità dei picchi, salvo un numero finito di essi, *non è osservabile* a mezzo di misure effettuate con una data precisione. Si osserverà, quindi, solo un piccolo numero di picchi.

(3) Il caso di un moto quasi periodico con una sola frequenza, *ossia un moto periodico*, è ovviamente speciale perchè i picchi sono in questo caso sempre isolati fra loro ed equispaziati, anche se ancora (e per lo stesso motivo) ne saranno visibili solo un numero finito quando la precisione con cui vengono effettuate le misure è limitata.

(4) Il caso di tre o più frequenze indipendenti è da ritenersi poco frequente nel caso di sistemi di equazioni che descrivono moti di fluidi, perchè non generico (*c.f.r.* §18, §19): però si deve fare attenzione (come già osservato al punto (I) del §19) perchè in realtà un fenomeno non generico può avere ciononostante luogo su insiemi molto grandi di valori dei parametri (nello spazio dei parametri di controllo delle equazioni di un sistema) perchè, ad esempio, esistono insiemi di volume positivo, e anche molto grande, che purtuttavia hanno complementare aperto e denso (ma di misura piccola, *c.f.r.* problema [2] and subsection (I) in §19).

Si hanno infatti casi non banali di moti quasi periodici a tre o più frequenze nella teoria dei *moti conservativi*: sono moti importanti, ad esempio, per le applicazioni alla Meccanica Celeste ma sono descritte da equazioni differenziali non generiche (perchè un'equazione hamiltoniana è non generica nello spazio delle equazioni differenziali per moti a un dato numero di gradi di libertà).

In tali sistemi si osservano fenomeni non generici, ma che ciononostante hanno luogo in corrispondenza di insiemi di misura positiva e grande di parametri di controllo, e sono quindi anche facili da osservare. Più facili che i fenomeni che avvengono in corrispondenza dei valori complementari dei parametri di controllo (che invece sono addirittura generici!).

(B) Spettro continuo.

Lo studio dello spettro di potenza può, dunque, essere un metodo efficace per la rivelazione della quasi periodicità di un moto. Nelle applicazioni alla fluidodinamica però ci si deve attendere, per quanto appena detto (ricordando le considerazioni già fatte al §19 sullo scenario di Ruelle e Takens per la transizione alla turbolenza), che lo spettro di potenza rivelerà di solito solo una o due frequenze fondamentali, al più. Qualora il moto divenga un pò più complesso, lo spettro cambierà natura e restando però un indicatore efficace dello sviluppo di moti di altro tipo.

Ricordando che le quantità che chiamiamo osservabili sono funzioni regolari sullo "spazio delle fasi", che supponiamo essere una superficie regolare $M \subset R^n$, poniamo la seguente definizione:

3 Definizione (spettro continuo):

(1) Dato un moto $t \rightarrow x(t)$ si supponga che esista un'osservabile il cui spettro di potenza $A(p)$ risulti essere, per p in un intervallo $[p_1, p_2]$, $p_1 < p_2$ una funzione continua, o almeno integrabile, non nulla. Si dice allora che

il moto ha "spettro con componente continua", o che il moto ha "infinite frequenze".

(2) Ovviamente la proprietà di avere spettro continuo può dipendere dall'osservabile considerata: un moto si dice caotico se esiste anche una sola osservabile a spettro con componente continua.

Se per tutte le osservabili di una classe \mathcal{F} densa in $L_2(M)$ (ove L_2 è inteso nel senso della misura di superficie su M) lo spettro $A(p)$, c.f.r. (21.3), è una funzione localmente in L_1 per $|p| > 0$ si dice che il moto $t \rightarrow x(t)$ ha "spettro continuo" o che il moto è "completamente caotico".

(3) Un sistema si dice a spettro continuo rispetto ad una scelta aleatoria dei dati iniziali con distribuzione μ se con μ probabilità 1 un dato iniziale genera un moto sul quale tutte le osservabili F di una famiglia \mathcal{F} densa in $L_2(M)$ hanno spettro continuo. In un tale sistema, se i dati iniziali sono scelti a caso con distribuzione μ , non è possibile alcuna osservazione che non dia come risultato storie temporali caotiche.

Osservazioni:

(1) Occorre esplicitamente escludere dalla definizione ora data $p = 0$ perchè le osservabili banali (cioè costanti) hanno spettro di potenza proporzionale alla $\delta(p)$ di Dirac; e quindi se $\Omega(\vartheta) \xrightarrow{\vartheta \rightarrow \infty} \Omega(\infty)$ si troverà che $\hat{A}(p)$ è la somma di $\pi \Omega(\infty) \delta(p)$ e di una distribuzione che, nei moti a spettro continuo, è nulla se $p = 0$ ed è una funzione localmente sommabile altrove.

(2) Dato un moto, se tutte le osservabili $F \in \mathcal{F}$ ammettono valor medio (ossia esiste il limite $\langle F \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T F(t) \frac{dt}{T}$) e se per ogni F si ha $\Omega(\infty) = \langle F \rangle^2$ (vedremo che questo è il caso per la maggior parte dei moti dei sistemi mescolanti, c.f.r. §24) si può dire, equivalentemente alla definizione 3, che il moto ha spettro continuo quando tutte le osservabili sono tali che lo spettro di $F - \langle F \rangle$ è localmente L_1 per tutti gli $F \in \mathcal{F}$.

(C) Un esempio: la geometria non euclidea.

L' esempio matematicamente più semplice di moto a spettro continuo è sorprendentemente complicato anche se molto interessante: è fornito da un raggio di luce che si muove in una regione chiusa Δ di un semipiano ($y > 0$ ad esempio) con indice di rifrazione $n(x, y) = \frac{\lambda}{y}$, ove λ è una costante.

Su questo semipiano si immagina che si muovano "raggi luminosi" che procedono a velocità costante $c = 1$ nel senso dell' ottica geometrica: cioè sono tali che nel tempo dt percorrono una distanza ds tale che $n(x, y)ds = dt$ (ossia la velocità della luce è $v = n^{-1}(x, y)$ nel punto (x, y)).

Supporremo che i raggi si propaghino secondo il principio di Fermat: ossia un raggio luminoso che passa per due punti P e Q percorre a velocità 1 una curva che congiunge P con Q sulla quale il cammino ottico definito come il tempo necessario a percorrere tale segmento, $\int n d\ell$ se $d\ell^2 = dx^2 + dy^2$, è stazionario e addirittura minimo su tratti abbastanza corti.

In tal caso i raggi luminosi si possono pensare come vettori unitari rispetto alla metrica $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ e le loro traiettorie di identificano con le geodetiche della geometria associata alla metrica in questione.

È ben noto che le geodetiche di questa metrica sono tutti e soli i semicerchi

con centro sulla retta $y = 0$, incluse le rette $y > 0, x = cost$. Ossia sono i semicerchi ortogonali all'asse $y = 0$ (che in questa metrica è all'infinito, ossia dista infinito da qualsiasi punto con $y > 0$).

Un raggio luminoso in (x, y) può allora essere visto come un punto e una direzione: (x, y, ϑ) , dove ϑ è l'angolo che la direzione del raggio di luce fa con l'asse $y = 0$ ($\vartheta \in [0, 2\pi]$). E nel tempo t si muove in $S_t(x, y, \vartheta) = (x', y', \vartheta')$ ove (x', y') è un punto "opportuno" sul semicerchio centrato sull'asse $y = 0$ e raggio tale da avere per tangente la direzione ϑ e ϑ' è la direzione della tangente a questo cerchio in (x', y') e concorde a quella di ϑ . Il punto "opportuno" è il punto che viene raggiunto a partire da (x, y) muovendosi nella direzione indicata da ϑ e percorrendo un arco il cui cammino ottico sia proprio t . In altre parole i raggi luminosi sono descritti da quello che in geometria si chiama il moto geodetico rispetto alla metrica in questione fissata dal cammino ottico.

Questo sistema dinamico è, tutto sommato, assai semplice e poco interessante perché è chiaro che tutti i moti "vanno all'infinito", un po' come i moti rettilinei uniformi sono relativamente poco interessanti, nel caso analogo della geometria piana.

Però come nella geometria piana possiamo immaginare di "confinare" i moti ad una regione Δ finita (ossia tale che la distanza massima fra due suoi punti, misurata nella metrica $ds^2 = y^2(dx^2 + dy^2)$, è finita). Questo lo si può fare in modo analogo al confinamento dei moti rettilinei uniformi nel caso della geometria euclidea.

Ossia immaginando di imporre condizioni "periodiche" sul bordo di Δ identificano i punti della frontiera di Δ che si trasformano gli uni negli altri a mezzo di trasformazioni opportune (come in un quadrato in R^2 si identificano i lati opposti per costruire un toro, come superficie limitata e priva di singolarità anche la ove erano i bordi del quadrato).

Dunque Δ va pensato come una superficie regolare senza bordo: vedremo che un esempio è fornito (in opportune coordinate, *c.f.r.* [29], [32], [33]) dalla figura in copertina.

Le trasformazioni che identificano i lati opposti di Δ , e Δ stesso, non sono però arbitrarie (come non lo sono nel caso piano in cui hanno come unica soluzione rettangoli con lati opposti identificati da traslazioni a mezzo di vettori interi).

Se si vuole ottenere una superficie realmente liscia e priva di frontiera è quasi evidente che occorre che le trasformazioni che identificano coppie di punti sulla frontiera di Δ formino un sottogruppo discreto del gruppo delle trasformazioni del semipiano che conservano *sia* gli angoli fra le direzioni uscenti da uno stesso punto *sia* la lunghezza del cammino ottico delle curve.

Devono *inoltre* avere la proprietà di trasformare un elemento di linea infinitesimo locato in $(x, y) \in \partial\Delta$ sulla frontiera di Δ e diretto nella direzione ϑ "uscente da Δ " in un elemento di linea infinitesimo per un punto $(x', y') \in \partial\Delta$ e diretto in una direzione ϑ' *entrante in* Δ . Solo in questo modo infatti il sistema dinamico generato da S_t potrà essere pensato come un moto geodetico su una superficie chiusa senza frontiera ottenuta "chiudendo" Δ su se stesso. Queste trasformazioni esistono e si

sono chiamate i movimenti della geometria del semipiano superiore con metrica $ds^2 = y^2(dx^2 + dy^2)$ detta anche *geometria di Lobatchevsky*.⁴

A questo punto si potrebbe addirittura dubitare che sia possibile costruire domini Δ e sottogruppi del gruppo dei movimenti della geometria di Lobatchevsky con le proprietà elencate: dopo tutto nel caso della geometria piana le condizioni sono talmente restrittive da identificare i rettangoli con condizioni periodiche.

Non è difficile però vedere che non solo queste condizioni non sono incompatibili ma che addirittura portano a una famiglia assai vasta di domini Δ la cui frontiera può essere suddivisa in archi i cui punti sono identificabili tramite applicazioni di movimenti della geometria in modo che Δ divenga così una superficie liscia e senza frontiera. La questione è discussa nei problemi dal [29] in poi. A questo punto è possibile citare l'esempio di sistema con moti a spettro continuo

Proposizione: Si consideri uno di questi domini Δ . E si consideri l'evoluzione $t \rightarrow S_t(x, y, \vartheta)$ geodetica sullo spazio a tre dimensioni dei "raggi luminosi intrappolati in Δ dalle condizioni al contorno". I moti così costruiti sono l'analogo dei moti quasi periodici della geometria piana nel caso della geometria di Lobatchevsky. E hanno la proprietà di avere spettro continuo, con l'eccezione di un insieme di moti, ossia di dati iniziali (x, y, ϑ) , che ha volume nullo.

Una dimostrazione che questo sistema ha effettivamente spettro continuo è relativamente semplice e si può basare sulla teoria delle rappresentazioni del gruppo $SL(2, R)$, c.f.r. [GGP], [CEG]: maggiori dettagli possono essere trovati nei problemi [27]÷[42].

L'esempio è certamente non elementare se non si ha un minimo di familiarità con la geometria non Euclidea di Lobatchevsky: ma è altrimenti elementare e intimamente legato allo sforzo di generazioni che hanno lavorato alla comprensione del postulato delle parallele e quindi ha un interesse assai particolare.

(D) *Un altro esempio: il biliardo.*

La relativa complessità dell'esempio precedente non deve far credere che i moti a spettro continuo siano difficili da incontrare in situazioni di interesse fisico. L'esempio più semplice da un punto di vista fisico è in realtà di formulazione immediata: sebbene la teoria matematica e la dimostrazione della continuità dello spettro sia assai più complicata di quella dell'esempio precedente (che discende da note proprietà delle geometrie non euclidee e della teoria dei gruppi).

L'esempio è fornito dal *biliardo*: lo spazio delle fasi è dato dal quadrato $[0, L]^2$ privato di un cerchio ("tavolo con ostacolo") che denoteremo con Q e dal cerchio unitario ("direzione della velocità della pallina del biliardo").

⁴ Tale gruppo consiste delle trasformazioni che hanno la forma $z' = \frac{az+c}{bz+d}$, se $z = x + iy$ e $z' = x' + iy'$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice reale a determinante 1, c.f.r. problemi.

Dunque un punto dello spazio delle fasi M è x, y, ϑ ove $(x, y) \in Q$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Il sistema dinamico è generato dalla trasformazione S_t che muta (x, y, ϑ) in (x', y', ϑ') definito dalla posizione e direzione della velocità che viene ad assumere la “pallina” (cioè un punto materiale) che parte dalla posizione (x, y) con velocità nella direzione ϑ e procede a velocità unitaria. Se nel tempo t la pallina collide con le pareti o con l'ostacolo circolare si deve pensare che venga riflessa elasticamente.

È chiaro che il sistema così descritto ha punti singolari, che corrispondono ai punti dello spazio delle fasi che rappresentano collisioni con gli ostacoli *c.f.r.* anche i problemi [20],[21] del §24. Tecnicamente definisce quindi un sistema dinamico più generale di quelli finora considerati. Vi accenneremo brevemente al §24: tuttavia la nozione di spettro continuo si estende inalterata ai moti di questi sistemi.

Il risultato fondamentale è che in questo sistema dinamico quasi tutti i dati iniziali, rispetto alla misura di Liouville $dx dy d\vartheta$, generano moti a spettro continuo, (*teorema di Sinai*).

Questo esempio è molto elementare ma la dimostrazione che ha spettro continuo nel senso della definizione 3 è invece piuttosto complessa, [S].

Problemi: Teoria ergodica dei moti su superfici a curvatura costante non positiva.

[1] Sia u una funzione di classe C^∞ sul toro T^d e sia $\underline{\omega}$ un vettore a componenti razionalmente dipendenti. Sia \underline{u} la trasformata di Fourier di u . Si faccia vedere che $u(\underline{\omega}t)$ può essere scritto come $v(\underline{\omega}'t)$ con $v \in C^\infty(T^{d'})$, con $T^{d'}$ toro di dimensione inferiore, $d' < d$, e si trovi un'espressione dei coefficienti $\Phi_{\underline{n}}$ in (21.4) per la $F(t) = v(\underline{\omega}'t)$ in termini della trasformata di Fourier di u . (*Idea*: sia $\underline{\omega}'_0 = (\omega'_1, \dots, \omega'_{d'})$ un sottoinsieme massimale di componenti di $\underline{\omega}$ razionalmente indipendenti. Allora esiste un intero N tale che $\omega_j = \frac{1}{N} \underline{n}'_j \cdot \underline{\omega}'_0$ con $\underline{n}'_j, j = 1, \dots, d'$ opportuni vettori a componenti intere. Si ponga poi $\underline{\omega}' = \frac{1}{N} \underline{\omega}'_0$ e si scriva l'espressione in serie di Fourier di $u(\underline{\omega}t)$ rimpiazzando $\underline{\omega}$ con $\underline{\omega}'$, esprimendo $\underline{\omega}$ in termini di $\underline{\omega}'$ come $\omega_j = M_{ji} \omega'_i$, $M_{ji} = (\underline{n}'_j)_i$ e si raccolgano opportunamente i termini).

[2] Si consideri l'intervallo $[0, 1]$ e siano r_1, r_2, \dots i numeri razionali fra 0 e 1 numerati arbitrariamente. Sia U_i l'intervallo di centro r_i e raggio $\varepsilon 2^{-i}$, con $\varepsilon > 0$ prefissato. Si mostri che $\cup_i U_i$ è un insieme aperto denso e di misura non superiore a ε .

[3] Si dimostri che la funzione $A(p)$ in (21.6) tende a 0 per quasi tutti i valori di p . (*Idea*: si considerino i valori di p in un intervallo $I = [-a, a]$. Allora gli intervallini in cui $|p - \underline{\omega} \cdot \underline{n}| < \frac{1}{D|\underline{n}|^{\ell+1}}$ per $\underline{n} \neq 0$ vettore a componenti intere, non nullo, hanno lunghezza totale $\leq \frac{c}{D}$ per c opportuna. Per p fuori di questi intervallini la somma su \underline{n} in (21.6) si stima come: $2T^{-1}c^2D^{-2} \sum_{\underline{n}, \underline{n}'} |\Phi_{\underline{n}}| |\Phi_{\underline{n}'}| |\underline{n}|^{\ell+1} |\underline{n}'|^{\ell+1}$, e quindi tende a zero. Si usi poi l'arbitrarietà di D).

[4] Si consideri la sfera unitaria S_1 in R^ℓ . Si mostri che, fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme dei punti $S_1(\underline{n})$ degli $\underline{\omega} \in S_1$ tali che $|\underline{\omega} \cdot \underline{n}| < \frac{1}{C} |\underline{n}|^{-\ell+1-\varepsilon}$ ha volume $\leq C^{-1} B_\varepsilon$ per un'opportuna costante B_ε . Si deduca da questo che il volume dei punti $\underline{\omega} \in S_1$ che verificano una proprietà diofantina con costanti $C < \infty$ e $\alpha = \ell + \varepsilon$ ha complemento di volume nullo. (*Idea*: Si noti che il volume dell'insieme dei punti di $S_1(\underline{n})$ tali che $|\underline{\omega} \cdot \underline{n}| < C^{-1} |\underline{n}|^{-\ell-\varepsilon+1}$ è $\leq \Omega_\ell C^{-1} |\underline{n}|^{-\ell-\varepsilon}$ per una costante Ω_ℓ opportuna: $\Omega_\ell = 4\pi$ se $\ell = 3$ e $\Omega_\ell = 4$ se $\ell = 2$, (doppio del volume della sfera unitaria in $\ell - 1$ dimensioni.)

[5] Sia $\underline{\omega}$ un vettore “diofantino”, *c.f.r.* (21.5). Si faccia vedere che la funzione definita come la $A(p)$ in (21.6) ma restringendo le somme su $\underline{n}, \underline{n}'$ con il vincolo $\underline{n} \neq \underline{n}'$ tende a

zero nel senso delle distribuzioni. (*Idea*: Si noti che $I = \frac{1}{t} \int_a^b \frac{\sin(p-x)t/2}{p-x} \frac{\sin pt/2}{p} dp$ può essere stimato usando la disuguaglianza $|\sin x| \leq B_\varepsilon |x|^\varepsilon$ per una opportuna $B_\varepsilon > 0$ e ogni x e ogni $\varepsilon \in (0, 1]$. Questo implica che:

$$I \leq B_\varepsilon^2 \frac{1}{(|x|t)^{1-2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(|1-z||z|)^{1-\varepsilon}}$$

Quindi, scegliendo $\varepsilon < \frac{1}{2}$, si vede che il termine generico della serie in (21.6) con $\underline{n} \neq \underline{n}'$, moltiplicato per una funzione $f(p)$ di classe C^∞ e decrescenza rapida e integrato su p , può essere facilmente stimato usando l'ultima disuguaglianza (con $x = \omega \cdot (\underline{n} - \underline{n}')$) da $T^{-(1-2\varepsilon)} \|f\|_{C^1} I C |\underline{n} - \underline{n}'|^{(1-2\varepsilon)\gamma} |\Phi_{\underline{n}}| |\Phi_{\underline{n}'}|$ e quindi tende a zero perchè le $\Phi_{\underline{n}}$ tendono a zero più di ogni potenza.)

- *Teoria ergodica del moto quasi periodico*, ossia del moto geodetico su un toro.

[6]: (*ergodicità delle rotazioni irrazionali*) Sia r irrazionale e sia $Sx = x + r \pmod{1}$ una trasformazione di $M = [0, 1]$ in se. Si mostri che per tutte le funzioni C^∞ periodiche f su M e per tutti gli $x \in M$ vale la seguente relazione di limite holds

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{M}_N(f)(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x + jr) = \int_0^1 f(y) dy \stackrel{def}{=} \bar{f}$$

S' inferisca che, pertanto, se f è solo sommabile, ossia $f \in L_1(M, dx)$ queste relazioni restano valide.

(*Idea*: Si nota che $\xi(\alpha) \stackrel{def}{=} N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\alpha j} = N^{-1} (e^{i\alpha N} - 1) / (e^{i\alpha} - 1)$ if $\alpha \neq 2\pi k$ e $\xi(\alpha) = 1$ altrimenti, e $|\xi(\alpha)| \leq 1$ in ogni caso. Se \hat{f}_ν è la trasformata di Fourier di f si ha

$$\mathcal{M}_N(f)(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu x} N^{-1} (e^{2\pi i \nu N r} - 1) / (e^{2\pi i \nu r} - 1)$$

e l' ν -mo termine è limitato da $|\hat{f}_\nu|$ e al tempo stesso tende a 0 per $N \rightarrow \infty$ se $\nu \neq 0$ è tenuto fisso: quindi il limite di $\mathcal{M}_N(f)$ è \hat{f}_0 .

Posto $\|f\|_{L_1} \stackrel{def}{=} \int_0^1 |f(x)| dx$ otteniamo $\|\mathcal{M}_N(f)\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1}$ e ricordando che le funzioni C^∞ e periodiche sono dense su L_1 , cediamo che se $\|\mathcal{M}_{N_j}(f) - \bar{f}\| \geq \varepsilon > 0$ fosse possibile per una successione $N_j \rightarrow \infty$ allora potremmo approssimare f con una funzione C^∞ periodica φ sì che $\|f - \varphi\|_{L_1} < \varepsilon/3$. Quindi la relazione $\|\mathcal{M}_{N_j}(f) - \bar{f}\|_{L_1} \leq \|\mathcal{M}_{N_j}(\varphi) - \bar{\varphi}\|_{L_1} + 2\varepsilon/3$ si rivelerebbe una contraddizione.)

I problemi che seguono mostrano come sia ben diverso dimostrare che un sistema (M, S, μ) è ergodico dallo studiar bene il comportamento asintotico dei moti del sistema.

[7] Un numero irrazionale r può essere rappresentato dalla sua *frazione continua*, ossia in uno ed in un solo modo come il limite per $k \rightarrow \infty$ di:

$$R_p = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_k}}}} \equiv (a_0, a_1, \dots, a_k)$$

ove $a_j \geq 1$ sono interi positivi.

Si dimostri che se $(a_1, \dots, a_k) = \frac{p'}{q'}$ allora $(a_0, a_1, \dots, a_k) = (a_0 p' + q')/p'$ e si deduca che se $\underline{v}_k = (p_k, q_k) \in Z_+^2$ è tale che $R_k = \frac{p_k}{q_k}$ allora una possibilità per \underline{v}_k è che:

$$\underline{v}_k = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le coppie (p_k, q_k) così costruite si chiamano *i convergenti* della frazione continua del numero r . (*Idea:* se $[x]$ denota la parte intera di x allora $a_0 = [r]$, $a_1 = [(r - a_0)^{-1}]$, etc.)

[8] Si deduca da [7] che $\underline{v}_k = a_k \underline{v}_{k-1} + \underline{v}_{k-2}$, cioè:

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} & k > 1 \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} & k > 1 \end{aligned}$$

e si mostri che q_k, p_k sono crescenti in k e $q_k \geq 2^{(k-1)/2}$ per $k \geq 0$ e $p_k \geq 2^{(k-1)/2}$ per $k \geq 1$. O, meglio, se $c \equiv \min_{i \geq 1} a_i \geq 1$ e $c_k = \max_{1 \leq i \leq k} a_i \geq 1$ allora $(1+c)^{(k-1)/2} \leq p_k, q_k \leq (1+c_k)^{(k-1)/2}$. (*Idea:* $\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

[9] Dedurre alla relazione di ricorrenza in [8] che:

$$\begin{aligned} q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} &= -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^k, & k \geq 2 \\ q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} &= a_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k & k \geq 2 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}, \quad \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-2}} a_k$$

[10] Si deduca dal problema [9] che:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < r < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}, \quad \left| r - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

e si mostri che:

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| r - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

(*Idea:* Se $a, b, c, d > 0$ e $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ allora $\frac{a+sc}{b+sd}$ cresce con s per $s \geq 0$, mentre se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ allora decresce. Quindi se k è pari:

$$\frac{p_{k-2} + s p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}$$

cresce con s e per $s = a_k$ diventa $\frac{p_k}{q_k}$ che è $< r < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ e quindi:

$$\frac{p_k - 2}{q_{k-2}} < \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} < r$$

da cui si evince

$$\left| r - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} \right| > \left| \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} \right| \equiv \frac{1}{q_k(q_{k-2} + q_{k-1})}$$

e per k dispari si procede in modo analogo.)

[11] Si mostri che i numeri p_n, q_n sono relativamente primi per ogni n . (*Idea:* Questo è ovvio per p_0, q_0 , qualunque sia il numero irrazionale considerato. Lo si assuma per p_k, q_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ e per ogni irrazionale r , e si noti che se p', q' sono i convergenti della frazione continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ allora sono primi fra loro. Quindi se j dividesse q_n e p_n allora dividerebbe p', q' , contro l'ipotesi induttiva.)

Definizione: Si dice che un numero razionale p/q è una approssimazione ottima per il numero irrazionale r se per ogni coppia p', q' con $q' < q$ si ha $|q'r - p'| > |qr - p|$.

[12] Siano p, q interi positivi e r irrazionale. Sia j dispari, $\alpha = p/q$, $\alpha_j = p_j/q_j$, e si supponga che $\alpha_{j-1} < \alpha < \alpha_{j+1}$; allora $q > q_j$. (*Idea:* $\alpha_{j-1} > \alpha > \alpha_{j+1} > r > \alpha_j$ e dunque $(q_j q_{j-1})^{-1} > |\alpha_{j-1} - r| > |\alpha_{j-1} - \alpha| = |p_{j-1}q - q_{j-1}p|/qq_{j-1} \geq 1/qq_{j-1}$,

perchè $|p_{j-1}q - q_{j-1}p| \geq 1$). Si formuli e dimostri l' affermazione analoga per j pari facendo vedere che i due risultati possono essere riassunti dicendo che se p/q è compreso fra due convergenti di ordine $j-1$ e $j+1$ allora $q > q_j$).

[13] Nel contesto del problema [12] si mostri che se α non è un convergente e $\alpha_{j-1} < \alpha < \alpha_{j+1}$ allora $|r - \alpha_j| < |r - \alpha|$; un risultato simile vale per j even. (*Idea*: $q|\alpha - r| > q|\alpha - \alpha_{j+1}| = q|pq_{j+1} - qp_{j+1}|/qq_{j+1} \geq 1/q_{j+1} \geq q_j|\alpha_j - r|$).

[14] Si mostri che [11,12,13] implicano che se p/q è un' approssimazione a r tale che $|q'r - p'| > |qr - p|$ per tutti i valori di $q' < q$ allora $q = q_j$, $p = p_j$ per qualche j . In altre parole ogni approssimante ottimo è un convergente.

[15] Si mostri che se r è irrazionale ogni convergente è un approssimante ottimo. (*Idea*: altrimenti si dovrebbe avere che per qualche n esiste p e $q < q_n$ con $|rq - p| < |rq_n - p_n| = \varepsilon_n$; sia \bar{p}, \bar{q} la coppia che minimizza l' espressione $|q'r - p'|$ con $q' < q_n$; se $\bar{\varepsilon}$ è il valore del minimo si ha: $\bar{\varepsilon} < \varepsilon_n$; dunque \bar{p}/\bar{q} è un approssimazione ottima: pertanto $\bar{p} = p_s, \bar{q} = q_s$ per qualche $s < q_n$ e $1/(q_s + q_{(s+1)}) \leq |q_s r - p_s| \leq |q_n r - p_n| < 1/q_{n+1}$, cioè $q_s + q_{s+1} > q_{n+1}$ che contraddice $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$).

[16] Una condizione necessaria e sufficiente perchè un' approssimazione razionale ad un numero irrazionale sia un' approssimazione ottima è che sia un convergente della frazione continua di r . (*Idea*: riassume i problemi precedenti.)

[17] Si mostri che se $q_{n-1} < q < q_n$ allora $|qr - p| > |q_{n-1}r - p_{n-1}|$. (*Idea*: altrimenti se il minimo $\bar{\varepsilon} = \min |qr - p|$ su $q_{n-1} < q < q_n$ e su p fosse raggiunto per qualche \bar{q}, \bar{p} allora \bar{p}/\bar{q} sarebbe un' approssimazione ottima). Si mostri che questo può essere interpretato dicendo che il grafico della funzione $\eta(q) = \min_p |qr - p|$ è al di sopra di quello della funzione $\eta_0(q) = \varepsilon_n = |q_n r - p_n|$ per $q_n < q < q_{n+1}$.

[18] Sia n pari: il punto $q_n r$ mod 1 può essere rappresentato, pensando l' intervallo $[0, 1]$ come un cerchio di raggio $1/2\pi$, come un punto spostato di ε_n a destra di 0, mentre $q_{n-1}r$ può essere pensato come un punto a sinistra di 0 di ε_{n-1} . Si mostri che i punti qr con $q_n < q < q_{n+1}$ non sono nell' intervallo $[0, \varepsilon_{n-1}]$ a meno che q/q_n sia un intero $\leq a_{n+1}$. Inoltre si mostri che il punto $a_{n+1}q_n r$ è più vicino di ε_n a ε_{n-1} , e che la successiva posizione più vicina a 0 avviene quando si considera la "rotazione" di $(q_n a_{n+1} + q_{n-1})r \equiv q_{n+1}r$; ed è a sinistra di 0 e a una distanza ε_{n+1} da esso. Si mostriche questo fornisce una interpretazione naturale dei numeri a_j della frazione continua del numero r pensato come una rotazione del cerchio $[0, 1]$, e al tempo stesso un' interpretazione geometrica della relazione $a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$.

[19] Si mostri che la funzione $\varepsilon(T) = \text{massimo intervallo fra i punti aventi la forma } nr \text{ mod } 1, n = 1, 0, \dots, T$ è:

$$\begin{array}{ll} q_n \leq T < q_n + q_{n-1} & \varepsilon_{n-1} \\ q_n + q_{n-1} \leq T < 2q_n + q_{n-1} & \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \\ \dots & \\ (a_{n+1} - 1)q_n \leq T < a_{n+1}q_n + q_{n-1} \equiv q_{n+1} & \varepsilon_{n-1} - (a_{n+1} - 1)\varepsilon_n \end{array}$$

e come applicazione si disegni il grafico di $\varepsilon(T)$ e della funzione inversa $T(\varepsilon)$ per il numero d' oro, cioè il numero con $a_j \equiv 1$. Si faccia il grafico (qualitativo) di $-\log \varepsilon(T)$ in funzione di $\log T$. (*Idea*: questa è semplicemente un' altra interpretazione di [18].)

[20] Si mostri che se le cifre a_j del numero irrazionale r sono uniformemente limitate da N allora la crescita di q_n è limitata da un esponenziale in n (e si può stimare q_n con una costante per $[(N + (N^2 + 4)^{1/2})/2]^n$). Viceversa una stima esponenziale può valere solo se le cifre della frazione continua sono uniformememnte limitate. (*Idea*: si calcoli la crescita dei convergenti del numero con frazione continua con cifre tutte uguali a N , che è evidentemente una stima superiore.)

[21] Si mostri che se la disuguaglianza: $|q_n r - p_n| > 1/Cq_n$ vale per tutti gli n e per un' opportuna costante C allora q_n non può crescere più velocemente di un esponenziale in

n. (*Idea:* [10] implica la disuguaglianza $1/Cq_n < 1/q_{n+1}$.)

[22] Si mostri che se un numero ha una frazione continua con cifre ripetute in modo definitivamente periodico allora è un numero che verifica un'equazione quadratica a coefficienti interi.

[23] (Euclide) Si supponga che per certi interi a, b, c sia $ar^2 + br + c = 0$. Si osservi che il problema [8] mostra che il numero $r_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$ verifica $r = (p_{n-1}r_n + p_{n-2})/(q_{n-1}r_n + q_{n-2})$. Sostituendo questa espressione nell'equazione per r si trova che r_n verifica un'equazione che ha la forma $A_nr_n^2 + B_nr_n + C_n = 0$. Si verifichi, per calcolo diretto, di A_n, B_n, C_n che:

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ C_n &= A_{n-1} \\ B_n^2 - 4A_nC_n &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Si mostri che $|A_n|, |B_n|, |C_n|$ sono uniformemente limitate da $H = 2(2|a|r + |b| + |a|) + |b|$. (*Idea:* è sufficiente trovare una stima per $|A_n|$. Si scriva $A_n = q_{n-1}^2(a(p_{n-1}/q_{n-1})^2 + b(p_{n-1}/q_{n-1}) + c)$ e si usi che $|r - p_{n-1}/q_{n-1}| < 1/q_{n-1}^2$ e $ar^2 + br + c = 0$).

[24] (Euclide) Si mostri che le cifre della frazione continua di un irrazionale quadratico sono definitivamente periodiche perchè, in virtù dei risultati del problema [23], i numeri r_n possono assumere solo un numero finito di valori. Si mostri che, se H è la costante introdotta in [23], la lunghezza del periodo della frazione continua può essere limitata da $2(2H+1)^3$ e che la parte periodica deve iniziare dalla cifra j -ma con $j \leq 2(2H+1)^3$.

[25]: Si calcoli la frazione continua della soluzione > 0 dell'equazione $x = \frac{1}{1+x}$ (*sezione aurea*) e quella del numero $\sqrt{2}$. Si stimi in funzione di $\varepsilon > 0$ il valore di N necessario affinché un qualsiasi punto nell'intervallo $[0, 1]$ abbia entro una distanza $\varepsilon > 0$ un punto delle successioni $x_n = [nr]$ con $n \leq N$ con r uguale alla sezione aurea o al numero di Pitagora.

[26]: (a) Sia $\underline{\omega} \in R^l$ un vettore che verifica la proprietà diofantina: $|\underline{\omega} \cdot \underline{\nu}| > C_0^{-1}|\underline{\nu}|^{-\tau}$ per $|\underline{\nu}| > 0, \underline{\nu} \in Z^\ell$ and for suitable constants C_0, τ . Show that there is a constant γ_ℓ tale che il moto quasi periodico su $T^\ell, t \rightarrow \underline{\omega}t$, avrà visitato entro un tempo $T < \gamma_\ell C_0 \varepsilon^{-(\ell+\tau+1)}$ tutte le possibili scatole con lato ε . Si mostri che questo può essere interpretato dicendo che C_0 è una *scala di tempo* che cadenza il riempimento del toro T^ℓ da parte del moto $t \rightarrow \underline{\omega}t$; mentre τ è legato al numero di unità di C_0 che è necessario perché il moto visiti tutte le scatole quadrate di taglia ε . (*Idea:* Sia $\chi(\underline{x})$ una funzione C^∞ non negativa su R^ℓ che si annulla fuori del cubo unitario e con integrale 1. Si definisca la funzione su T^l $\chi_\varepsilon(\underline{\psi}) = \varepsilon^{-l}\chi(\underline{\psi}\varepsilon^{-1})$ per $|\psi_j| < \varepsilon \bmod 2\pi$ e 0 altrimenti. Then χ_ε is a C^∞ periodic function on T^l . Allora χ_ε è una funzione periodica di classe C^∞ su T^l . La sua trasformata di Fourier è tale che $\hat{\chi}_{\varepsilon 0} \equiv 1$ e $|\hat{\chi}_{\varepsilon \underline{\nu}}| \leq \Gamma_\alpha \varepsilon^{-\alpha} |\underline{\nu}|^{-\alpha}$ per ogni $\underline{\nu} \neq 0$ e per ogni $\alpha \geq 0$, con Γ_α costanti. Allora si noti che una scatola intorno a $\underline{\psi}_0$ sarà stata visitata prima del tempo T se $T^{-1} \int_0^T \chi_\varepsilon(\underline{\omega}t - \underline{\psi}_0) dt > 0$. Si usi $I \geq 1 - T^{-1} 2C_0 \varepsilon^{-\alpha} \sum_{\underline{\nu} \neq 0} \Gamma_\alpha |\underline{\nu}|^{\tau-\alpha}$ scegliendo $\alpha > l + \tau$.)

(b) Si mostri che se $\ell = 2$ e $\tau = 1$ la quantità $l + 1 + \tau = 4$ in (a) può essere sostituita da 2. Più in generale $l + \tau + 1$ può essere sostituito da $l - 1 + \tau$. Ciò significa che il tempo T in (a) può essere scelto $T = \gamma_l C_0 \varepsilon^{-(l+\tau-1)}$. (*Idea:* Si sostituisca la funzione χ con una funzione x definita diversamente: siano $\chi(x), \chi_\perp(x)$ funzioni C^∞ su R , pari e strettamente positive per $|x| < \frac{1}{2}\pi$, nulle altrove e con integrale 1. Sia $\underline{\psi}, \underline{\psi}_0 \in T^d$ e $x(\underline{\psi}) \stackrel{def}{=} \varepsilon^{-(d-1)} \chi(\underline{\omega} \cdot (\underline{\psi} - \underline{\psi}_0)/|\underline{\omega}|) \cdot \chi(\varepsilon^{-1} |P^\perp(\underline{\psi} - \underline{\psi}_0)|)$, $P^\perp =$ proiezione ortogonale sul piano ortogonale a $\underline{\omega}$. Se x è pensata come funzione periodica su T^d siano $\hat{\chi}(\sigma), \hat{\chi}_\perp$ le trasformate di Fourier di χ, χ_\perp pensate come funzioni su R allora la trasformata di Fourier di x è $\hat{\chi}(\nu^\parallel) \hat{\chi}(\varepsilon |\underline{\nu}^\perp|)$, con $\underline{\nu}$ vettore intero e $\nu^\parallel = \underline{\omega} \cdot \underline{\nu}/|\underline{\omega}|, \underline{\nu}^\perp = P^\perp \underline{\nu}$. La media $X = \overline{T}^{-1} \int_0^T x(\underline{\omega}t) dt$ è:

$$X = 1 + \sum_{\underline{\nu} \neq \underline{0}} \hat{x}(\underline{\nu}) e^{-i\psi_0 \cdot \underline{\nu}} \frac{1}{T} \frac{e^{i\omega \cdot \underline{\nu} T} - 1}{i\omega \cdot \underline{\nu}} \geq 1 - \frac{2C}{T} \sum_{\underline{\nu} \neq \underline{0}} \left| \hat{x}(\underline{\nu}) \hat{x}(\varepsilon |\underline{\nu}^\perp|) \right| |\underline{\nu}|^\tau$$

Poiché l'ultima somma è stimata superiormente da $b\varepsilon^{-(\tau+d-1)}$ la media X è positiva, e.g. $> \frac{1}{2}$, per tutti i ψ_0 se $T > 4bC\varepsilon^{-(\tau+d-1)}$. Quindi per $T > 4bC\varepsilon^{-(\tau+d-1)} + \pi/|\underline{\omega}|$, ossia per tutti i tempi $T > BC\varepsilon^{-(\tau+d-1)}$ con B opportuno, dipendente solo da d , il toro sarà stato riempito entro una distanza ε da ogni suo punto.)

(c) Si noti che la stima in (b) $\overline{T} > O(\varepsilon^{-\tau-(d-1)})$ in realtà stima un'altra quantità, diversa dal minimo tempo di visita. È una stima del minimo tempo oltre il quale tutti i rettangoli con un lato parallelo a $\underline{\omega}$ di lunghezza (diciamo) 1 e base di raggio ε non solo sono stati visitati con una frequenza che è, per tutti, più grande di $\frac{1}{2}$ del valore asintotico (uguale a ε^{d-1}). Sebbene credo che questa sia una stima ottimale si può mostrare che il valore ottimale per il tempo di prima visita è invece inferiore e stimabile come $\varepsilon^{-\tau}$, see [BGW].

Estensione agli omeomorfismi del cerchio.

[28]: Si sviluppi un algoritmo, analogo a quello sopra discusso per la costruzione della frazione continua di un numero, per costruire il numero di rotazione di una trasformazione di R definita da $\alpha \rightarrow g(\alpha)$ con g continua, crescente e tale che $g(\alpha + 2\pi) = g(\alpha) + 2\pi$, cosicché può essere interpretata come una trasformazione continua e invertibile con inversa continua del cerchio $[0, 2\pi]$. (*Idea:* Si supponga $0 < g(0) < 2\pi$ oer semplicità. Costruiamo una successione $q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_1, \dots$ come segue. Sia $a_1 \geq 1$ l'intero più grande per cui $g^{a_1 q_0 + q_{-1}}(0) \equiv g^{a_1}(0) < 2\pi$ per $a = 1, 2, \dots, a_1$; diciamo che $x_1 = g^{a_1 q_0 + q_{-1}}(0)$ vicino a 2π "a ordine 1". Poniamo $q_1 = a_1 + q_0$ e iniziando da $g^{q_0}(0)$ applichiamo la trasformazione g^{q_1} e le sue iterate: le quali tutte cadranno nell'arco $[0, g^{q_0}(0)]$ fino a che non si raggiunga un valore massimo a_2 di iterazioni. Allora diciamo che $x_2 = g^{a_2 q_1 + q_0}$ è vicino a 2π "a ordine 2". Similmente a partire da $g^{q_1}(0)$ applichiamo iterate di g^{q_2} fino a raggiungere un punto x_3 che sarà vicino a 2π "a ordine 3". E continuiamo: e il procedimento non si arresta mai a meno che il punto $x_{k-1} = g^{q_{k-1}}$ vicino a 2π all'ordine $k-1$, per qualche k , abbia $a_{k+1} = +\infty$. In questo caso $g^{a_{k+1} q_k}(x_{k-1})$ ha un limite per $a \rightarrow \infty$ che si verifica facilmente essere un punto periodico con periodo q_k . Sia a_1, a_2, \dots la successione così costruita (che è infinita a meno che uno dei suoi valori $a_k = +\infty$ per qualche k). E definiamo $\rho = (0, a_1, a_2, \dots)$ il valore della frazione continua caon a_j come cifre (avendo posto $a_0 = 0$), c.f.r. [5]. Allora per le proprietà delle frazioni continue discusse nei problemi precedenti segue che anche ωq_k è una successione di approssimanti di 2π e, inoltre, $|g^{q_k} - q_k 2\pi \rho| < x_0 < 2\pi$ così che $q_k^{-1} g^{q_k}(0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \rho$ e ρ è il numero di rotazione dell'omeomorfismo g .)

[29]: Nel contesto del problema precedente si mostri che il numero di rotazione $\rho(g)$ di una trasformazione g del cerchio, con le proprietà in [5.1.28], cioè una trasformazione che è spesso chiamata un "omeomorfismo" del cerchio è continuo in g nel senso che se $d(g_n, g) = \|g_n - g\| \stackrel{def}{=} \max_{\alpha \in [0, 2\pi]} |g_n(\alpha) - g(\alpha)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ allora $\rho(g_n) \rightarrow \rho(g)$. (*Idea:* Questo è implicato immediatamente dalla costruzione di $\rho(g)$ in [5.1.28].)

Teoria ergodica del moto geodetico su superfici a curvatura negativa costante.

[30] Si verifichi che le trasformazioni del piano complesso $z = x + iy \rightarrow z' = x' + iy'$ definite da $z' = \frac{az+c}{bz+d}$ con a, b, c, d complessi e $ad - bc = 1$ (*omografie piane*) trasformano cerchi in cerchi, e conservano gli angoli. Inoltre se a, b, c, d sono reali trasforma il piano di Lobatchevsky in se e conserva le distanze di Lobatchevsky, cioè $y'^{-1}|dz'| = y^{-1}|dz|$. (*Idea:* Si noti che:

$$z' = \frac{a}{b} \frac{(zb + bc/a)}{zb + d} = \frac{a}{b} - \frac{(ad - bc)/b^2}{z + d/b}$$

e quindi basta verificare che la trasformazione $z' = R^2/z$, $R > 0$, trasforma cerchi in cerchi.)

[31] Una *riflessione* rispetto ad un cerchio C di centro O e raggio R è la trasformazione

che trasforma un punto P a distanza d da O nel punto P' che si trova sulla semiretta $OP \infty$ a distanza $d' = R^2/d$ da O . Si verifichi che ogni omografia piana è una trasformazione che può essere rappresentata come il prodotto di una riflessione rispetto ad un cerchio C_1 e di un'altra rispetto ad un cerchio C_2 . Uno dei due cerchi può essere sempre scelto di raggio infinito (cioè una retta). (*Idea*: si noti che la trasformazione $z' = R^2/z$ è la composizione della riflessione $z' = -\bar{z}$ rispetto all'asse immaginario e della riflessione $z' = (\bar{z})^{-1}$ rispetto al cerchio di raggio R e centro nell'origine, c.f.r. (*) in [30].)

[32] Si verifichino le seguenti affermazioni. L'omografia $z' = \frac{z-i}{z+i}$ trasforma il semipiano superiore del piano complesso nel disco unitario, inviando i nell'origine e l'asse reale nel cerchio unitario $|z'| = 1$. La metrica $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ (metrica di Lobatchevsky) diventa $\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$ (metrica di Poincaré). Il gruppo G delle omografie $z' = \frac{az+c}{\bar{c}z+a}$, con a, c complessi e $|a|^2 - |c|^2 = 1$, è il gruppo dei movimenti rigidi della metrica di Poincaré. Quindi il gruppo $SL(2, R)$ e il gruppo G sono isomorfi: si realizzi esplicitamente l'isomorfismo.

[33] Le geodetiche della metrica di Poincaré sono cerchi ortogonali al cerchio unitario. (*Idea*: le semirette ortogonali all'asse reale sono evidentemente geodetiche per la metrica di Lobatchevsky; e le omografie reali piane, ossia gli elementi di $SL(2, R)$, lasciano la metrica di Lobatchevsky invariante e trasformano le semirette in questione in semicerchi ortogonali all'asse reale; nel caso della metrica di Poincaré il ruolo delle semirette ortogonali all'asse reale è preso dai diametri del disco unitario).

[34] Si disegni un cerchio e in esso gli otto raggi con angoli $j\pi/4$. Si scelgano sulle bisettrici degli otto spicchi otto punti c_j , $j = 0, \dots, 7$ e da essi si traccino otto cerchi di raggio ρ che taglino i lati degli spicchi formando con essi un angolo $\frac{\pi}{8}$ in un punto a distanza λ da O : si chiami ξ la distanza di tali centri da O . Si noti che il cerchio di centro O e raggio $R = \sqrt{\xi^2 - \rho^2}$ è ortogonale agli otto cerchi già tracciati. Si calcolino λ, ρ, ξ se $R = 1$. (*Idea*: $\lambda = 2^{-1/4}$, $\rho = \lambda(2 + \sqrt{2})^{-1/2}$, $\xi = \lambda(\frac{2+\sqrt{2}}{2})^{1/2}$)

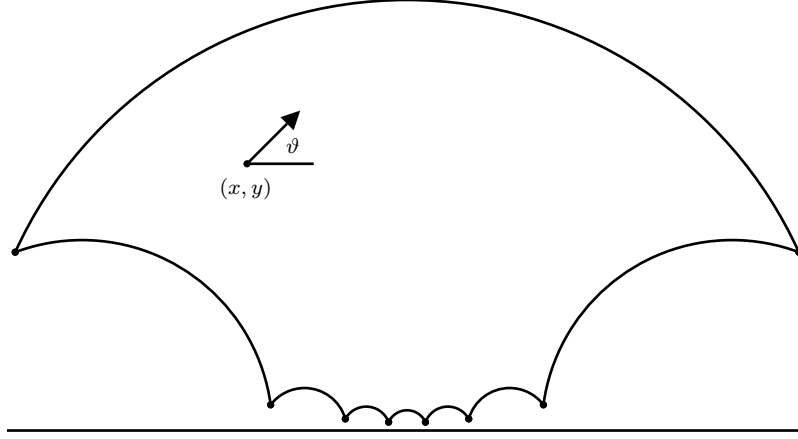
[35] Si consideri la figura ottagonale ritagliata nel cerchio di raggio $R = 1$. Numerando i suoi archi di cerchio consecutivamente da 0 a 7 si noti che riflettendo la figura intorno ad uno dei suoi lati L_j (nel senso di [34]) si ottiene una figura ottagonale con angoli al vertice ancora $\pi/4$ e contenuta nel cerchio unitario: vettori "uscenti" dall'"ottagono" diventano vettori "uscenti" dalla nuova figura. Si costruisca con la riga e il compasso la figura in questione (ossia l'ottagono). Si scriva poi un programma che disegni la figura in questione e le sue riflessi rispetto agli otto "lati" che ne delimitano la frontiera: si constati che ne emerge una figura magica assai nota. (*Idea*: Il risultato è la figura in copertina)

[36] Riflettendo la figura ottagonale ottenuta in [35] rispetto al diametro del cerchio "parallelo" al lato L_j e poi riflettendo ancora il risultato rispetto al cerchio che contiene il lato opposto a L_j si ottiene una omografia piana che consente di identificare il lato considerato con il lato opposto dell'ottagono (si noti che la sola riflessione *non* è sufficiente perchè non è un'omografia e perchè trasforma un vettore uscente da L_j in un vettore *uscente* dal lato opposto: cioè l'identificazione non può essere considerata come generante una superficie senza frontiera come invece le due riflessioni considerate fanno).

Se si considera il gruppo delle omografie generato eseguendo per ogni lato le operazioni descritte si ottiene un sottogruppo Γ_8 del gruppo delle isometrie della metrica di Poincaré. Identificando punti della frontiera dell'ottagono Σ_8 , modulo le trasformazioni del gruppo Γ_8 , e immaginandolo come superficie con la metrica indotta dalla metrica di Poincaré, l'ottagono diventa una superficie chiusa regolare. Si verifichi che dal punto di vista topologico tale superficie è una *ciambella con due buchi*.

[37] L'ottagono e il suo gruppo Γ_8 possono essere pensati come una figura nel semipiano di Lobachevsky e come un sottogruppo del gruppo $SL_2(R)$ dei movimenti di questa geometria (semplicemente usando l'isometria fra disco di Poincaré e piano di Lobachevsky vista in [31]). Li chiameremo con lo stesso nome Σ_8 e Γ_8 . Si disegni l'ottagono Σ_8 come una figura nel piano di Lobachevsky (con riga e compasso ovvero anche usando un

calcolatore: il risultato sarà la seguente figura (e si ammetta che ha meno fascino di quella in copertina)).



[38] Si consideri il gruppo Γ_8 dell' ottagono. Sia $GL_2(R)$ il gruppo delle matrici reali $g = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$ a determinante $\det g = pq - p'q'$. Considerando le variabili p, q e p', q' come variabili canoniche coniugate si faccia vedere che il flusso su $GL_2(R)$ generato dall' hamiltoniana $H(g) = \frac{1}{8}(\det g)^2$ è $t \rightarrow ge^{\frac{1}{4}(\det g)\sigma t}$ se $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mentre la velocità (misurata nella metrica di Σ_8 è $v = \frac{1}{2} \det g$ (c.f.r. §2 of [CEG]).

[39] Se (x, y) , $y > 0$, è un punto del piano di Lobachevsky e se (v_x, v_y) è una velocità di un punto materiale in (x, y) (di modulo $|v| = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}/y$) allora esiste un' unica matrice $g = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ che applicata a $z_0 = (0, 1) = i$ lo trasforma in $z = x + iy = zg = \frac{pz+p'}{qz+q'}$ e al tempo stesso trasforma la velocità $\underline{v}_0 = (0, 1)$ nella velocità $\underline{v} = (v_x, v_y)$. Si mostri che identificando (x, y, v_x, v_y) con g il flusso geodetico sul piano di Lobachevsky si identifica con il flusso del problema [38] su $GL_2(R)$.

[40] Se $g_0 \in \Gamma_8$ e se si identificano i punti $g \in GL_2(R)$ e g_0g ("identificazione modulo Γ_8 ") si ottiene una superficie che può essere identificata con lo spazio dei punti e dei vettori tangenti alla superficie Σ_8 : dunque il flusso geodetico su Σ_8 è semplicemente $g \rightarrow ge^{\frac{1}{2}\sigma t}$. Inoltre la superficie di energia 1 può essere identificata con lo spazio delle matrici $g \in SL_2(R)$ a determinante 1 modulo Γ_8 . Questa superficie sarà denotata $\Sigma_{8,1}$. Si verifichi anche che la misura di Liouville è $\mu(dg) = \delta(\det g - 1) dp dq dp' dq'$, e che è una misura invariante rispetto all' azione di $SL(2, R)$: $\mu(E) \equiv \mu(Eg)$ per ogni $g \in SL(2, R)$.

[41] Sia $F \in L_2(\Sigma_{8,1}, \mu)$, con μ definita in [40] (se F è regolare si deve avere $F(g_0g) = F(g)$ per tutti gli elementi $g_0 \in \Gamma_8$). Si può definire una rappresentazione del gruppo $SL_2(R)$ su L_2 associata a $\Sigma_{8,1}$ via: $g \rightarrow U(g)$ con $U(g)F(g') = F(g'g)$. Si mostri che questa trasformazione è unitaria perchè la misura μ è invariante. E quindi l' evoluzione del flusso geodetico può essere vista come una trasformazione unitaria su $L_2(\Sigma_{8,1}, \mu)$: si verifichi infatti che $F(ge^{\frac{1}{2}\sigma t})$ è unitaria.

[42] Più in generale si definisca $U(g)f(g') = f(g'g)$ per $f \in L_2(\Sigma_{8,1}, \mu)$ e si verifichi che questa è una rappresentazione unitaria di $SL(2, R)$. Si può dimostrare che la compattezza di $\Sigma_{8,1}$ implica che questa rappresentazione è *riducibile*, cioè è decomponibile in somma diretta di rappresentazioni irriducibili unitarie, c.f.r. [GGP].

[43] Si dimostri che per le rappresentazioni irriducibili unitarie di $SL_2(R)$ su $L_2(\Sigma_{8,1}, \mu)$ la rappresentazione banale ha necessariamente molteplicità 1. (Idea: Se f si trasforma

con la rappresentazione banale si ha $U(g)f(g') = f(g'g)$ e si noti che $g'g$ assume tutti i possibili valori al variare di g tenendo g' fisso).

[44] Dalla teoria delle rappresentazioni unitarie di $SL_2(R)$, [GGP],[CEG], segue che un vettore costante per il *sottogruppo* $t \rightarrow e^{\frac{1}{2}\sigma t}$ può esistere solo nella rappresentazione banale, ossia nessuna rappresentazione irriducibile contiene un vettore invariante tranne quella banale. Se ne deduca, usando [43] che il flusso geodetico sull'ottagono è ergodico, assumendo che la rappresentazione in [42] è riducibile a una somma diretta di rappresentazioni irriducibili, come dimostrato in *c.f.r.* [GGP]. In modo analogo la teoria dello spettro di potenza può essere ridotta a (semplici) problemi di teoria delle rappresentazioni di $SL_2(R)$ ("analisi di Fourier" su $SL_2(R)$) che giocano il ruolo degli esponenziali complessi della trasformata di Fourier ordinaria per lo studio dei flussi geodetici sui tori (moti quasi periodici). La teoria delle rappresentazioni è esposta nel trattato [GGP], si veda anche [CEG].

Bibliografia [AA],[G2],[Ka]. I problemi sulle frazioni continue sono tratti da [Ki], [G1]. La teoria delle geodetiche sull' "ottagono" è tratta da [CEG]. La dimostrazione dell' ergodicità del flusso geodetico sull' "ottagono" basata sulla teoria delle rappresentazioni di $SL(2, R)$ e delineata nei problemi è molto semplice. Ma ci si può domandare se ne sia possibile una che, invece, abbia carattere più geometrico e non riposi sulla teoria delle rappresentazioni. Questo è possibile e anzi la prima dimostrazione dell' ergodicità del flusso geodetico sull' ottagono (o su una superficie compatta qualsiasi a curvatura negativa, costante o no) fu proprio di natura geometrica ed è dovuta a Hopf, (si veda [G13] per una esposizione rapida dell' idea fondamentale): ha avuto grande influenza sullo sviluppo della teoria dei sistemi iperbolici (*c.f.r.* §24,§27).

§22 *Ordinamento del Caos. Osservazioni cadenzate. Dati casuali.*

Lo studio di un moto di un sistema (che sia un fluido o un generale sistema dinamico descritto da un' equazione differenziale in R^l) viene di solito impostato osservandone l' evoluzione su un insieme discreto di tempi.

Questo non tanto a causa della nostra incapacità intrinseca di osservare quantitativamente fenomeni in funzione di osservazioni continue nel tempo, ma anche per evitare di effettuare misure banali (perché quasi ripetizioni di misure appena eseguite).

È infatti chiaro che se si eseguono misure troppo frequenti nel tempo, i risultati che si ottengono differiscono fra loro in modo poco rilevante e difficile da misurare. È solo confrontando misure effettuate su archi di tempo che differiscono “per la scala di tempo”, su cui si registra evoluzione, che si può rilevare l' esistenza e la varietà del moto: si ricordi a proposito il *paradosso di Zenone*.

Tali scale di tempo possono variare enormemente da sistema a sistema e da fenomeno a fenomeno. Ad esempio il ciclone tropicale che dá luogo alla macchia rossa di Giove richiede (dalla Terra) osservazioni su centinaia di anni perché se ne noti l' evoluzione; un ciclone tropicale terrestre (visto da Giove) solo poche ore; la precessione dell' asse della Terra richiede a Ipparco centinaia di anni per essere osservata; quella dell' asse di Iperione (satellite di Saturno) ci richiede pochi giorni; la variazione dell' inclinazione dell' asse di Marte richiede centinaia di migliaia di anni, [LR].

Pertanto in tutti gli esperimenti si sceglie di eseguire osservazioni a istanti significativi, ben separati fra loro. Ad esempio se un sistema è soggetto ad una forza periodica è spesso conveniente fare le misure a intervalli “*cadenzati*” sul periodo della forza esterna (cioè ad istanti che sono multipli del periodo). Le misure consistenti in “*riprese di film*” possono apparire come un' eccezione: tuttavia anche i film sono osservazioni cadenzate in quanto consistono in una rapida successione di fotogrammi presi a intervalli temporali costanti; e si può pensare che il tempo stesso sia un' osservabile che prende valori su un cerchio, quale quello disegnato sul quadrante di un orologio, e che le osservazioni siano cadenzate dal passaggio della lancetta per un punto segnato sul quadrante.

Piú in generale se \mathcal{P} è una proprietà selezionata del sistema, si potranno fare delle “osservazioni cadenzate”, ogni volta che la \mathcal{P} è verificata. Ad esempio la proprietà \mathcal{P} può essere l' uguaglianza di due osservabili F_1 e F_2 (cioè ogni volta che il punto u rappresentativo dello stato sistema nello spazio delle fasi passa per la superficie $F_1(u) = F_2(u)$); ovvero la proprietà che un' osservabile F assuma un massimo locale, al variare del tempo, o altro. Il caso di osservazioni cadenzate sul periodo di una forza forzante può evidentemente essere considerato un caso particolare. E così pure le osservazioni eseguite in sistemi autonomi (cioè non soggetti a forze dipendenti dal tempo) a intervalli di tempo uguali.

Lo spazio delle fasi in cui sono descritti i dati di un' osservazione cadenzata ha solitamente dimensione $l - 1$, se l è la dimensione dello spazio delle fasi in cui il sistema è descritto da un' equazione differenziale. Questo è vero, in un

certo senso, anche nei casi in cui le osservazioni vengono eseguite a intervalli di tempo uguali e su sistemi autonomi: almeno se si pensa al tempo t come a una coordinata, aumentando quindi di 1 la dimensione del sistema. Come detto al §18 supporremo sempre che la dimensione dello spazio delle fasi l sia $< \infty$: nel caso di moti di fluidi questo significa che consideriamo come buon modello un algoritmo finito che modella le equazioni del fluido (a infinite dimensioni): *c.f.r.* §8%§12 e §17.

Se le osservazioni sono cadenzate da una proprietà \mathcal{P} la dinamica è rappresentata da una trasformazione S dell'insieme $M \subset R^l$, (solitamente a $l - 1$ dimensioni), dei punti dello spazio delle fasi sui quali la proprietà \mathcal{P} prescelta è verificata. Questa trasformazione è definita associando ad un punto $u \in M$ il punto $u(t_0) \in M$, che è il punto in cui u evolve al momento t_0 in cui, per la prima volta, si trova a godere ancora della proprietà \mathcal{P} .

Si noti che la trasformazione S può essere considerata come una estensione della nozione di “trasformazione di Poincaré”, c.f.r. §19 definizione 1 in (E), relativa alla superficie costituita dai punti che godono della proprietà \mathcal{P} .

Chiameremo M ancora “spazio delle fasi” aggiungendo la qualifica di *discreto* qualora sia necessario chiarire di quale dei due spazi delle fasi si tratti; lo spazio R^l in cui il sistema è descritto da un'equazione differenziale si dirà, quando necessario, “spazio delle fasi *continuo*”. La trasformazione S , “dinamica cadenzata”, trasforma M in sé.

La coppia (M, S) sarà un esempio di una nozione più generale che introdurremo più avanti in modo formale (*c.f.r.* definizione (2) del §23), di sistema dinamico discreto; qui la discretezza si riferisce al fatto che la dinamica è descritta dalle iterate della trasformazione S e il moto è una successione $x \rightarrow S^n x$, invece che una curva continua, essendo il tempo “discreto”.

La trasformazione S è di solito *meno regolare* della famiglia continua S_t di trasformazioni che ad un dato iniziale u associano il punto $u(t) = S_t u$ in cui u evolve in funzione del tempo (*c.f.r.* problemi [4,5] del §23). Può anche accadere che la S non sia definita per tutti i punti che hanno la proprietà \mathcal{P} : infatti possono esistere alcuni dati u che hanno la proprietà \mathcal{P} ma che evolvono senza più riacquisirla, (*c.f.r.* problemi [4,5] del §23 per un esempio tipico).

Ovviamente le osservazioni cadenzate sono utili solo allo studio dei moti che acquisiscono infinite volte la proprietà \mathcal{P} , usata per fissare la cadenza delle osservazioni. La proprietà \mathcal{P} si dice allora *ricorrente* su tali moti. Ed è tautologico che la trasformazione S , e le sue iterate S^n , $n \geq 0$ intero, contengono “tutte le informazioni” insite nelle trasformazioni S_t , con $t \geq 0$ variabile continua, e riguardanti la proprietà \mathcal{P} .

In particolare se A è un insieme attraente per l'evoluzione S_t allora $A_{\mathcal{P}} = \{ \text{insieme dei punti di } A \text{ che godono della proprietà } \mathcal{P} \}$ è un insieme attraente per S e “viceversa” l'unione delle traiettorie con dati iniziali su un insieme attraente $A_{\mathcal{P}}$ per S è un insieme attraente A per S_t . Non si deve però intendere che lo studio di S sia più semplice: l'analisi di *tutte* le

proprietá di S è equivalente a quella di *tutte* quelle di S_t .

Sarà conveniente fissare, d' ora in poi, la nostra attenzione sulle osservazioni cadenzate, cioè sui moti descritti dalle iterazioni di una trasformazione S definita su un insieme di punti $M \subset R^{\ell-1}$ di dimensione $\ell - 1$ che godono di una proprietá \mathcal{P} prefissata.

È infatti naturale impostare in termini di osservazioni cadenzate un metodo generale, omogeneo e senza troppe necessarie distinzioni tecniche che facciano riferimento a proprietá specifiche di un dato sistema, per la classificazione e descrizione delle proprietá qualitative e quantitative del moto di un fluido o di un sistema generale. Naturalmente si dovrebbe tener anche presente che lo studio delle osservazioni cadenzate è, o può essere, spesso piú aderente alla realtà: le osservazioni sperimentali, come già osservato, sono quasi sempre eseguite a intervalli di tempo discreti.

Anzitutto conviene stabilire contatto con quanto detto al §21 sullo spettro continuo: infatti quella nozione è stata data in modo dipendente dalla natura delle osservazioni non cadenzate, che è continua nel tempo.

Si considerino un sistema dinamico (a tempo discreto) (M, S) , un' osservabile f e la sua storia sul moto che inizia in x : $k \rightarrow f(S^k x)$. Si definisca:

1 *Definizione (spettro di potenza):*

(1) *Definiamo la funzione di autocorrelazione discreta dell' osservabile f sul moto $x \rightarrow S^n x$ come la media $\Omega(k)$ del prodotto $f(S^{h+k}x)f(S^h x)$ intesa come media sulla variabile h a k fisso. Così possiamo definire lo spettro di potenza (discreto) di f come la trasformata di Fourier:*

$$22.1 \quad A(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega(k) e^{i\omega k}, \quad \omega \in R \quad (22.1)$$

dell' autocorrelazione (c.f.r. (21.3)).

(3) *l' osservabile f ha spettro continuo sul moto $x \rightarrow S^n x$ se lo spettro di potenza (discreto) di f sul moto in questione è una funzione continua di ω , o almeno L_1 , su qualche intervallo $[\omega_1, \omega_2]$.*

(4) *un moto $n \rightarrow S^n x$ ha spettro continuo se esiste almeno un' osservabile che ha spettro continuo spectrum.*

(5) *Un sistema (M, S) si dice a spettro continuo rispetto ad una scelta aleatoria dei dati iniziali con distribuzione μ se con μ probabilità 1 un dato iniziale genera un moto su cui tutte le osservabili f di una famiglia \mathcal{F} densa in $L_2(M)$ (c.f.r. definizione 3 in §21) hanno spettro continuo.*

Si confronti questa definizione con l' analoga definizione 3 del §21.

Come nel §21 lo spettro di potenza (discreto) dell' osservabile f del moto del punto $x \rightarrow S^n x$ è, a parte problemi (di solito non banali) sullo scambio di limiti, il limite (se esiste) per $N \rightarrow \infty$ di:

$$22.2 \quad \frac{1}{2N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} f(S^k x) e^{ipk} \right|^2 \quad (22.2)$$

(la verifica formale procede lungo le stesse linee del caso del §21, *c.f.r.* (21.1), (21.2)).

In realtà quest'ultima è una definizione "migliore" perché è basata su una quantità più direttamente misurabile: se si hanno dati $f(S^k x)$ in "uscita" da un apparato sperimentale tali dati possono essere inviati *direttamente* ad un calcolatore per l'esecuzione "in linea" della somma in (22.2).

Un'illustrazione del tipo di questioni che si incontrano cercando di stabilire la relazione fra (22.2) e la definizione (22.1) è discussa nei problemi.

Se la funzione $k \rightarrow f(S^k x)$ è quasi periodica, ossia se $f(S^k x) = \varphi(k\underline{\gamma})$ con φ funzione periodica (con periodo 2π) di l angoli e $\underline{\gamma} \in R^{l-1}$ per qualche $l > 1$, e se $\underline{\omega} = (\underline{\gamma}, 2\pi)$ verifica una proprietà diofantina (21.5), allora si verifica che lo spettro di potenza discreto di f è formato da una somma di funzioni delta concentrate su punti $\omega = 2\pi n_0 + \underline{\gamma} \cdot \underline{n}$ ove n_0, \underline{n} sono l interi. Anche questa verifica è analoga alla corrispondente verifica vista nel §21. È quindi chiaro che si possono adattare al caso dello spettro continuo discreto i commenti del §21 a proposito dello spettro continuo.

Se un moto $t \rightarrow S_t(x)$ non ha spettro continuo nel senso del §21 può accadere che ciò sia così perché esistono osservabili banali la cui evoluzione è periodica.

Si pensi ad un sistema cui si aggiunge un orologio e si considera l'osservabile "posizione della lancetta". Allora cadenzando le osservazioni sul periodo di questa osservabile si vede che la posizione della lancetta diviene costante *su ogni moto* e non conta più ai fini della decisione se un dato moto ha, o no, spettro continuo.¹

Si vede dunque che cadenzando le osservazioni si può ottenere il risultato di eliminare informazioni poco interessanti, cioè osservabili delle quali si capisce bene l'evoluzione. Questa è la regola quando si considerano sistemi forzati da forze periodiche (nei quali l'osservabile forza è banalmente periodica).

Per questo motivo al §21 si è definito un moto $t \rightarrow S_t x$, $t \in R$, "a spettro continuo" purché esista *almeno* un'osservazione (anche speciale) rispetto alla quale il moto ha spettro continuo. Questo viene riflesso anche nel punto (4) dell'ultima definizione.

Esempi di sistemi dinamici discreti a spettro continuo su quasi tutti i dati iniziali scelti con una distribuzione di probabilità assolutamente continua sullo spazio delle fasi sono costruibili in modo piuttosto semplice; ne diamo un elenco di alcuni particolarmente notevoli rinviando ai problemi per maggiori dettagli:

(1) La trasformazione $x \rightarrow 4x(1-x)$ dell'intervallo $[0, 1]$ in sé: quasi tutti i dati iniziali (rispetto alla misura di lunghezza) generano moti a spettro continuo. Questa trasformazione ha classe di regolarità C^∞ , ma non è

¹ Se si studiasse il divenire dell'acqua della cascata delle Marmore osservando *solo* le lancette di un *Swatch* da essa trasportato si finirebbe con il credere che il moto non sia turbolento.

invertibile; inoltre conserva la misura $\mu(dx) = dx/\pi\sqrt{x(1-x)}$.²

(2) La trasformazione $x \rightarrow 2x$ se $x < \frac{1}{2}$ e $x \rightarrow 2(1-x)$ se $x \geq \frac{1}{2}$ dell'intervallo $[0, 1]$ in sé: quasi tutti i dati iniziali generano moti a spettro continuo. Questa trasformazione non è invertibile ed è solo regolare a tratti; inoltre conserva la misura $\mu(dx) = dx$. È sovente chiamata la *tenda*.

(3) La trasformazione del toro bidimensionale $T^2 = [0, 2\pi]^2$ in sé definita da $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow \varphi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ con $\varphi'_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ e $\varphi'_2 = \varphi_1 + 2\varphi_2$ è tale che quasi tutti i punti, rispetto alla misura di area, di T^2 generano moti a spettro continuo. Si noti che questa trasformazione è invertibile ed ha regolarità C^∞ insieme alla sua inversa, nonostante le apparenti discontinuità quando uno degli angoli è multiplo di 2π ; conserva la misura di area $\mu(d\varphi) = d\varphi/(2\pi)^2$. Questa trasformazione gioca un ruolo importante in quanto paradigma dei sistemi dinamici discreti caotici. È chiamata talvolta il *gatto di Arnold* a causa della celebre illustrazione che Arnold diede dell'azione di questa trasformazione, [AA].

(4) Si consideri la trasformazione S dell'esempio precedente. Si definisca un sistema dinamico a tre dimensioni agente sui punti di $M = T^2 \times [0, L]$ al modo seguente $S_t(\varphi_1, \varphi_2, z) = (\varphi'_1, \varphi'_2, z')$ ove $\varphi'_1 = \varphi_1, \varphi'_2 = \varphi_2, z' = z + vt$ finché $z' \leq L$ e $(\varphi'_1, \varphi'_2) = S(\varphi_1, \varphi_2)$ e $z' = z - L + vt$ se $L < z' \leq 2L$, ecc.:

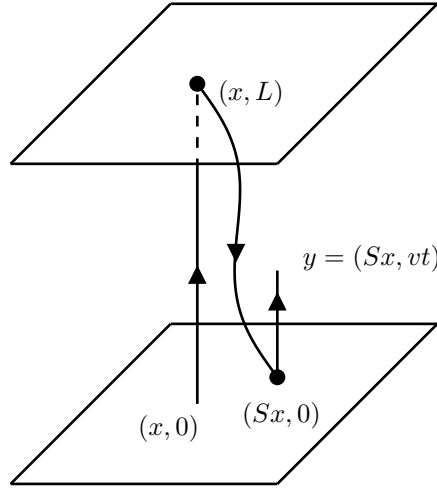


Fig. 1 Un sistema dinamico continuo che contiene un “gatto di Arnold”. La linea curva è un aiuto visivo per l'identificazione di (x, L) con $(Sx, 0)$ e non ha altro significato dinamico.

cioè il punto procede con velocità costante v lungo l'asse z finché non “collide” con il piano $z = L$; alla collisione il punto riappare sul piano $z = 0$

² Si dice che una trasformazione S , invertibile o no, di uno spazio topologico M conserva una misura μ se per ogni insieme misurabile E l'insieme $S^{-1}E$, cioè i punti x tali che $Sx \in E$, ha la stessa misura di E : $\mu(S^{-1}E) = \mu(E)$.

ma con nuove coordinate φ_1, φ_2 (in altre parole si impongono condizioni al bordo tali da identificare $(\varphi_1, \varphi_2, L)$ con $(S(\varphi_1, \varphi_2), 0)$). Si veda la figura in cui $x = (\varphi_1, \varphi_2)$, $Sx = (\varphi'_1, \varphi'_2)$:

Il sistema dinamico generato dall'azione di S_t su M conserva la misura $\mu(d\varphi dz) = d\varphi dz$ e *non* ha spettro continuo; ma eseguendo osservazioni cadenzate a intervalli di tempo L/v , evidentemente, si ottiene un sistema dinamico per il quale quasi tutti i moti hanno spettro continuo, perché essenzialmente coincidente con l'esempio (3) precedente. In riferimento alla nota ¹ si può dire che questo è un modello di “un sistema caotico che ha inghiottito un orologio”.

(5) Evidentemente la costruzione dell'esempio (4) è generalizzabile in vari modi. Si possono così costruire, anche a partire dagli esempi (1),(2),(3), esempi di sistemi dinamici continui a spettro non continuo, ma con osservazioni cadenzate a spettro continuo.

(6) Si vede facilmente che negli esempi precedenti è veramente necessario dire *sempre* “quasi tutti i punti”: invero in ciascuno degli esempi si possono individuare particolari moti la cui evoluzione *non ha* spettro continuo. Si pensi a $x = 0$ nei casi (1),(2) e a $\varphi = 0$ nel caso (3). Questo *non* è un accidente. Vedremo, c.f.r. §27, che l'esistenza di moti a spettro continuo, ossia di moti “caotici”, è quasi inevitabilmente accompagnata dall'esistenza di moti periodici (instabili) che addirittura spesso corrispondono a moti che evolvono a partire da un insieme di dati iniziali *denso* nello spazio delle fasi, ma che ha misura nulla rispetto a gran parte delle misure di probabilità μ invarianti definibili (come negli esempi precedenti avviene per la misura μ di Lebesgue).

Introdotte le nozioni di spettro di un'osservabile su un moto continuo o discretizzato via osservazioni cadenzate dovremmo procedere all'analisi dell'importante nozione di *statistica* di un moto, osservato a tempo continuo o cadenzato, generato da un dato iniziale *scelto a caso*. Allo scopo conviene rinviare l'analisi della nozione di statistica e discutere, una volta per tutte, nel resto del paragrafo cosa qui significherà precisamente “scegliere a caso”.

Una scelta a caso è intesa come un algoritmo che produce le $\ell - 1$ coordinate di un dato iniziale u , che viene poi fatto evolvere nel tempo costruendone la *storia*, ossia la successione $S^n u$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2 Definizione (scelta casuale):

Si consideri un algoritmo P_0 che produce a partire da un seme, ossia da un numero reale $s_0 \in [0, 1]$,³ una l -pla $\xi_1, \dots, \xi_{l-1}, s_1$ di numeri reali in $[0, 1]$ che sono considerati casuali da chi esegue i calcoli. Questi numeri sono raccolti in una $(l - 1)$ -pla che così fornisce un punto x_1 nel quadrato $Q = [0, 1]^{l-1}$. E l' l -mo numero s_1 sarà un nuovo seme da impiegare per ripetere l'algoritmo e generare così un nuovo punto in Q e un nuovo seme,

³ Ovviamente razionale perché i numeri irrazionali sono un'astrazione di scarsa utilità quando si eseguono calcoli reali.

etc. La successione x_1, x_2, \dots di punti in Q prodotta dall' algoritmo P_0 e seme s_0 , si chiamerà una "successione di dati a caso" in Q con generatore (P_0, s_0)

Se poi $g : Q \rightarrow U$ è una funzione regolare $u = g(x)$ a valori in un insieme aperto U su una superficie regolare arbitraria, la successione $u_1 = g(x_1)$, $u_2 = g(x_2), \dots$ sarà chiamata una successione di dati casuali in U prodotta con l' algoritmo $P = (P_0, s_0, g)$ ottenuto componendo g con l' algoritmo P_0 .

Osservazioni:

(i) Scegliere una successione di dati a caso, costruiti con l' algoritmo P descritto, significa costruire la successione u_1, u_2, \dots . Sono possibili variazioni (concettualmente poco diverse) su questo metodo di costruzione di successioni di punti casuali, ma non le discutiamo qui.

(ii) Come si vede non c'è nulla di casuale nei punti u_i : tali punti sono costruiti con una regola precisa che fornisce sempre gli stessi risultati (se non si commettono errori di calcolo o di programma, dal momento che gli algoritmi di cui si parla sono sempre generati su calcolatori).

(iii) Ciononostante si conviene di chiamare le successioni così costruite "successioni casuali" e la loro "distribuzione" è definita dall' algoritmo $P = (P_0, g)$ che le genera.

(iv) Ovviamente si possono immaginare algoritmi talmente semplici da produrre successioni che nessuno chiamerebbe casuali. Su un calcolatore che rappresenta i numeri reali a mezzo del loro sviluppo binario in base 2 con 16 cifre (ad esempio), e che esegue le operazioni di moltiplicazione troncando la mantissa a 16 cifre, si può programmare la trasformazione $x \rightarrow Sx$ dell' esempio (2) e definire l' algoritmo con seme σ_0 ponendo $x_0 = \sigma_0, x_1 = S\sigma_0, x_2 = Sx_1, x_3 = Sx_2, \dots$ (o in altre parole $x_k = Sx_{k-1}, k \geq 1$). Oppure si può definire l' algoritmo addirittura più semplice con $S : x \rightarrow 2x \bmod 1$ che trasforma $[0, 1]$ in sé e che assai simile alla trasformazione della "tenda" e, com' essa, ha anche spettro continuo rispetto alla misura dx . Quindi ci si potrebbe attendere che gli algoritmi in questione generino successioni piuttosto casuali. Ma, naturalmente le trasformazioni S generano, da un qualunque seme s_0 , una successione $x_0 = \sigma_0, x_k = Sx_{k-1}, k \geq 1$ che dopo 16 iterazioni da come risultato identicamente $x_k = 0$! perché qualsiasi seme σ_0 sarà rappresentato esattamente da 16 cifre, le altre essendo implicitamente 0.

$x \rightarrow 2x \bmod 2$ di $[0, 1]$ in sé (che pure è la "tenda" prima decritta e che è fra le più semplici trasformazioni a spettro continuo e che ci si potrebbe quindi aspettare che generi successioni poco regolari) genera, a partire da un seme s_0 qualsiasi, una successione che dopo 16 iterazioni produce identicamente $x = 0$!

Queste osservazioni mostrano che diventa necessario cercare di precisare qualitativamente cosa si intenda non solo per distribuzione di probabilità dei numeri casuali generati da un algoritmo P , ma anche in che senso i numeri generati da P possano essere considerati realmente casuali. La

seguente definizione consente di porre il problema in forma quantitativa:

3 Definizione (generatore approssimato di numeri casuali):

Si dice che una successione di N numeri casuali in $Q = [0, 1]^{l-1}$, generata come descritto da un algoritmo $P = (P_0, s_0)$, ha una distribuzione di probabilità μ assolutamente continua con densità ρ , entro una certa precisione ε e rispetto ad una data n -pla di funzioni f_1, \dots, f_n definite su Q , se:

$$22.3 \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_k(x_i) - \int_Q \rho(x) f_k(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n \quad (22.3)$$

Le quantità $(P, f_1, \dots, f_n; \rho, \varepsilon, N)$ forniscono quello che si può chiamare un “modello discreto di distribuzione casuale” con densità ρ sul quadrato Q , ovvero un “generatore di numeri casuali in Q ”. Il generatore è caratterizzato dall’algoritmo P , dalla precisione ε e dalle funzioni di controllo (f_1, \dots, f_n) , oltre che dalla densità della distribuzione ρ e dalla dimensione statistica N .

Accadrà, naturalmente, che la “bontà” di un algoritmo $P = (P_0, s_0)$ dipenda dal seme s_0 e dalla complessità e numero delle funzioni (f_1, \dots, f_n) , anche se gli algoritmi che manifestano questa proprietà in modo veramente sensibile non sono ovviamente da considerarsi “buoni generatori” di numeri casuali: come l’esempio menzionato nella precedente osservazione (4) in cui tutte le successioni generate da N numeri e con qualunque seme e controllate su un qualsiasi insieme di funzioni f_1, \dots, f_n sono di cattiva qualità quando l’algoritmo è realizzato ingenuamente su un programma di calcolatore.

Più in generale si può definire:

4 Definizione: Si dice che una successione di N numeri casuali in $Q = [0, 1]^{l-1}$, generata come descritto da un algoritmo P , ha una distribuzione di probabilità μ su Q , entro una certa precisione ε e rispetto ad una data n -pla di funzioni f_1, \dots, f_n definite su Q , se:

$$22.4 \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_k(x_i) - \int_Q \mu(dx) f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n \quad (22.4)$$

Le quantità $(P, f_1, \dots, f_n; \mu, \varepsilon, N)$ forniscono quello che si può chiamare un “modello discreto di distribuzione μ sul quadrato Q , ovvero un “generatore di numeri casuali in Q con distribuzione μ ”. Il generatore è caratterizzato dall’algoritmo P , dalla precisione ε e dalle funzioni di controllo (f_1, \dots, f_n) , oltre che dalla distribuzione μ e dalla dimensione statistica N .

Osservazioni:

(i) La scelta di Q come quadrato unitario non è restrittiva perché dato un generatore di numeri casuali $x \in Q$ se ne può costruire uno a valori in un insieme aperto U , contenuto in una superficie M regolare a tratti, immagine di Q rispetto ad una trasformazione F regolare (C^∞) a tratti (per fissare le idee) semplicemente ponendo $u = F(x)$ per ogni $x \in Q$. Se

F è regolare allora distribuzioni assolutamente continue restano tali, cioè sono descritte da una densità rispetto alla misura di area definita su U . E se invece la distribuzione è una misura μ non assolutamente continua allora anche quella generata su U non lo sarà.

(ii) pensare di generare numeri a caso in base all'ora segnata da un orologio quando si decide di guardarlo, ovvero aprendo a caso elenchi telefonici e leggendo, o altro di questa natura, è un procedimento *incontrollato, non riproducibile, soggettivo e quindi non scientifico (e brutto, anche)*. Va evitato con assoluto rigore: è sempre meglio sapere esattamente quel che si fa.

Ovviamente se si potessero costruire successioni infinite si potrebbe eliminare dalla definizione di generatore di numeri casuali il carattere intrinsecamente approssimato (dovuto al numero finito n di funzioni di controllo, alla finitezza della dimensione statistica e alla positività di ε).

Ma questo *non è possibile* e quindi non esistono generatori perfetti di numeri casuali. Tuttavia è spesso utile considerare astrattamente generatori perfetti:

5 Definizione (generatore casuale ideale):

Chiameremo “generatore casuale ideale” con distribuzione μ in Q rispetto ad una famiglia \mathcal{F} di funzioni su Q , un algoritmo (P_0, s_0) che per ogni “seme” s_0 scelto in un insieme non vuoto $\Sigma \subset [0, 1]$ di “semi ammissibili” produce una successione (x_1, x_2, \dots) tale che:

$$22.5 \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_Q \mu(dx) f(x) \right) = 0 \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F} \quad (22.5)$$

cioè le (22.4) valgono “esattamente” con $\varepsilon = 0$ nel limite $N \rightarrow \infty$.

Dato un generatore casuale e un sistema dinamico, ad esempio un fluido, “scegliere un dato iniziale a caso” significa generare x_1 ; sceglierne successivamente un numero k significa far funzionare il generatore producendo x_1, x_2, \dots, x_k .

Per ragioni (*metafisiche*) di solito si considerano generatori casuali che producono distribuzioni assolutamente continue (ovviamente entro approssimazioni giudicate convenienti). Ma non si deve credere che non sia altrettanto semplice costruire generatori (ideali o reali) che producono distribuzioni non assolutamente continue.

Un modo semplice è di utilizzare un generatore del tipo di quelli appena descritti e di rappresentare le $(l-1)$ -ple x_1, \dots, x_{l-1} in base 2, ma interpretarle poi come $(l-1)$ -ple di numeri x'_1, \dots, x'_{l-1} rappresentati *in base 3 invece che in base 2*.

Ad esempio si consideri un generatore ideale che produca successioni di punti x in $[0, 1]$ che hanno la distribuzione $\mu(dx)$ (“generatore della misura di Lebesgue”). Sia $x_1 = \sigma_0, x_2, \dots$ la successione di $x \in [0, 1]$ produced by the generator (P_0, σ_0) : scriviamo ciascuno di questi numeri in base 2 e interpretiamo il risultato come la rappresentazione digitale in base 3 di una successione di numeri x'_1, x'_2, \dots (che quindi non hanno mai la cifra 2)).

Questa nuova successione identifica una distribuzione di probabilità μ' su $[0, 1]$ che assegna probabilità 1 all'insieme di Cantor C_3 , cioè all'insieme dei numeri reali in $[0, 1]$ i quali, quando scritti in base 3 non contengono la cifra 2.

È quasi ovvio che questo insieme C_3 ha misura di Lebesgue nulla (esercizio) e quindi ha probabilità zero rispetto alla distribuzione $\mu(dx) = dx$: e si vede come distribuzioni singolari rispetto alla misura di Lebesgue possano essere facili da generare e che, *quindi*, il loro studio possa essere altrettanto significativo.

Problemi.

[1] Si mostri che la trasformazione $y = 2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{x}$ muta la trasformazione S definita da $y \rightarrow 2y$ se $y < \frac{1}{2}$ e $y \rightarrow 2(1-y)$ se $y \geq \frac{1}{2}$, di $[0, 1]$ in se, nella trasformazione \tilde{S} di $[0, 1]$ in sé, definita da $x \rightarrow 4x(1-x)$ e la misura dy nella $\mu(dx) = dx/\pi\sqrt{x(1-x)}$.

[2] Si verifichi che la misura $\mu'(dy) = dy$ su $[0, 1]$ del problema [1] è invariante rispetto alla trasformazione S , nel senso che $\mu'(S^{-1}E) = \mu'(E)$ a dispetto del fatto che la trasformazione evidentemente moltiplica per 2 le lunghezze degli intervalli infinitesimi. Se ne deduca che la misura $\mu(dx)$ del problema [1] è invariante rispetto all'azione della trasformazione $x \rightarrow 4x(1-x)$. (*Idea*: S non è invertibile).

Per le discussioni delle proprietà astratte dei sistemi dinamici è di qualche utilità il teorema di Birkhoff che enunciamo qui senza riportare la dimostrazione (per una sua semplice dimostrazione si veda il problema [2], del §24):

Teorema: Sia (A, S) è un sistema dinamico e μ è una distribuzione di probabilità invariante (ossia tale che $\mu(S^{-1}E) = \mu(E)$ per ogni insieme misurabile E). Sia $f \in L_1(\mu)$ allora, con μ -probabilità 1 sulle scelte di $u \in A$, esiste il valore medio limite $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} f(S^k u) = \bar{f}(u)$, e $\bar{f}(Su) \equiv \bar{f}(u) = f(u)$ μ -quasi ovunque.

[3] Si consideri la trasformazione S del toro T^2 in se descritta nell'esempio (3) del testo (*gatto di Arnold*) via la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $S\underline{\varphi} = C\underline{\varphi} \bmod 2\pi$ e si mostri che se f è una funzione regolare su T^2 , e $f_{\underline{n}}$ ne è la trasformata di Fourier, allora:

$$\Omega(k) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{h=0}^{N-1} f(C^{k+h}\underline{\varphi}) f(C^h\underline{\varphi}) = \frac{1}{2} \sum_{\underline{n}} f_{\underline{n}} f_{C^{-k}\underline{n}} \quad (a)$$

per quasi tutti i $\underline{\varphi}$ in T^2 (rispetto alla misura (invariante) di area). (*Idea*: si noti che

$$\frac{1}{2N} \sum_{h=0}^{N-1} f(C^{k+h}\underline{\varphi}) f(C^h\underline{\varphi}) = \sum_{\underline{n}} \sum_{\underline{n}'} f_{\underline{n}} f_{\underline{n}'} \frac{1}{2N} \sum_{h=0}^{N-1} e^{i(C^h(C^k\underline{n}+\underline{n}') \cdot \underline{\varphi})}$$

e inoltre se $\langle \cdot \rangle$ denota la media su T^2 (cioè l'integrale su $\mu(d\underline{\varphi}) = d\underline{\varphi}/(2\pi)^2$) allora:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} e^{iC^h\underline{n} \cdot \underline{\varphi}} \right\rangle = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{N^2} \left| \sum_{h=0}^{N-1} e^{iC^h\underline{n} \cdot \underline{\varphi}} \right|^2 \right\rangle = 0 \quad (b)$$

se $\underline{n} \neq \underline{0}$. Si combini questo con il teorema di Birkhoff appena enunciato: per dedurre che per ogni funzione regolare g il limite per $N \rightarrow \infty$ di $N^{-1} \sum_{h=0}^{N-1} g(S^h\underline{\psi}) = \langle g \rangle$ per quasi tutti i $\underline{\psi}$ ("ergodicità del gatto di Arnold"). (*Idea*: La seconda relazione vale perché

dopo l' integrazione su $\underline{\varphi}$ solo N degli N^2 termini del quadrato della somma danno un contributo non nullo. Per il teorema di Birkhoff la media (a) esiste μ -quasi ovunque e la media $\overline{F}(\underline{\varphi})$ della funzione

$$F(\underline{\varphi}) = \frac{1}{2} \left(f(C^k \underline{\varphi}) f(\underline{\varphi}) - \sum_{\underline{n}} f_{C^{-k}\underline{n}} f_{\underline{n}} \right) \quad (c)$$

esiste e, per la seconda delle (b), è tale che $\langle \overline{F}^2 \rangle = 0$ e quindi $\overline{F}(\underline{\varphi}) = 0$ μ -quasi ovunque e la prima delle (b) prova la (a)).

[4] Se f ha media nulla ed è differenziabile tre volte si mostri che la funzione $\Omega(k)$ è a decrescenza rapida utilizzando la proprietà che gli autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sono $\underline{v}_{\pm} = ((-1 \mp \sqrt{5})/2, 1)\gamma$ (ove γ è la costante di normalizzazione a 1), con autovalori $\lambda_{\pm} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. (*Idea*: Poiché il rapporto fra le due componenti di \underline{v}_{\pm} è un numero irrazionale quadratico, vale la proprietà diofantina, (c.f.r. (21.5)): $|n_1 v_{\pm,1} + n_2 v_{\pm,2}| \geq D/(|n_1| + |n_2|)$ per una opportuna $D > 0$. Quindi $|C^k \underline{n}| \geq \lambda_+^k |\underline{n} \cdot \underline{v}_+| \geq D \lambda_+^k / (|n_1| + |n_2|)$ e allora $|f_{\underline{n}}| \leq F |\underline{n}|^{-3}$ (perché f è C^3) e $|f_{C^k \underline{n}}| \leq |\underline{n}|^3 F / (\lambda_+^k D)^3$, e anche $|f_{C^k \underline{n}}| < F'$ se F' è il massimo di $|f|$).

Ne segue che $|f_{\underline{n}} f_{C^k \underline{n}}| \leq F |\underline{n}|^{-3} F'^{1-\varepsilon} (|\underline{n}|^3 F D^{-3} \lambda_+^{-3k})^{\varepsilon}$ per qualsiasi $\varepsilon \in (0, 1)$; infine la serie $\sum |\underline{n}|^{-3+3\varepsilon}$ converge per ε piccolo e $\Omega(k) \leq \text{cost } \lambda_+^{-3\varepsilon k}$.)

[5] Il risultato di [4] vale anche se si suppone solo che f sia di classe C^2 . (*Idea*: si noti che l' insieme degli \underline{n} per cui $(C^k \underline{n}) \cdot \underline{v}_+$ può essere piccolo è in realtà "unidimensionale" consistendo solo dei vettori \underline{n} vicini alla retta per l' origine e perpendicolare a \underline{v}_+ .)

[6] Si consideri il sistema dinamico in [3] e si faccia vedere che la definizione di spettro continuo di una funzione $f \in C^\infty(T^2)$ nella definizione 1 e quella basata sulla (22.2) coincidono se il limite per $N \rightarrow \infty$ della (22.2) è inteso nel senso delle distribuzioni. (*Idea*: Sia $g(p) = e^{-ipk_0}$ una funzione di prova e, detta $A_N(p)$ la funzione in (22.2), si calcoli $\int_0^{2\pi} g(p) A_N(p) \frac{dp}{2\pi}$. Si troverà:

$$\frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{h'=0}^{N-1} f(S^h \underline{\psi}) f(S^{h'} \underline{\psi}) \delta_{h'-h-k_0} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{h=0 \\ 0 \leq h-k_0 \leq N-1}}^{N-1} f(S^h \underline{\psi}) f(S^{h-k_0} \underline{\psi})$$

che ha lo stesso limite di $\frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} f(S^h \underline{\psi}) f(S^{h-k_0} \underline{\psi})$. Per il teorema di Birkhoff il limite esiste *quasi ovunque* e, per l' idea del problema [3] precedente (ossia per l' ergodicità del gatto di Arnold), è uguale a:

$$\int \frac{d\underline{\psi}'}{(2\pi)^2} f(\underline{\psi}') f(S^{-k_0} \underline{\psi}') \stackrel{def}{=} \Omega(k_0) = \sum_{\underline{\nu}} f_{\underline{\nu}} \overline{f_{S^{k_0} \underline{\nu}}} = |f_0|^2 + \Omega_0(k_0)$$

e $\Omega_0(k_0)$ tende a zero rapidamente. Ne segue che la trasformata di Fourier di $\Omega(k)$ è la somma di una delta di Dirac sull' origine e di una funzione di classe C^∞ : lo spettro di ogni osservabile regolare non costante su quasi tutti i moti è dunque continuo.)

[7] Si consideri la trasformazione S del problema [1] e la corrispondenza $x \rightarrow \underline{\sigma}(x)$ che ad ogni punto di $[0, 1]$ associa la successione $\underline{\sigma}$ delle cifre 0, 1 del suo sviluppo binario. Date n cifre $\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n$ si faccia vedere che l' insieme $I(\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n)$ dei punti x tali che le prime n cifre del loro sviluppo binario sono $\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n$ è un intervallo di lunghezza 2^{-n} . L' intervallo $I(\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n)$ si chiama *intervallo diadico*.

[8] Si faccia vedere che la trasformazione S del problema [1] agisce sugli intervalli diadici del problema [7] in modo che $S^{-h} I(\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n) \cap I(\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_m)$ ha lunghezza 2^{-m-n} se $h > m$. (*Idea*: si noti che S agisce su x in modo da generare un numero che in

rappresentazione binaria ha le stesse cifre di x traslate di una unità verso sinistra dopo aver cancellato la prima.)

[9] Si consideri la famiglia \mathcal{F} di funzioni che sono costanti a tratti su un numero finito di intervalli diadici (un esempio è la funzione caratteristica di un intervallo diadico). Si mostri che se $f \in \mathcal{F}$:

$$\Omega(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{N} \sum_{h=0}^N f(S^{h+k}x) f(S^kx) dx = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

se k è abbastanza grande: quindi su quasi tutti i moti le funzioni della famiglia \mathcal{F} hanno spettro continuo. (*Idea:* Si consideri prima il caso in cui f è una funzione caratteristica di un intervallo diadico e si calcoli esplicitamente l'integrale.)

[10] Si adatti l'analisi dei problemi [7], [8], [9] al caso della trasformazione detta “tenda” del [1].

[11] Procedendo come nel problema [3] si deduca dal precedente problema che quasi tutti i dati iniziali $x \in M$ per il sistema dinamico (M, S) del problema [1] hanno spettro continuo. (*Idea:* Basta applicare la definizione 3, §21.)

[12] Si dimostri che il “gatto di Arnold” è una trasformazione, c.f.r. [3], di $[0, 2\pi]^2$ dotata di un insieme denso di punti periodici. (*Idea:* I punti a coordinate che sono multipli razionali di 2π sono punti periodici.)

[13] Si dimostri che la trasformazione $\varphi \rightarrow \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi$ del toro T^2 in se ha le “stesse” proprietà messe in evidenza in [1], [2], [3] per il “gatto di Arnold”. (*Idea:* Questa trasformazione potrebbe essere chiamata la “radice quadrata del gatto”.)

Bibliografia: [AA], [G2].

§23 *Ordinamento del Caos. Sistemi dinamici di vario tipo. Statistica di un insieme attraente.*

Introduciamo la nozione di *statistica di un insieme attraente* A per un'evoluzione S definita su uno spazio delle fasi (discreto) M . Per la già notata possibile non regolarità di S , quando S nasce come trasformazione cadenzata associata ad un'equazione differenziale pur regolare, non supporremo che S sia regolare, bensì solo "regolare a tratti". Ossia si supporrà che M sia una superficie regolare a tratti chiusa e limitata (si dice anche "compatta") di dimensione $l - 1$ e che all'interno di ogni tratto (ossia di ogni porzione regolare di M) S sia di classe C^∞ .

Impiegheremo oggetti geometrici quali "porzioni di superficie regolare", o "superfici regolari a tratti", o "superfici differenziabili e varietà differenziabili" M in un senso intuitivo, ma una definizione precisa è ovviamente possibile.

¹

Se S è una trasformazione di M in se si dirà che S è "regolare a tratti" su M se M è pensabile come unione porzioni di superfici regolari $M'_1 \cup \dots \cup M'_s$ con solo punti di frontiera in comune e tali che la restrizione di S all'interno di M'_j è di classe C^∞ , con determinante Jacobiano $\det \partial S$ non nullo, ed inoltre è estendibile con continuità a tutto M'_j (senza che necessariamente coincida con S anche sui punti di frontiera). ² L'insieme N dei punti di frontiera dei tratti M'_j sarà chiamato l'insieme dei *punti di singolarità* di S .

È chiaro che il valore di S sui punti singolari è in un certo senso arbitrario: tuttavia è conveniente immaginare che S sia definita senza eccezioni.

¹ Un tratto o porzione di superficie regolare P di dimensione n immersa in R^m ($m \geq n$) è l'immagine di una regione $D \subset R^n$ che è limitata e semplicemente connessa e che è chiusura dei suoi punti interni D^0 (cioè $D = \overline{D^0}$) via una trasformazione analitica e con inversa analitica definita in un intorno di D : si suppone (induttivamente) inoltre che la frontiera di D sia essa stessa un'unione di un numero finito di porzioni di superficie regolare di una dimensione in meno e con solo punti di bordo eventualmente in comune (e, per definizione, le porzioni di superficie regolare a dimensione 0 sono punti isolati). Se $m = n$ si dirà che P è un dominio regolare.

Una superficie M , n -dimensionale regolare a tratti immersa in R^m , è un insieme chiuso che può essere pensato come unione di un numero finito di tratti di dimensione n ed aventi in comune al più punti di frontiera e le intersezioni dei tratti sono a loro volta superfici regolari a tratti.

Una superficie regolare può essere rappresentata come una unione di porzioni di superficie regolare componenti in vari modi: se per ogni punto x si può trovare una rappresentazione della superficie in modo che x sia interno ad una delle porzioni di superficie regolare componenti allora si dice che la superficie è differenziabile.

² Ovviamente la regolarità in classe analitica per i tratti di superficie e in classe C^∞ per i tratti di regolarità di S potrebbero essere cambiate rispettivamente in regolarità in classe $C^{(k)}$ e $C^{(h)}$ con $k \geq h$ dando luogo a ovvie modifiche delle nozioni ora poste; rare volte si farà uso di questa possibilità, e per i nostri scopi quanto definito sarà di solito sufficiente.

Su una superficie regolare a tratti M è, quindi, definita la misura di volume (che ad ogni insieme E misurabile, $E \subset M$, associa la sua superficie $(l-1)$ -dimensionale $\sigma(E)$).³ Questa misura gioca un ruolo particolare solo perché noi abbiamo fatto l'ipotesi che M sia regolare a tratti, dando così uno speciale ruolo alla struttura metrica indotta su M dalla metrica euclidea che immaginiamo definita sullo spazio continuo delle fasi. Quest'ultima a sua volta è privilegiata perché supponiamo che sullo spazio l -dimensionale delle fasi il moto del sistema sia descritto da equazioni differenziali regolari. Ipotesi che *non* è giustificata se non dalle nostre concezioni metafisiche sulla descrivibilità dei fenomeni naturali in termini di equazioni "regolari" nel senso della geometria analitica elementare.⁴

Sia A un insieme attraente per la trasformazione S e sia $U \supset A$ un insieme aperto contenuto nel bacino globale di attrazione di A . Conviene fissare anche una definizione precisa di insieme attraente (fin qui usata solo in un senso intuitivo), perché si tratta di una nozione che è molto naturale porre in modo diverso in contesti diversi e quindi finisce con l'avere di fatto un senso ambiguo.

1 Definizione (sistema dinamico generale, insieme attraente):

(i) Un sistema dinamico (M, S) è definito da una superficie regolare a tratti M , e da una sua trasformazione regolare a tratti S ; se S è invertibile e (M, S^{-1}) è un sistema dinamico allora (M, S) si dirà un sistema dinamico invertibile. I punti x tali che $S^k x$ non è un punto singolare per tutti i $k \geq 0$

³ È utile ricordare che gli insiemi di Borel definiti come la più piccola classe di insiemi che contiene gli insiemi aperti e che è chiusa rispetto a combinazioni numerabili di operazioni di unione, intersezione e complementazione, c.f.r. osservazione all'equazione (15.1) in §15. Gli insiemi di Borel sono una classe di insiemi misurabili rispetto a "tutte" le misure che consideriamo, ossia misure completamente additive definite almeno sugli insiemi di Borel. Data una tale misura μ chiameremo μ -misurabili anche gli insiemi E che differiscono da un insieme boreliano E' per un insieme N di misura esterna nulla rispetto a μ : ossia differiscono per un insieme N che, pur non essendo un insieme boreliano, è contenuto in una successione di insiemi boreliani la cui misura tende a zero. Questi insiemi si dicono anche " μ -misurabili mod 0" e si estende la misura μ ad essi assegnando loro la misura $\mu(E) = \mu(E')$. La misura μ così estesa resta completamente additiva, [DS] Ch. 3.

Una funzione f con valori in R è detta μ -misurabile se esiste un insieme N con misura esterna nulla tale che $f^{-1}(E)/N$ è misurabile mod 0 for all Borel sets $E \subset R$.

Infine: la differenza fra misurabile e non misurabile non è per nulla trascurabile: non può essere ignorata a meno che non si abbia abbastanza autocontrollo da evitare l'uso del sinistro assioma della scelta, si vedano i problemi [7], [8] e il commento bibliografico.

⁴ Non deve apparire strano che una tale concezione, accettabile o di fatto accettata senza ulteriore discussione dai fisici che conosco, possa risultare non naturale o addirittura repellente a molti matematici (che spesso trattano gli argomenti di cui qui si parla senza questa ipotesi). Nulla può essere fatto per convincere chi non accetta questo punto di vista: la questione non è scientifica ma ha natura squisitamente metafisica (e quindi è priva di interesse generale).

formano l'insieme dei punti regolari; se (M, S) è invertibile i punti regolari sono quelli per cui $S^k x$ non è singolare per $k \in (-\infty, +\infty)$.

(ii) Dato un sistema dinamico (M, S) si dice che un insieme A chiuso e invariante (cioè tale che $A \supseteq SA$) è un insieme attraente se esiste un intorno $U \supset A$ tale che tutti i punti $x \in U$ evolvono in modo che la loro distanza da A tenda a 0 nel senso che $d(S^n x, A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(iii) L'unione di tutti gli intorni U di A che hanno questa proprietà si dice il bacino globale di attrazione di A , mentre ognuno di essi si chiama un "bacino d'attrazione".

Un insieme attraente si dice minimale se non contiene insiemi attraenti diversi da se stesso.

Questa definizione di sistema dinamico estende quella che abbiamo finora usato in questo capitolo perché permette singolarità, e perfino discontinuità, sullo spazio delle fasi M e/o sulla trasformazione di evoluzione S . Quando le singolarità sono assenti, sia su M che in S , il sistema dinamico è chiamato "differenziabile", mentre se discontinuità sono assenti in S il sistema è un caso molto particolare di "sistema dinamico topologico". Formalmente:

2 Definizione (sistemi dinamici topologici e differenziabili):

(1) Un sistema dinamico topologico (M, S) è costituito da uno spazio metrico compatto M e da una trasformazione continua S di M in se. Se S ha inversa continua allora anche (M, S^{-1}) è un sistema dinamico topologico e (M, S) si dice invertibile.

(2) Se M è una superficie differenziabile compatta e S una sua trasformazione differenziabile (M, S) è un "sistema dinamico differenziabile"; se S è invertibile con inversa differenziabile (cioè se S è un diffeomorfismo) anche (M, S^{-1}) è un sistema dinamico differenziabile e si dice che (M, S) è invertibile o anche che è un diffeomorfismo.

Immaginiamo di scegliere a caso un dato iniziale u nel bacino di attrazione U di un insieme attraente A . Con questo si intende che consideriamo un generatore P di numeri casuali ideale che produca una distribuzione di probabilità $\mu_P \equiv \mu_0$ su U , c.f.r. §22 definizione 3.

Data un'osservabile F definita sullo spazio delle fasi considereremo il limite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(S^k u) = \langle F \rangle(u) \quad (23.1)$$

dove u è un dato iniziale scelto a caso, ossia un elemento della successione u_1, u_2, \dots generata in U dal generatore di dati casuali.

In generale la media (23.1) dipende dal punto u usato come dato iniziale (sebbene abbiamo visto al §22 che esistono casi semplici in cui non ne dipende, a parte un insieme di misura nulla); quindi se (M, S) è un sistema dinamico e A un insieme attraente con bacino U si pone:

3 Definizione (statistica di un moto casuale):

Data una successione u_1, u_2, \dots di dati iniziali scelti a caso con una distribuzione μ_0 si consideri un'osservabile F e le sue medie $F_j = \langle F \rangle(u_j)$; si supponga

che queste medie F_j siano “essenzialmente indipendenti dai dati u_j ”, cioè che esista una quantità m_F tale che $F_j = m_F$, tranne che per un numero di valori di j che ha densità nulla.⁵ Si supponga anche che questo accada per tutte le osservabili di una vasta classe \mathcal{F} prefissata (ad esempio almeno tutte le funzioni continue). Allora si dice che la distribuzione μ_0 prodotta dal generatore di dati casuali P ha una statistica ben definita rispetto a S e \mathcal{F} .

Il numero m_F si può, allora, scrivere come un integrale:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(S^k u) = \int_A F(v) \mu(dv) \quad \text{per } F \in \mathcal{F} \quad (23.2)$$

ove μ è una distribuzione di probabilità con supporto su A ⁶ (ossia $\mu(A) = 1$) che possiamo chiamare anche la *statistica* di μ_0 .

Si noti che μ_0 è una distribuzione non invariante (in generale): e quindi μ_0 non va confusa con μ che è invece invariante, c.f.r. la seguente osservazione (ii).

Osservazioni:

- (i) La distribuzione μ si dirà la *statistica* associata al generatore casuale P sull'insieme attraente A . Tale statistica (se esiste) è indipendente con probabilità 1 rispetto alla scelta del dato iniziale con distribuzione μ_0 .
- (ii) Una proprietà importante di μ è che $\mu(E) = \mu(S^{-1}E)$, per ogni $E \subset A$ che sia μ -misurabile: è detta “ S -invarianza” della distribuzione μ .
- (iii) Se P è solo un generatore approssimato di punti casuali la definizione va intesa in modo naturale aggiungendo, ovunque necessario, l'attributo di approssimato.
- (iv) Se μ_0 , è una distribuzione invariante, in generale, il limite (23.1) esiste per tutte le funzioni F che siano μ_0 -misurabili e per μ_0 -quasi tutte le scelte di u : è il teorema di Birkhoff, c.f.r. problemi dei §22 e §24. Tuttavia il valore del limite può essere una funzione non banale (cioè realmente dipendente da u e non μ_0 -quasi ovunque costante).
- (v) Si potrebbe pensare, in relazione alla precedente osservazione (iv), che la proprietà di invarianza di μ_0 non sia necessaria, salvo casi di solo interesse matematico. e che quindi si possa dire molto in generale che μ_0 -quasi tutti i dati iniziali sono tali che il limite (23.1) esiste, anche se può essere una funzione non banale di u . Ma questo invece *non è vero* in casi semplici e

⁵ La densità è definita naturalmente come il limite per $K \rightarrow \infty$ del numero di $j \leq K$ che hanno la proprietà in questione diviso per K stesso.

⁶ La corrispondenza $F \rightarrow \langle F \rangle = m_F$ è una corrispondenza lineare e continua rispetto alla convergenza uniforme delle successioni di osservabili, conserva la positività (ossia $\langle F \rangle \geq 0$ se $F \geq 0$) e $\langle 1 \rangle = 1$: e questa è una delle possibili definizioni astratte della nozione di misura di probabilità μ . La misura di un insieme E aperto può essere definita come estremo superiore dei valori di $\mu_0(F)$ al variare di F fra le funzioni continue non negative, ≤ 1 , e nulle fuori di E ; tale misura si estende agli insiemi chiusi E ponendo $\mu_0(E) = 1 - \mu_0(M/E)$ e a tutti gli insiemi boreliani.

interessanti e quindi occorre fare attenzione nel supporre *a priori* questa proprietà. Un esempio di un caso in cui μ_0 è addirittura dotata di una densità rispetto alla misura di volume ma il limite (23.1) non esiste per moltissime funzioni F su un insieme aperto di dati u è discusso nel problema [6].

(vi) il limite (23.2) potrebbe non esistere o perché c'è dipendenza dal dato iniziale oppure perché il limite davvero non esiste per qualche F e per “molti” dati iniziali u .

Sarà utile formalizzare alcune ulteriori varianti delle definizioni di sistema dinamico finora incontrate: le facciamo precedere da un elenco di alcuni concetti è bene porre in forma precisa anche se un pó pesante e apparentemente pignola.

(a) Una trasformazione S di uno spazio metrico separabile M sul quale sia definita una misura boreliana, *c.f.r.* nota ³, μ si dice μ -misurabile mod 0 se esiste un insieme di μ -misura nulla N al di fuori del quale S è ovunque definita e ivi assume valori fuori di N , e inoltre per ogni insieme boreliano $E \subset M/N$ l'insieme $S^{-1}E$ è boreliano, *c.f.r.* nota ⁴.

(b) Una trasformazione μ -misurabile mod 0 è *invertibile* mod 0 se l'insieme di misura nulla N può essere scelto in modo che S sia invertibile su M/N e la S^{-1} sia μ -misurabile mod 0.

(c) Se S è una trasformazione μ -misurabile e invertibile mod 0 allora tali sono S^n per $n \in \mathbb{Z}$ intero e queste trasformazioni formano un *gruppo* μ -misurabile di trasformazioni di M . Se invece solo S è μ -misurabile le trasformazioni $(S^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ formano un *semigrupp* μ -misurabile mod 0.

(d) Similmente sia $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ una famiglia di trasformazioni μ -misurabili mod 0, con $S_0 = 1$ e si supponga che l'insieme N di misura nulla, fuori del quale le S_t sono definite, possa essere scelto t -indipendente per ogni famiglia *numerabile* di valori di t sia, inoltre, $S_t S_{t'} = S_{t+t'}$ per $t, t' \in \mathbb{R}$. Allora $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ è un *flusso* μ misurabile su M . Se invece questo accade solo per le trasformazioni della famiglia S_t con $t \geq 0$ allora $(S_t)_{t \geq 0}$ è un *semiflusso* μ misurabile.

Nel seguito considereremo spesso flussi o gruppi di trasformazioni, oppure semigrupp o semiflussi, μ -misurabili mod 0 rispetto a qualche misura μ . Quindi è utile la seguente definizione astratta di sistema dinamico “metrico”.

4 Definizione (sistema dinamico metrico, discreto e continuo):

(1) una terna (M, S, μ) costituita da un insieme chiuso M , da una distribuzione di probabilità μ sui boreliani di M e da una trasformazione S di M μ -misurabile e μ -invertibile mod 0 e rispetto alla quale μ sia invariante ⁷ si dirà un sistema dinamico metrico discreto bilatero (se invece S non è invertibile allora si dirà unilatero).

(2) una terna (M, S_t, μ) costituita da un insieme chiuso M , da una distribuzione di probabilità μ sui boreliani di M e da un gruppo (o semigrupp) $t \rightarrow S_t$ di trasformazioni μ -misurabili mod 0 rispetto al quale μ sia invariante⁷,

⁷ Ossia $\mu(S^{-1}E) = \mu(E)$ per ogni insieme misurabile E .

si dirà un sistema dinamico metrico continuo, oppure flusso (o semiflusso) metrico continuo.

Osservazioni:

(i) Cadenzando le osservazioni di un sistema dinamico metrico continuo a intervalli di tempo costanti si ottiene un sistema dinamico metrico discreto.
(ii) Ma anche se gli intervalli di tempo non sono costanti, e sono cadenzati ad un evento \mathcal{P} si ottiene un sistema dinamico discreto cui è associata una naturale misura invariante ν . Si chiami, infatti, $\tau(x)$ l'intervallo di tempo intercorrente fra un'osservazione cadenzata effettuata in x e la successiva, che avrà luogo in $Sx = S_{\tau(x)}x$; si vede che i punti y dello spazio possono essere individuati da (x, τ) se $\tau \in [0, \tau(x)]$ è il tempo che trascorre fra la realizzazione dell'evento $x \in \mathcal{P}$ che precede y nel suo moto e il momento in cui il moto raggiunge $y = S_{\tau}x$.⁸ Allora la distribuzione di probabilità μ , potrà essere scritta nella forma $\mu(dy) = \nu(dx)d\tau$, ove ν è una misura sullo spazio degli eventi che godono della proprietà \mathcal{P} , ed è facile rendersi conto che ν è una misura invariante sullo spazio degli eventi cadenzati.

Dunque se P è un generatore casuale ideale la terna (M, S, μ) , ove μ è la statistica dei moti generati dalla successione di dati iniziali casuali prodotta da P , definisce (quando la statistica μ esiste) quello che si chiama nella definizione 4 un “sistema dinamico metrico”. E dalla teoria dei sistemi dinamici possiamo immediatamente mutuare alcune nozioni qualitative ben studiate fra le quali le nozioni di “ergodicità”, “mescolamento”, “spettro continuo”, “isomorfismo a schema di Bernoulli” e varie altre nozioni di teoria dei sistemi dinamici quale quella di *entropia positiva* (c.f.r. §26). Corrispondentemente il generatore P di dati casuali, e la corrispondente statistica quando esiste, si dirà “ergodico”, “mescolante”, “a spettro continuo”, “Bernoulli”, “a entropia positiva”, etc. Recapitoliamo quindi alcune definizioni. ■

5 Definizione (ergodicità):

Dato un sistema dinamico metrico (M, S, μ) sia F una costante del moto misurabile e limitata, ossia F è una funzione su M μ -misurabile (c.f.r. nota³) e limitata con $F(u) = F(Su)$ salvo un insieme di μ -probabilità nulla di valori di u . Se F è necessariamente costante allora la distribuzione μ si dice ergodica o indecomponibile.

Osservazioni:

(i) Se (M, S, μ) è un sistema dinamico metrico, in base al teorema generale di Birkhoff (c.f.r. problemi [2] dei paragrafi §22 e §24) si deduce che la media asintotica $\overline{F}(u) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} F(S^k u)$ esiste “con μ -probabilità 1” (ossia per $u \notin N_F$ con $\mu(N_F) = 0$). Se μ è ergodica allora, poiché tale media \overline{F} è ovviamente una costante del moto, ne segue che è indipendente

⁸ Si suppone qui che tutti dati y facciano seguito, nel loro moto, ad un evento cadenzante x e siano seguiti da un tale evento $x' = Sx$.

da u e, in tal caso:

$$23.3 \quad \overline{F}(u) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} F(S^k u) = \int_M \mu(dv) F(v) \quad (23.3)$$

per μ -quasi tutti gli u (“ μ -quasi ovunque”): la seconda relazione in (23.3) si ottiene dalla prima integrando membro a membro rispetto a μ e usando che μ è per ipotesi una distribuzione di probabilità invariante e che, *inoltre*, $\overline{F}(u)$ non dipende da u .

(ii) Viceversa se per ogni F in L_1 (o in un insieme di funzioni dense in L_1) (23.3) vale quasi ovunque (cioè fuori di un insieme N_F di μ -probabilità 0) allora non esistono costanti del moto non banali e la statistica μ è ergodica.

(iii) Se P è un generatore di dati casuali con una distribuzione di probabilità S -invariante μ e se (M, S, μ) è ergodico allora la (23.3) si può leggere anche al modo seguente: “quasi tutti i dati iniziali ammettono statistica e tale statistica è proprio μ ”: *c.f.r.* problema [44] del §21.

(iv) Il requisito che F sia misurabile *non è una sottigliezza*, *c.f.r.* problemi [7], [8].

(v) I problemi del §21 e quelli alla fine di questo paragrafo forniscono alcuni esempi importanti e classici di sistemi dinamici metrici ergodici.

6 Definizione (mescolamento):

Dato il sistema dinamico metrico (M, S, μ) si supponga che per ogni coppia F, G di osservabili (regolari a tratti) si abbia:

$$23.4 \quad C_{F,G}(k) \equiv \int_M \mu(du) F(S^k u) G(u) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \left(\int_M \mu(du) F(u) \right) \left(\int_M \mu(du) G(u) \right) \quad (23.4)$$

allora la distribuzione μ si dice “mescolante”. La funzione $C_{F,G}(k)$ si dice funzione di correlazione fra F e G nel sistema dinamico (M, S, μ) .

Osservazioni:

(i) Dato (M, S, μ) è facile vedere che se una statistica μ è mescolante allora (M, S, μ) è anche ergodico. Infatti la validità della (23.4) per le funzioni regolari a tratti ne implica, per la loro densità in L_1 , la validità per tutte le funzioni $F, G \in L_1$ limitate. E allora la funzione $\overline{F}(u)$ definita dal limite (23.3) è tale che $\overline{F}(u) \equiv \overline{F}(Su)$ e si può applicare la (23.4) a $F = G = \overline{F}(u)$ trovando: $C_{\overline{F}, \overline{F}}(k) \equiv \int_M \mu(du) \overline{F}(u)^2 = \left(\int_M \mu(du) \overline{F}(u) \right)^2$. Quindi $\overline{F}(u)$ è costante e (M, S, μ) è ergodico.

(ii) Un insieme attraente che ammette una statistica mescolante si dice “*caotico*”: questa è una delle tante definizioni alternative di caos; ne incontreremo altre (e altre ne abbiamo già incontrate). Di solito le varie definizioni non sono matematicamente equivalenti, anche se in pratica non si incontrano mai sistemi caotici in un senso e non in un altro (se non per motivi “banali”, quali ad esempio il caso di sistemi composti da due sistemi caotici indipendenti, che ovviamente corrispondono a un sistema dinamico neppure ergodico).

La seguente definizione è una versione astratta della definizione già discus-

sa nei §21 e §22:

7 Definizione (sistemi metrici a spettro continuo):

Un sistema dinamico metrico (M, S, μ) si dice a spettro continuo se esiste una famiglia \mathcal{F} densa in $L_2(\mu)$ e per ogni $F \in \mathcal{F}$, la trasformata di Fourier della funzione $C_{F,F}(k)$ in (23.4) è una funzione che ha la forma

$$23.4a \quad \hat{C}_{F,F}(\omega) = \left(\int F d\mu \right)^2 \delta(\omega) + \Gamma_F(\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (23.5)$$

ove $\delta(\omega)$ è la delta di Dirac e $\Gamma_F(\omega)$ è sommabile rispetto alla misura di Lebesgue $d\omega$ su $[-\pi, \pi]$.

Osservazioni:

- (i) Si può dimostrare che se un sistema dinamico metrico ha spettro continuo allora è mescolante, [AA],[G2].
- (ii) Si potrebbe anche dire, imitando la definizione 1 in §22 o la definizione 3 in §21, che il sistema ha spettro continuo se μ -quasi tutti i dati generano un moto sul quale tutte le osservabili $F \in \mathcal{F}$ hanno spettro continuo: si può verificare che questo è equivalente alla definizione data sopra.
- (iii) In tutti gli esempi che conosco la famiglia \mathcal{F} può essere scelta $\mathcal{F} = L_2(\mu)$. Di solito la nozione di spettro continuo è data con $\mathcal{F} = L_2(\mu)$.

Per il momento soprassediamo alle definizioni di isomorfismo a sistemi di Bernoulli e di sistemi a entropia positiva (c.f.r. §26).

In pratica si può cercare di determinare la statistica di un insieme attraente calcolando sperimentalmente i valori medi $\langle F \rangle$ delle osservabili F più importanti o semplici. Questo può essere fatto solo utilizzando un campionamento dei dati iniziali secondo una statistica μ_0 approssimata, c.f.r. §22, e una corretta discussione ed esposizione dei risultati dovrebbe sempre essere accompagnata da una descrizione della selezione casuale dei dati prescelta.

Concludiamo citando un interessante risultato che segue da teoremi generali di teoria ergodica: le statistiche possibili μ , associate alle varie distribuzioni μ_0 corrispondenti a generatori casuali diversi, possono essere espresse in termini delle *statistiche ergodiche*, ossia delle statistiche μ_i tali che il sistema dinamico (M, S, μ_i) è ergodico, qualora queste ultime formino un insieme finito numerabile. In tal caso si trova:

$$23.5 \quad \mu(E) = \sum_i \alpha_i \mu_i(E), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_i \alpha_i = 1 \quad (23.6)$$

e questa decomposizione è *unica*. È detta *decomposizione baricentrica* o *ergodica* per ovvii motivi e questa unicità induce a dire che l'insieme delle statistiche è un *simplexso*⁹ e che le statistiche ergodiche ne sono i punti estremali.

⁹ Si dice che una figura geometrica in R^n è un *simplexso* se ogni punto interno può essere rappresentato come il baricentro di un'unica distribuzione di masse poste sui punti estremali della figura: così un segmento è un simplexso in R^1 , un triangolo lo è in R^2 , un tetraedro in R^3 etc.

Non discuteremo la dimostrazione (*c.f.r.* [G2]) perché questo risultato rivestirà qui solo un'importanza concettuale filosofica.

Spesso le statistiche ergodiche formano un insieme *non numerabile* allora vale abbastanza in generale (ad esempio se (M, S) è un sistema dinamico topologico nel senso della definizione 2) una formula del tipo della (23.6) con “la somma sostituita da un integrale”, in un senso opportuno che non è il caso di discutere qui, *c.f.r.* (26.7).

La (23.6) (o il suo analogo in forma integrale nel caso non numerabile) dicono che sostanzialmente le sole statistiche diverse possibili sono quelle ergodiche, dal momento che le altre si possono interpretare come *miscuglio statistico delle precedenti*.

Problemi

[1]: (*gatti*) Si consideri il sistema dinamico (M, S) , “gatto di Arnold” o la sua “radice”, *c.f.r.* problemi [3] e [12] del §22, e si dimostri che M stesso è un insieme attraente minimale. (*Idea:* L'attrattività è chiara essendo M tutto lo spazio delle fasi. La minimalità segue dalla proprietà che la media di ogni osservabile è quasi ovunque uguale all'integrale della medesima osservabile su M , *c.f.r.* [6] del §22, e quindi quasi tutti i punti hanno certamente traiettorie dense in M .)

[2]: Si dimostri che la statistica della scelta di dati iniziali a caso con distribuzione $\mu_0(d\psi) = d\psi_1 d\psi_2 / (2\pi)^2$ nel sistema dinamico del problema [1] è $\mu = \mu_0$. (*Idea:* La distribuzione di probabilità μ_0 è invariante.)

[3]: (*gatto ergodico*) Si mostri che il “gatto di Arnold”, *c.f.r.* [1], è tale che *non* tutti i punti hanno statistica $\mu(d\psi) = d\psi_1 d\psi_2 / (2\pi)^2$ (sebbene quasi tutti, rispetto alla distribuzione proporzionale all'area, sì). (*Idea:* Ad esempio $\underline{\psi} = \underline{0}$ ha una statistica diversa (quale?) e così pure un qualsiasi punto periodico, *c.f.r.* problema [11], §22.)

[4]: Si consideri un punto materiale che si muove su un quadrato Q di lato $2L$ con condizioni periodiche al bordo. Al centro O di Q si erge un potenziale $v(\underline{x}) \geq 0$, di classe C^∞ , a simmetria circolare attorno ad O e non nullo solo in un intorno U_ε di raggio $\varepsilon \in (0, L/2)$ e monotono decrescente in funzione di $|\underline{x}|$ con pendenza mai nulla per $|\underline{x}| > 0$ finché $v(\underline{x}) > 0$. Lo spazio delle fasi è la superficie $\frac{\dot{x}^2}{2m} + v(\underline{x}) = E$ con $E > 0$ fissato. I punti dello spazio delle fasi possono essere descritti dalle due coordinate cartesiane di \underline{x} e dall'angolo φ formato dalla velocità con l'asse delle ascisse. Il moto di un dato iniziale (\underline{x}, φ) sarà denotato $(\underline{x}', \varphi') = S_t(\underline{x}, \varphi)$ e definisce un sistema dinamico hamiltoniano che conserva la misura di Liouville μ che a meno di un fattore costante è $d\underline{x}d\varphi$ se \underline{x} è fuori del cerchio U_ε di raggio ε , ove si staglia il potenziale.

Si considerino le osservazioni cadenzate all'evento “il punto materiale entra nel cerchio U_ε ”. Le “collisioni” con U_ε possono essere caratterizzate dal parametro $s \in [0, 2\pi\varepsilon]$ che dà l'ascissa sulla circonferenza del punto di collisione e dall'angolo di incidenza $\vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ formato dalla normale esterna alla circonferenza nel punto di collisione e la direzione di ingresso.

(a) Se (s', ϑ') denota la collisione successiva ad una data collisione (s, ϑ) si mostri che la trasformazione $S(s, \vartheta) = (s', \vartheta')$ è ben definita per *tutti* i dati (s, ϑ) (cioè per tutti i moti che *iniziano* con una collisione).

(b) Si mostri che esistono dati che non soffrono alcuna collisione e che tali dati hanno misura nulla.

(c) Si mostri poi che la misura $\nu(ds d\vartheta) = -\cos \vartheta ds d\vartheta$ è S -invariante (e si giustifichi il nome di “misura di Liouville” che si può dare a tale misura, mostrando che può essere costruita a partire dalla misura di Liouville a mezzo della osservazione seguente la definizione 3).

(d) Infine si mostri che la trasformazione S che genera le osservazioni cadenzate è singolare nei punti (s, ϑ) cui segue una collisione tangente.

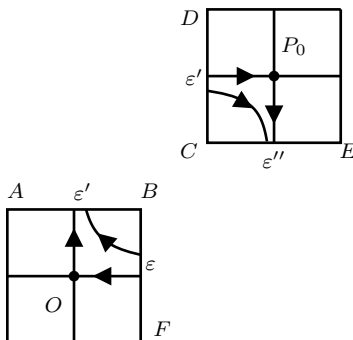
[5]: Si immagini ora, nel contesto del problema precedente, che sul tavolo Q sia

disegnata una curva γ chiusa che non interseca il cerchio U_ε , e per fissare le idee si supponga che tale curva sia $x_1 = a = \cos t$, ($2\varepsilon < |a| < L/2$). Sia Γ una striscia attorno a γ . Si supponga che in Γ operi una forza conservativa che attrae verso γ (ad esempio un potenziale $w(x_1, x_2) = f(x_1)$ di classe C^∞ decrescente dal bordo di Γ verso γ e con minimo quadratico su γ). Infine si supponga che nella regione Γ il moto del punto soffra di un attrito che si oppone al moto generando una forza $-\lambda(x_1)\dot{x}_1$, con $\lambda(x_1) \geq 0$, che è non nulla solo in Γ e nell'intorno di γ vale una costante $\lambda > 0$. Si mostri che quasi tutti i dati iniziali evolvono tendendo asintoticamente ad un moto periodico che si svolge su γ . Dunque questo è un esempio di un sistema in cui le osservazioni cadenzate alle collisioni con il cerchio U_ε sono poco significative in quanto la collisione non è una proprietà ricorrente. Si mostri che, ciononostante, esiste un insieme di misura nulla non vuoto di dati per i quali la collisione con U_ε è ricorrente.

[6]: Si consideri un'equazione differenziale nel piano R^2 che negli intornoi Q_O, Q_P di lato 2ℓ di $O = (0, 0)$ e $P = (x_0, y_0)$ (con $x_0, y_0 > 4\ell$) ha, rispettivamente, la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -\lambda_1(x - x_0) \\ \dot{y} = \lambda_2(y - y_0) \end{cases}$$

con $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Si immagini di continuare il campo vettoriale $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ che definisce il secondo membro dell'equazione in modo che, considerando la figura, il lato AB evolva in un tempo τ nel lato CD senza espansione nè contrazione, e il lato CE evolva in BF allo stesso modo.



Si mostri che se F è una funzione che assume valore a in Q_O e $b \neq a$ in Q_P allora il valore medio di F al tempo T su una traiettoria che ha inizio su BF con $y > 0$ è $\sim \frac{a\lambda_2 + b\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ se valutata ai tempi in cui il punto traversa BF mentre ha valore $\sim \frac{a\lambda_1 + b\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ se valutata agli istanti in cui il punto traversa CD . Se ne deduca che, quindi tutti i dati iniziali $u = (x, y)$ in Q_0 e con $y > 0$ sono tali che il limite (23.1) non esiste per queste funzioni F .

(Idea: L'esempio è costruito in modo che i tempi T_j, T'_j definiti in seguito siano facilmente calcolabili esattamente. Se il moto inizia su BF , ad esempio, ad altezza $\varepsilon_0 > 0$ il tempo che trascorre all' n -mo arrivo su BF è $T_0 + T'_0 + \dots + T_{n-1} + T'_{n-1} + (\tau + \tau')(n-1)$ se T_k è il tempo che necessario per andare da BF a AB dopo aver visitato k volte BF e T'_k è il tempo necessario per andare da DC a BF , e τ è il tempo speso da AB a DC , τ' quello da CE a BF , che sono indipendenti da ε_0 .

Il tempo $T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}$ è speso in Q_0 e $T'_0 + \dots + T'_{n-1}$ in Q_{P_0} . Similmente all' n -mo arrivo in CD il tempo passato è $T_0 + \dots + T_{n-1}$ in Q_0 e $T'_0 + \dots + T'_{n-2}$ in Q_{P_0} . Poiché $T_k = (\lambda_1/\lambda_2)^{2k} \lambda_2^{-1} \log \varepsilon_0^{-1}$, $T'_k = (\lambda_1/\lambda_2)^{2k+1} \lambda_2^{-1} \log \varepsilon_0^{-1}$, la media all'arrivo in BF è $(a + b\lambda_1/\lambda_2)/(1 + \lambda_1/\lambda_2)$, asintoticamente per $n \rightarrow \infty$, e calcolata all'arrivo su DC è invece $(a + b\lambda_2/\lambda_1)/(1 + \lambda_2/\lambda_1)$.

[5.3.7]: (insiemi e funzioni non misurabili) Si consideri la trasformazione $Sx = x + r \bmod 1$ di $M = [0, 1]$ in se e il sistema dinamico metrico (M, S, μ) con $\mu(dx) = dx$. Sia r irrazionale. Si consideri l'insieme di tutte le traiettorie ξ distinte che sono generate dalla dinamica S . Si scelga un punto $x\xi(\xi)$ su ogni traiettoria ξ e si consideri l'insieme E dei punti così ottenuti al variare di ξ fra tutte le traiettorie. L'insieme E può essere

pensato coime una famiglia di etichette che distinguono le traiettorie ξ .

(a) si mostri che l'insieme E non è misurabile rispetto alla misura dx (cioè E non è un insieme di Borel né differisce da un tal insieme per un insieme di misura sterna nulla (c.f.r. nota³).

(b) si definisca la funzione $F_E(x)$ che associa ad x l'etichetta della traiettoria su cui si trova x . Si mostri che questa funzione è una costante del moto ma non è misurabile rispetto alla misura dx .

(c) si verifichi che nella costruzione di E (e quindi di F_E) si è fatto uso del sinistro assioma della scelta.

(Idea: Gli insiemi $E_n = E + nr \bmod 1$, $n \in \mathbb{Z}$, sono due a due disgiunti e $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} E_n = [0, 1] = M$: quindi se E fosse misurabile dovrebbe a dx essere S -invariante, laddove ha misura 1).

[5.3.8]: Si verifichi che l'analisi in [5.3.7] può essere applicata *verbatim* ad ogni sistema ergodico (M, S, μ) in cui μ attribuisce misura nulla a punti singoli e in cui M contiene un continuo di punti. In altre parole assegnando etichette diverse due a due alle traiettorie di un sistema dinamico ergodico definisce un insieme E di etichette che, salvo casi banali, non è μ -misurabile.

Bibliografia: [AA68], [Ga81]. Senza ricorrere al sinistro assioma della scelta è impossibile costruire un esempio di un insieme non misurabile in $[0, 1]$ (say): così si potrebbe ripudiare l'assioma della scelta e accettare l'assioma (parimenti sinistro) che tutti gli insiemi in $[0, 1]$, o su una varietà, sono misurabili rispetto alla misura di Lebesgue. Ma sarebbe oltremodo saggio ripudiare entrambi (nessuna conseguenza spiacevole o anche solo notevole ne seguirebbe): invece un esempio del danno che l'assioma della scelta può produrre è dato dal suo uso nell'articolo di rassegna assai influente nel secolo XX, [EE11], c.f.r. note #98 e #99, p. 90, per criticare e ripudiare l'ipotesi ergodica di Boltzmann. Si veda [Ga99a], Ch. 1.9 per un'analisi critica.

┐

┐

┐

┐

§24 *Ordinamento del Caos. Basi dinamiche ed esponenti di Lyapunov.*

Su un insieme attraente A per una evoluzione S possono esistere un gran numero di distribuzioni di probabilità invarianti ed ergodiche. Questo è in particolare vero per gli *insiemi attraenti strani* che possono anche essere definiti come appunto tali da ammettere un gran numero di statistiche ergodiche.

Ma abbiamo visto che “per ragioni di tradizione culturale” le scelte casuali di dati iniziali, nel bacino di un insieme attraente, eseguite con una distribuzione μ_P che ammette una densità rispetto alla misura di volume svolgono un ruolo privilegiato.

In linea di principio anche tali scelte, come quelle più generali, potrebbero non condurre ad una statistica o condurre ad una statistica non ergodica, *c.f.r.* l’ esempio del problema [6] in §23 e problema [28]. Tuttavia di solito la statistica associata a tali μ_P è *anche* ergodica e indipendente dalla particolare densità che si usa per selezionare i dati iniziali (se la scelta casuale dei dati iniziali è ideale nel senso del §22, *c.f.r.* la discussione della (22.5)), *c.f.r.* [G2].

Pertanto conviene formalizzare la seguente definizione:

1 Definizione (statistica SRB, insiemi attraenti normali):

Si supponga che i dati iniziali di un moto del sistema dinamico (M, S) , c.f.r. §23, siano scelti nel bacino di un insieme attraente A con distribuzione μ_0 con densità rispetto al volume. Se i dati così scelti ammettono, con μ_0 -probabilità 1, una statistica indipendente dai dati stessi allora si dice che l’ insieme attraente A è normale e ammette una statistica naturale μ cui si dà il nome di statistica SRB.

Osservazioni:

- (i) Per l’ appena menzionata importanza delle scelte a caso dei dati iniziali con distribuzione dotata di densità rispetto alla misura di volume (a volte si dice anche con distribuzione “*assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue*” o anche, con una certa ambiguità, solo “*assolutamente continua*”), è di grande interesse trovare casi in cui tale distribuzione SRB possa effettivamente essere studiata.
- (ii) E, essendo assai criticabile l’ importanza attribuita alle scelte dei dati con distribuzioni assolutamente continue, ha pure più in generale interesse studiare famiglie di distribuzioni statistiche su A associate a scelte casuali dei dati iniziali con distribuzioni differenti da quelle assolutamente continue rispetto al volume.

Esiste (solo) una classe generale di sistemi dinamici (M, S) per i quali si possono studiare vaste classi di misure invarianti e fra queste caratterizzare la distribuzione SRB. Sono i sistemi *iperbolici* che sono, in un certo senso, anche i sistemi più intrinsecamente “caotici”.

- (iii) SRB sono le iniziali di Sinai, Ruelle, Bowen.

Conviene dedicare questo paragrafo alla discussione generale delle nozioni e proprietà legate all’ iperbolicità dei moti e rinviare al successivo paragrafo,

§25, la discussione specifica delle distribuzioni SRB.

2 Definizione (iperbolicità, insiemi attraenti Anosov e assioma A):

Dato il sistema dinamico (M, S) , sia X un insieme attraente per S supposta differenziabile in un intorno di X , ivi X dotata di un' inversa S^{-1} differenziabile, e verificante:

(1) (iperbolicità) per ogni $x \in X$ esiste una decomposizione del piano tangente T_x come $T_x = R^s(x) \oplus R^i(x)$ in due piani indipendenti e trasversali (cioè linearmente indipendenti e con dimensioni $d_s > 0$ e $d_i > 0$) che variano con continuità rispetto a $x \in X$, e tali che esistono $\lambda > 0, C > 0$ per cui, per ogni $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} |S^n(x+dx) - S^n(x)| &\equiv |\partial S^n(x) \cdot dx| < Ce^{-\lambda n} |dx|, \quad \text{se } dx \in R^s(x) \\ |S^n(x+dx) - S^n(x)| &\equiv |\partial S^n(x) \cdot dx| > Ce^{\lambda n} |dx|, \quad \text{se } dx \in R^i(x) \end{aligned} \quad (24.1)$$

24.1

(2) (completezza dei moti periodici) i punti delle orbite periodiche in X sono un insieme denso in X .

(3) (transitività) esiste almeno un punto di X la cui traiettoria è densa in X .

Allora se X è una superficie regolare si dice che l'insieme attraente "verifica la proprietà di Anosov". Più in generale X sarà solo un insieme chiuso e si dirà che l'insieme attraente X "verifica l'Assioma A".

Osservazione: Questi sistemi sono particolarmente interessanti perchè il loro insieme attraente è normale e, cioè, ammettono distribuzioni SRB: ma in realtà sistemi con insiemi attraenti che verificano l'assioma A nel senso ora descritto sono *rarissimi*, e la loro importanza finisce con l'essere solo legata all'essere esempi di sistemi con insiemi attraenti normali. Ossia all'essere esempi di sistemi in cui una ben determinata statistica corrisponde alla descrizione del comportamento asintotico di dati iniziali scelti a caso con una distribuzione assolutamente continua rispetto alla misura di volume.

In un sistema dinamico si distinguono i *punti erranti* da quelli *non erranti*. I primi sono i punti x che ammettono un intorno \mathcal{N} tale che $S^n \mathcal{N} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ per tutti gli n abbastanza grandi. Gli altri sono non erranti.

La qualifica di errante potrebbe essere fuorviante poiché si potrebbe pensare che un punto che mai, nella sua evoluzione futura, ritorna presso la posizione iniziale sia errante: ciò *non* è necessariamente vero perché, sebbene il punto possa andare via a mai tornare tuttavia possono esistere punti vicini ad esso che invece ritornano dopo un tempo più lungo di una quantità prefissata, c.f.r. [5.4.28] per un esempio. È importante aver questo punto presente per una corretta comprensione della nozione di sistemi verificanti l'assioma A. Un caso concreto in cui si trova qualcosa di inatteso rispetto al significato letterale della parola "errante" si ha considerando il familiare pendolo in cui si assume come spazio delle fasi l'insieme dei punti con energia $\leq E$ ove E è più grande dell'energia della separatrice: allora tutti i punti sulla separatrice si allontanano dalla loro posizione iniziale; ciononostante è facile rendersi conto che non sono erranti.

Un semplice esempio rilevante per la nozione di punto errante è un sistema Hamiltoniano: se M è una superficie di energia costante e S è una trasformazione canonica di essa, allora tutti i punti sono non erranti in virtù del teorema di ricorrenza di Poincaré. Quanto sopra suggerisce la definizione seguente

3 Definizione: (Sistemi verificanti l'assioma A e sistemi di Anosov)

(1) Si dice che un sistema dinamico differenziabile (M, S) verifica l'assioma A se l'insieme dei punti non erranti è iperbolico, cioè verifica la proprietà (1) della definizione 2, e i punti periodici sono densi, cioè verifica la proprietà (3) della definizione 2 senza essere necessariamente un insieme attraente né transitivo, c.f.r. [Sm].

(2) Un sistema di Anosov è un sistema dinamico (M, S) con M una superficie regolare e S un diffeomorfismo che è iperbolico in ogni punto di M , cioè verifica (1) e (2) della definizione 2 su tutto M (quindi verifica l'assioma A).

Osservazioni:

(i) Un esempio semplice di sistema che verifica l'assioma A è quello descritto nell'esempio (4) seguente la definizione 1 del §22. Esempi meno semplici ma importanti sono discussi nei problemi del §25.

(ii) Se (M, S) verifica l'assioma A per la trasformazione S allora l'insieme Ω dei suoi punti non erranti può non contenere dati con orbite dense. Però i suoi punti non erranti si dividono in insiemi invarianti chiusi e disgiunti C_1, C_2, \dots , in numero finito, su ciascuno dei quali esiste un'orbita densa: questi insiemi si chiamano *insiemi basilari* (teorema di Smale o di decomposizione spettrale), c.f.r. [Sm]. Si dice che l'insieme dei punti non erranti di un sistema che verifica l'Assioma A è unione di un numero finito di insiemi sui quali l'azione di S è *topologicamente transitiva*. Questo significa che dati due insiemi U, V relativamente aperti in C sono tali che $S^k U \cap V \neq \emptyset$ per infiniti valori di k . In realtà l'azione di S sugli insiemi basilari è addirittura *transitiva*, cioè esiste un'orbita densa.

(iii) Inoltre l'insieme dei punti non erranti *attrae tutti* i punti dello spazio M : $d(S^n x, \cup_j C_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. E anzi ogni x tende a *uno solo* degli insiemi basilari, c.f.r. [R3], p. 169. Quindi l'insieme dei punti non erranti conterrà un insieme basilare C che è attraente, e tutti i punti di M abbastanza vicini ad esso sono tali che $d(S^n x, C) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Un insieme attraente minimale X in un sistema che verifica l'assioma A è *necessariamente un insieme basilare*. Quindi ogni sistema che verifica l'assioma A contiene almeno un insieme attraente che verifica l'assioma A¹

(iv) Una nozione simile a quella della transitività topologica è quella del *mescolamento topologico*: se C è un insieme chiuso invariante si dice che l'azione della trasformazione S è *topologicamente mescolante* se dati comunque

¹ La proprietà di assioma A esclude l'esistenza di insiemi basilari C con punti nelle loro vicinanze che, pur evolvendo in modo che $d(S^n x, C) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, si allontanano da C di una distanza $\delta > 0$ che può essere scelta indipendentemente da quanto vicino sia y a C , c.f.r. [R3] p. 167; c.f.r. [5.4.28].

due insiemi U e V in C e relativamente aperti in C esiste un intero \bar{n} tale che per $n > \bar{n}$ si ha $S^n U \cap V \neq \emptyset$. Evidentemente il mescolamento topologico implica la transitività topologica.

(v) Il mescolamento topologico è legato ai sistemi che verificano l'assioma A perchè si dimostra che ogni insieme basilare C_j (c.f.r. (3)) si può rappresentare come unione di un numero finito p_j di insiemi chiusi e disgiunti sui quali la trasformazione S^{p_j} è topologicamente mescolante e transitiva, [R3].

(vi) In generale un sistema di Anosov è un sistema dinamico (M, S) con M varietà regolare e S diffeomorfismo che è iperbolico in ogni punto di M , cioè verifica (1) e (2) della definizione 2 su tutto M (quindi verifica l'assioma A). Però non è noto se in un sistema di Anosov la varietà M stessa sia necessariamente identica all'unione dei suoi insiemi basilari, c.f.r. [R3] p. 171.

Si potrebbe pensare che la struttura degli insiemi basilari non possa cambiare molto se si varia di poco la trasformazione S . Tuttavia perché ciò sia vero si debbono richiedere ulteriori proprietà: una condizione sufficiente è che il sistema goda della seguente proprietà:

4 Definizione: (assioma B) Si supponga che il sistema dinamico invertibile (M, S) verifichi l'assioma A e

(1) Si denotino W_x^i (rispettivamente $W_{x'}^s$) i punti z tali che la distanza $d(S^n z, S^n x) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$ (rispettivamente $d(S^n z, S^n x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$): tali insiemi sono localmente varietà tangenti ai piani instabile (stabile) che in (1) della definizione 1 sono denotati $R^i(x)$ and $R^s(x')$; sono chiamati "varietà instabile globale" di x "varietà stabile globale" di x' e saranno considerate più in dettaglio in seguito.

(2) Si può mostrare che se (M, S) verifica l'assioma A, ([R3], p. 169, per ogni punto $y \in M$ esiste una coppia di punti non erranti x, x' tali che $y \in W_x^i \cap W_{x'}^s$: si supponga che in y le superfici $W_x^i, W_{x'}^s$ si intersechino trasversalmente, ossia il più piccolo piano che contiene i loro piani tangenti in y sia l'intero piano tangente T_y in y .

Allora diremo che il sistema dinamico (M, S) verifica l'assioma B.²

Osservazioni:

(i) L'esempio citato nel commento (i) alla definizione 3 di un sistema che verifica l'assioma A è anche un esempio semplice di sistema che verifica l'assioma B.

(ii) Se un sistema verifica l'assioma B e si perturba S di abbastanza poco si ottiene una trasformazione S' che può essere ancora pensata come S vista in un altro sistema di coordinate su M : questo risultato non banale dice che se S e S' sono abbastanza vicine in C^1 allora esiste una

² Si prende qui licenza di chiamare assioma B quello che in [R3], p. 169, è chiamato *trasversalità forte*: la definizione originale di Smale è *leggermente più debole*, c.f.r. [Sm] p. 778. La nozione qui usata sembra essere quella naturale in considerazione delle congetture di Palis–Smale e dei teoremi di Robbin–Robinson e di Mañé sulla stabilità di questi sistemi, c.f.r. [R3], p. 171.

trasformazione continua e invertibile con inversa continua di M in se (cioè un “omeomorfismo”) tale che $hS = S'h$, c.f.r. [R3] p. 170.

La principale difficoltà, riguardo alla generalità, della definizione appena data è legata alla richiesta di una regolarità di S su A e di una continuità delle derivate di S su A . Il tentativo di svincolarsi dall’assegnare un ruolo privilegiato alle distribuzioni assolutamente continue rispetto alla misura di volume, e più in generale il tentativo di non assegnare un ruolo privilegiato a un particolare sistema di coordinate hanno prodotto vari risultati.

Anzitutto per fissare un quadro in cui introdurre varie nozioni in modo che la discussione sia abbastanza ampia da coprire tutti i casi che si incontrano nelle applicazioni, o almeno da ammettere una naturale generalizzazione ad altri casi interessanti, conviene fissare una volta per tutte un requisito “minimo” di regolarità su S che permetta di esporre varie nozioni e risultati, (che vanno sotto il nome di *formalismo termodinamico* per motivi che dovrebbero diventare chiari in seguito).

La tentazione più forte è di richiedere che S sia analitica (o C^∞) come funzione su uno spazio delle fasi M , e lo spazio M dovrebbe essere esso stesso una superficie analitica (o C^∞) a dimensione l . Però abbiamo già menzionato che di solito i sistemi dinamici (M, S) che si considerano sono associati a osservazioni cadenzate. In tali casi spesso M non risulterà essere una superficie analitica, bensì una superficie analitica a tratti e dotata di bordo; e S non sarà analitica, bensì analitica a tratti. Dunque non è saggio imporre che S e M siano soggette ad un requisito di analiticità o, comunque, regolarità C^∞ .

La seguente nozione di *sistema dinamico regolare* rispetto a una misura μ offre una generalità sufficiente per i nostri scopi (ed è difficile immaginare altri casi in cui non sia sufficiente).

4 Definizione (sistema dinamico regolare): Sia (M, S) un sistema dinamico nel senso della definizione 1 del §23, e μ una misura boreliana su M .

(a) Si dirà che (M, S) è μ -regolare, con parametri $C, \gamma > 0$, se:

(1) L' insieme N dei punti di singolarità di S e, se (M, S) è invertibile, l'insieme N' delle singolarità di S^{-1} sono tali che $\mu(U_\delta(N)), \mu(U_\delta(N')) < C\delta^\gamma$, ove $U_\delta(X)$ denota l'insieme dei punti a distanza $< \delta$ da X . E i punti $x \in M/(\cup_{j=-\infty}^\infty (S^{-j}N))$, o $x \in M/(\cup_{j=-\infty}^\infty (S^{-j}N \cup S^jN'))$ se (M, S) è invertibile, si diranno punti μ -regolari per (M, S) .

(2) Se $\delta(x, y)$ è il minimo fra le distanze di x e y da N e se $d(x, y)$ è la distanza fra x e y nella metrica di M , le derivate $\partial^{\underline{a}} S^{\pm 1}(x)$ verificano:

$$24.2 \quad |\partial^{\underline{a}} S(x) - \partial^{\underline{a}} S(y)| \leq \underline{a}! DC^{|\underline{a}|} \frac{d(x, y)}{\delta(x, y)^{|\underline{a}|+1}} \quad \text{se} \quad d(x, y) < \frac{1}{2} \delta(x, y) \quad (24.2)$$

ove $\underline{a} = (a_1, \dots, a_l)$ sono l indici derivazione, non negativi, e $|\underline{a}| \equiv \sum_i a_i$, $\underline{a}! = \prod_i a_i!$; C, D sono costanti > 0 . E, se (M, S) è invertibile, si richiede l'analoga relazione per S^{-1} (e N' in luogo di N).

(3) La matrice jacobiana $\partial S^{\pm 1}(x)$ verifica la³:

³ Se T è una matrice, $\|T\|$ è il massimo di $|Tu|$ sui vettori unitari u .

$$24.3 \quad \|\partial S(x) \cdot (\partial S(y))^{-1} - 1\| < C \frac{d(x, y)}{\delta(x, y)} \quad (24.3)$$

e la analoga proprietà è richiesta per S^{-1} se (M, S) è invertibile.

(b) Una terna (M, S, μ) con (M, S) che sia μ -regolare e con μ che sia S -invariante ($\mu(E) \equiv \mu(S^{-1}E)$ per ogni E) si chiamerà un sistema dinamico metrico regolare.

Osservazioni:

(i) È chiaro che se (M, S) è μ -regolare allora l'insieme N delle singolarità di S ha μ -misura nulla. La proprietà (ii) dice che la S è analitica a tratti e che la sua singolarità su N non è troppo forte in quanto il raggio di convergenza della sua serie di Taylor $\rightarrow 0$ al più come la distanza da N .

(ii) Se S è μ -regolare e se μ è S -invariante, cioè $\mu(E) = \mu(S^{-1}E)$, sia $\delta_n = n^{-\gamma'}$ con $\gamma' > \gamma^{-1}$. Allora $\sum_n \delta_n^\gamma < +\infty$, cioè $\sum_n \mu(U_{\delta_n}(N)) < \infty$. Ma l'invarianza della μ implica che l'insieme Δ_n dei punti x tali che $S^n x \in U_{\delta_n}(N)$, ossia $\Delta_n \equiv S^{-n}U_{\delta_n}(N)$, ha la stessa misura di $U_{\delta_n}(N)$ e quindi $\sum_n \mu(\Delta_n) < \infty$. Allora (per il teorema di Borel-Cantelli, c.f.r. problemi filosofici [-1] e [0]) μ -quasi tutti i punti appartengono solo ad un numero finito di insiemi Δ_n : il che significa che per μ -quasi ogni x esiste una costante $C(x)$ tale che la distanza di $S^n x$ da N si mantiene maggiore di $C(x)\delta_n$, per tutti gli n .

(iii) Dunque la precedente osservazione fa capire la proprietà saliente delle trasformazioni S che godono della proprietà di μ -regolarità: μ -quasi ogni punto non si avvicina alle singolarità più rapidamente di una potenza del tempo trascorso.

(iv) Per definizione di sistema dinamico (M, S) , c.f.r. definizione 1 del §23, le singolarità di S sono su un numero finito di superfici regolari a tratti e di dimensione inferiore a l . Se μ è una misura assolutamente continua rispetto al volume la proprietà (i) è allora verificata. Le altre due richiedono un'analisi speciale, caso per caso.

(v) Però una S può essere regolare rispetto al volume ma non rispetto ad una o più distribuzioni invarianti μ , o viceversa.

(vi) Nelle applicazioni le ipotesi di regolarità sono talvolta banalmente verificate. Ciò avviene, ad esempio, se S e M sono analitiche (senza singolarità) e S ha matrice jacobiana ∂S non singolare. Quando però non sono proprietà banali l'analisi delle proprietà di regolarità (se vere) è sempre di difficile e interessante verifica.

(vii) La definizione di μ -regolarità è stata formulata in modo che sistemi come i "biliardi", c.f.r. problemi [22], [23], siano fra quelli μ -regolari se μ è la misura di volume sulla loro superficie di energia costante.

Conviene anche considerare esplicitamente i casi in cui S è solo a valori semplici, si dice anche *iniettiva*, ossia $Sx = Sy$ implica $x = y$. O iniettiva mod 0 rispetto ad una misura μ , ossia S è μ -misurabile mod 0 e tale che, fuori di un insieme N di μ -misura nulla, la $Sx = Sy$ implica $x = y$.

Supporremo nel seguito del §24 che S sia iniettiva e, talvolta, che S sia anche invertibile: la differenza è notevole solo nei casi di sistemi dinamici

discreti generati da equazioni irreversibili, quali gli esempi (17.20), (17.28), (17.30), che pur verificando la proprietà di unicità delle soluzioni *non* permettono (in generale) la loro estendibilità all' indietro nel tempo.⁴

Passiamo ora a descrivere varie nozioni qualitative necessarie alla formulazione dei più semplici risultati il cui insieme fornisce solitamente il quadro generale della teoria qualitativa dei moti caotici. Fra queste quella di *esponenti di Lyapunov* e di *basi dinamiche*.

5 Definizione: (*esponenti di Lyapunov e basi dinamiche di una traiettoria*)
Se (M, S) è un sistema dinamico invertibile e x è un punto regolare (c.f.r. definizione 4) si dice che sulla traiettoria $k \rightarrow S^k x$ è definita una base dinamica $W_1(x), \dots, W_n(x)$ per S se è possibile definire $n = n(x)$ piani $W_1(x), \dots, W_n(x)$ linearmente indipendenti, sottendenti l'intero piano tangente T_x , e tali che:

$$24.4 \quad \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{k} \log \frac{|\partial S^k d\xi|}{|d\xi|} = \lambda_i(x) \quad \text{se } 0 \neq d\xi \in W_i(x) \quad (24.4)$$

ove

(1) $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ si dicono esponenti di Lyapunov associati alla traiettoria,

(2) gli interi $m_j = \dim(W_j)$, $j = 1, \dots, n$ sono le rispettive molteplicità.

(3) Se nessuno degli esponenti λ_j è nullo il punto x si dice iperbolico;

(4) se $\lambda_j > 0$ e $\lambda_{j+1} < 0$ il piano $V_s(x) \equiv W_{j+1}(x) \oplus \dots \oplus W_n(x)$ si dice direzione stabile.

(5) Il piano $V_i(x) = W_1(x) \oplus \dots \oplus W_j(x)$, direzione instabile, è definito analogamente come direzione stabile per S^{-1} .

(6) Più in generale si definiscono i piani caratteristici per S i piani $V_j(x) = W_j(x) \oplus \dots \oplus W_n(x)$ e quelli per S^{-1} come $\tilde{V}_j(x) = W_1(x) \oplus \dots \oplus W_j(x)$. Nel caso di sistemi non invertibili la stessa definizione ha senso, dopo le ovvie modifiche, se esiste una successione di punti non singolari, $k \rightarrow x_k$ con $k \in (-\infty, +\infty)$, tale che $Sx_{k-1} = x_k$ e $x_0 = x$.

Osservazioni:

(i) È chiaro che $\lambda_i(x)$ e $m_i(x)$ non dipendono dal particolare punto x scelto, purchè generi la stessa traiettoria.

(ii) Gli spazi $W_i(x)$ sono invarianti nel senso che $\partial S W_i(x) = W_i(Sx)$.

(iii) L' esistenza di una base dinamica *non* è un fatto così raro come si potrebbe temere. Questo è illustrato dal seguente teorema (Oseledec, Pesin):

I Teorema: Sia (M, S, μ) un sistema dinamico metrico regolare invertibile (nel senso della definizione 3, (c), con M non necessariamente contenente

⁴ Se M è una sfera di raggio abbastanza grande l'evoluzione generata da queste equazioni lascia i dati iniziali in M nella sfera, come si è visto al §17: ma se l'evoluzione viene spinta all' indietro nel tempo allora il moto "esce" dalla sfera M ossia non si può in generale assumere che lo spazio delle fasi sia limitato.

un insieme attraente A più piccolo, nè iperbolico); allora μ -quasi ogni punto x genera una traiettoria i cui punti ammettono una base dinamica. Inoltre gli esponenti di Lyapunov sono costanti del moto, e così le loro molteplicità.

Osservazioni:

(i) Dunque se la distribuzione μ che si usa per scegliere dati a caso su un insieme invariante $A \subseteq M$ (insieme attraente o no) è ergodica μ -quasi tutti i punti ammettono basi dinamiche, e gli esponenti di Lyapunov (e le loro molteplicità) non sono solo costanti del moto (il che segue semplicemente dal fatto che dipendono dalle traiettorie e non dai punti su di esse), ma anche *sono costanti su A* , con probabilità 1 rispetto a μ .

(ii) Sebbene questo sia implicito in quanto detto è bene sottolineare che l'indipendenza degli esponenti di Lyapunov $\lambda_i(x)$ dal punto di un insieme invariante A è vera con probabilità 1 se x è scelto con una distribuzione casuale S -invariante ed ergodica su A . *In particolare questo non significa che non possano esistere punti x di A dotati di esponenti di Lyapunov diversi.*

(iii) Anzi in generale tali punti esistono e possono addirittura formare un insieme denso su A . Inoltre cambiando la distribuzione della scelta casuale su A , da μ a μ' , si otterranno in generale *nuovi* valori degli esponenti di Lyapunov, pure costanti con probabilità 1 rispetto alla nuova distribuzione μ' , se tale distribuzione è ergodica.

(iv) Dunque gli esponenti di Lyapunov non sono una proprietà puramente dinamica, ossia della sola trasformazione S che genera la dinamica; ma sono proprietà di S e *simultaneamente* del metodo che si usa per scegliere i dati iniziali a caso. Se si vogliono, invece, considerare *tutti* i dati iniziali possibili, senza eccezioni, allora gli esponenti di Lyapunov dipendono in generale dal punto, e addirittura possono esistere punti cui *non si può* associare una base dinamica, nè esponenti di Lyapunov (ossia punti nell'intorno dei quali la dinamica S non ha proprietà ben definite di espansione e contrazione degli spostamenti infinitesimi).

(v) Il teorema di Oseledec è anche chiamato *teorema ergodico moltiplicativo* e generalizza il teorema ergodico di Birkhoff (c.f.r. i problemi del §22, e [2], [3] del §24), che può essere chiamato *teorema ergodico additivo*. Quello che a prima vista sorprende è la generalità in cui vale il teorema. Tale generalità può essere ulteriormente estesa perchè l'ipotesi di regolarità di S su M può essere indebolita richiedendo solo che S sia differenziabile μ -quasi ovunque (che è la minima richiesta necessaria per dare senso all'azione $d\xi \rightarrow \partial S(x)d\xi$ di S sui vettori infinitesimi tangenti e quindi alle affermazioni del teorema) e inoltre $\int_M \log_+ \|\partial D\| \mu(dx)$ se $\log_+ x = 0$ for $x < e$ and $\log^+ x = \log x$ if $x \geq 1$.

(vi) Una forma che mette in luce questa assoluta generalità è: “ogni sistema dinamico (M, S, μ) ergodico per cui ha senso l'azione di S su vettori infinitesimi è tale che su μ -quasi ogni punto di M la trasformazione S ha una azione di espansione e contrazione, cioè $\partial S(x)$ è definita μ -quasi ovunque e tale che $\int_M \log(1 + \|\partial S(x)\|) \mu(dx) < +\infty$, è tale che S abbia una azione di espansione e contrazione asintotiche con esponenti di Lyapunov

ben definiti e indipendenti dal punto di inizio del moto, (con μ -probabilità 1)”.

(vii) Un teorema sì generale (praticamente senza ipotesi) *deve* avere una dimostrazione semplice. Questo non vuol dire che la sua dimostrazione non abbia richiesto grandi sforzi e sia sfuggita a molti che pur la ricercavano. Un pó come nel caso del teorema ergodico di Birkhoff la cui dimostrazione sfuggì alle ricerche di vari matematici (fra cui Von Neumann). Si vedano i problemi alla fine del paragrafo per una guida alla dimostrazione.

(viii) Ma è anche chiaro che il teorema, proprio a causa della sua generalità, dovrà risultare *non costruttivo* e quindi poco utile, come il teorema di Birkhoff: il vero problema nelle applicazioni è, dato (A, S, μ) , come identificare i (μ -quasi tutti, ma *non tutti*) punti che hanno esponenti di Lyapunov ben definiti e come trovare le loro basi dinamiche, o come trovare punti che non hanno esponenti di Lyapunov definiti (che possono esistere, pur se eccezionali). Tali questioni hanno grande importanza e vanno studiate caso per caso e di solito generano i problemi matematicamente e fisicamente più interessanti, *c.f.r.* [27], [28] per un esempio assai importante sebbene sia ancora un po' astratto.

(ix) In molti casi la trasformazione S non è invertibile. La definizione 4 allora può essere adattata per definire il sistema di *piani caratteristici*, *c.f.r.* definizione 4, $V_1(x) \supset \dots \supset V_{n(x)}(x)$ via la proprietà:

$$24.5 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log |\partial S^k(x)u| = \lambda_j(x) \quad dx \in V_j(x)/V_{j+1}(x) \quad (24.5)$$

mentre invece i piani $\tilde{V}_j(x)$ non possono (evidentemente) essere definiti (perchè ogni vettore che si dilata con un dato esponente può essere alterato aggiungendovi un vettore che si dilata più lentamente ottenendo un vettore che si dilata allo stesso modo). Qui evidentemente non si può scambiare il ruolo di “dilatante” e di “contraente”, perchè non si ha la S^{-1} .

(x) Però anche se S^{-1} non è definita o porterebbe fuori dello spazio delle fasi prescelto (come nel caso menzionato della dinamica generata dall'equazione di Navier–Stokes troncata) può darsi il caso che la matrice jacobiana ∂S sia invertibile per ogni punto della traiettoria di x e che S sia “invertibile sulla traiettoria di x ”, ossia esista un' unica successione x_h tale che $x_0 = x$ e $Sx_h = x_{h+1}$, $h \in (-\infty, \infty)$ per μ -quasi tutti gli x (questo avviene se S è iniettiva o se S è invertibile su un supporto della distribuzione μ , cioè su un insieme chiuso di probabilità 1).

In questo caso si possono definire lo stesso piani caratteristici “per S^{-1} ”, $\tilde{V}_1 \supset \tilde{V}_2 \supset \dots \supset \tilde{V}_n$ e anche le basi dinamiche. Il teorema sopra dato si estende a questa situazione: cioè, dato (A, S, μ) e se S, S^{-1} sono differenziabili su A allora μ -quasi tutti i punti di A ammettono anche una base dinamica per S^{-1} , [R4]. Si vedano i problemi per una formulazione precisa.

(xi) A volte invece che specificare le molteplicità degli esponenti di Lyapunov di un sistema dinamico metrico (A, S, μ) conviene semplicemente ripeterli secondo la molteplicità. In tal modo il sistema a l gradi di libertà ammette l esponenti di Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ su ogni traiettoria dotata di base dinamica.

(xii) Gli l esponenti di Lyapunov di un punto x dotato di una base dinamica possono anche essere definiti in termini dell'azione di S su superfici infinitesime uscenti da x , invece che in termini dell'azione di S sui soli vettori infinitesimi. Non è difficile verificare, nel quadro della dimostrazione del teorema I (si veda [12] alla fine del paragrafo), che se x ammette una base dinamica si ha:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{|\partial S^n d\xi_1|}{|d\xi_1|} &= \lambda_1(x), \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{|\partial S^n d\xi_1 \wedge d\xi_2|}{|d\xi_1 \wedge d\xi_2|} &= \lambda_1(x) + \lambda_2(x), \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{|\partial S^n d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3|}{|d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3|} &= \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x), \quad \dots
 \end{aligned}
 \tag{24.6}$$

ove $d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots$ denota l'elemento infinitesimo di superficie sotteso dai vettori infinitesimi $d\xi_1, d\xi_2, \dots$, e le relazioni di limite in (24.6) *non* valgono per tutte le scelte dei vettori infinitesimi bensì per *quasi tutte* le scelte delle loro orientazioni sulla sfera unitaria dei vettori tangenti. Perchè, considerando ad esempio il caso in cui tutti gli esponenti siano diversi due a due, la prima delle (24.6) vale solo se $d\xi_1 \notin V_2$, la seconda se $d\xi_1 \notin V_2$ e $d\xi_2 \notin V_3$ etc.

Data dunque una distribuzione μ indecomponibile⁵ su un insieme A attraente rispetto a una trasformazione S differenziabile in un suo intorno, si possono associare ad essa gli l esponenti di Lyapunov, e considerarli come proprietà dell'azione di S sugli elementi di superficie di varia dimensione.

(xiii) La (24.6) fornisce un metodo assai usato sperimentalmente (negli esperimenti al calcolatore e reali) per il calcoli degli esponenti di Lyapunov. Infatti si scelgono a caso, con distribuzione uniforme sulla sfera unitaria dei vettori tangenti, m vettori tangenti indipendenti $d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_m$ e si misura l'espansione asintotica dell'elemento di superficie da essi sotteso: tale espansione è $\lambda_1 + \dots + \lambda_m$, con probabilità 1 rispetto alle scelte di ξ_1, \dots, ξ_m , e rispetto alla scelta di $x \in M$ c.f.r. [BGGs].

(xiv) Si deve sottolineare che se i dati iniziali sono scelti con una distribuzione μ ergodica e (M, S) è μ -regolare allora, come segue dalle definizioni, c.f.r. problemi, gli esponenti di Lyapunov per S sono *opposti* a quelli di S^{-1} . Ma questo *non* significa che “per calcolare il minimo esponente di Lyapunov S basta calcolare quello massimo della trasformazione inversa”, neppure nel caso semplice in cui il sistema ammette un unico insieme attraente.

Infatti la trasformazione S in generale avrà un insieme attraente A *diverso* da quello, A_- , per S^{-1} (che supponiamo pure unico per semplicità). Se allora i dati iniziali sono scelti a caso con la distribuzione μ e se si commette anche un minimo errore di arrotondamento nei calcoli del dato iniziale, o di uno di quelli in cui evolve, tali dati non saranno esattamente sull'insieme attraente su cui è concentrata la distribuzione μ e, quindi, si vedrà che la traiettoria di un moto di S^{-1} *non resta vicina ad A ma evolve verso A_-* !

⁵ Cioè tale che (A, S, μ) è ergodico, c.f.r. definizione 5 in §23.

e quindi le sue proprietà di stabilità non avranno nulla a che vedere con quelle del moto esatto del dato iniziale.

E anche se $A_- = A$ la relazione fra esponenti di Lyapunov per S e S^{-1} non sarà sempre valida: perchè la osservata statistica per S^{-1} con i dati scelti a caso con distribuzione μ sarà diversa da quella per S in presenza di errori di calcolo o arrotondamento. Tali errori faranno sì che le scelte dei dati iniziali siano eseguite con una distribuzione apparente probabilmente assolutamente continua e allora se la *statistica SRB* per S^{-1} è diversa, *c.f.r.* [20], da quella per S gli esponenti di Lyapunov osservati saranno diversi dagli opposti a quelli per S .

Questo significa che le statistiche dei moti potranno esser *completamente diverse* e concentrate su insiemi diversi e attribuire la prima probabilità 1 a un insieme cui la seconda attribuisce probabilità 0 e viceversa (*anche se A e A_- coincidono*). E quindi non ci saranno, in generale, relazioni fra gli esponenti di Lyapunov dei moti verso il futuro e verso il passato.

(xv) Nei casi in cui il sistema sia *reversibile*, ossia nei casi in cui esista una trasformazione regolare isometrica i di M in se tale che $iS = S^{-1}i$, si considerino gli esponenti di Lyapunov di S e S^{-1} per i dati iniziali scelti a caso con distribuzione assolutamente continua rispetto al volume. Si avrà, se gli insiemi attraenti per S e S^{-1} sono normali nel senso della definizione 1, che gli esponenti di Lyapunov di questi moti sono *uguali* (invece che opposti) rispetto a S e S^{-1} .

(xvi) L'osservazione (xiv) è una manifestazione del fenomeno della *irreversibilità* dei moti. E l'osservazione (xv) mostra che *non vi è relazione diretta fra irreversibilità del moto e simmetria per inversione del tempo* a dispetto del fatto che di solito la simmetria delle equazioni del moto rispetto a inversione del tempo venga anche chiamata (impropriamente) “reversibilità” delle equazioni del moto, *c.f.r.* §31 per un'ulteriore discussione.

(xvii) Infine si può mostrare (Pesin, [Pe], che se $\lambda_j > 0$ i piani V_j sono “integrabili”, cioè per μ -quasi tutti i punti x esiste un intorno di x e dentro di esso una superficie regolare $\overline{V}_j^{(i)}$ che consiste di punti y tali che $d(S^{-k}y, S^{-k}x) \leq C(x)e^{-\lambda_j k}$, $k \geq 0$ per qualche $C(x) > 0$ e con $V_j(y)$ come piano tangente a \overline{V}_j in y . Similmente se $\lambda_j < 0$ esiste, nello stesso intorno di x , una superficie regolare $\overline{V}_j^{(s)}$ che ha il piano $\tilde{V}_j(y)$ come piano tangente e consiste di punti y tali che $d(S^k y, S^k x) \leq C(x)e^{\lambda_j k}$, $k \geq 0$.

Problemi filosofici.

I seguenti esempi di pensiero astratto sono (giustamente) famosi, sebbene non sembrano avere altra applicazione che il permettere una formulazione generale e senza troppe eccezioni e *distinguo*, del formalismo e del quadro concettuale della teoria qualitativa del moto.

[1]: (*teorema di Borel–Cantelli*) Se μ è una misura sui boreliani di R^n e se Δ_n è una successione di insiemi misurabili tali che $\sum_n \mu(\Delta_n) < +\infty$ allora μ -quasi tutti i punti sono contenuti in al più un numero finito di insiemi della successione,. (*Idea*: l'insieme dei punti che sono in un numero infinito di insiemi Δ_n è $N = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\bigcup_{h=k}^{\infty} \Delta_h)$: ovviamente $\mu(N) \leq \sum_{h=k}^{\infty} \mu(\Delta_h)$ per ogni k e quindi $\mu(N) = 0$, perchè la serie converge.)

[2]: Nel caso della osservazione (2) alla definizione 3 si vede che ogni punto x che è fuori da tutti i Δ_n tranne che da un numero finito di essi è tale che $d(x, N) \geq n^{-\gamma'}$ per tutti gli n tranne che per un numero finito di essi. Sia allora U l'insieme dei punti x tali che $d(S^n x, N) > 0$: si noti che U ha complemento U' a misura nulla e si inferisca che per quasi tutti i punti di $x \in U$ esiste una costante $C(x)$ tale che $d(S^n x, N) > C(x)n^{-\gamma'}$. (*Idea*: si applichi il risultato del problema [-1].)

[3]: (*teorema massimale di Garsia*) Sia (M, S, μ) un sistema dinamico invertibile. E sia f una funzione (μ -misurabile, beninteso) tale che $|f(x)| < K$, μ -quasi ovunque. Allora se D_n è l'insieme dei punti $x \in M$ tali che una media di f su un tempo $\leq n$ è non negativa (ossia $m^{-1} \sum_{j=0}^m f(S^j x)$ per qualche m , $1 \leq m \leq n$), allora $\int_{D_n} f(x) \mu(dx) \geq 0$, (*teorema delle medie massime*, (Garsia)). (*Idea*: se $n = 1$ la condizione che definisce D_1 è semplicemente che $f(x) \geq 0$ e nulla è da provare. Se $n = 2$ la condizione che definisce D_2 è $f(x) \geq 0$ ovvero $f(x) < 0$ e $f(x) + f(Sx) \geq 0$. Allora i nuovi punti, cioè i punti in D_2 che non sono in D_1 sono punti x in cui $f(x) < 0$ e che si possono accoppiare con punti Sx di D_1 in modo che la somma dei valori della f su queste coppie sia ≥ 0 . Pertanto possiamo suddividere D_2 in $(D_2/D_1) \cup S(D_2/D_1) \cup D_1/S(D_2/D_1)$, due a due disgiunti: sul terzo $f(x) \geq 0$, e quindi tale è il suo integrale; mentre l'integrale sui primi due si può scrivere, per la invarianza di μ , come $\int_{D_2/D_1} (f(x) + f(Sx)) \mu(dx)$, che quindi è non negativo. Il caso $n = 3$ è solo un po' più complicato e dopo averlo analizzato il caso generale assume chiarezza cristallina).

[4]: (*teorema ergodico di Birkhoff*) Si mostri che [1] implica immediatamente la validità, nelle stesse ipotesi, della seguente affermazione, (*teorema ergodico* (Birkhoff)). Data f come in [1], esiste μ -quasi ovunque il limite: $\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x)$. (*Idea*: sia $f_{sup}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x)$ e similmente si definisca $f_{inf}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x)$; se $f_{sup}(x)$ e $f_{inf}(x)$ non fossero uguali quasi ovunque esisterebbero due costanti $\beta > \alpha$ tali che l'insieme D dei punti in cui $f_{sup}(x) > \beta$ e $f_{inf}(x) < \alpha$ sarebbe un insieme di misura $\mu(D) > 0$ e invariante (perchè ovviamente $f_{sup}(x) = f_{sup}(Sx)$, μ -quasi ovunque, e così anche f_{inf}). Ma per definizione di D le funzioni $f - \beta$ e $\alpha - f$ avrebbero su D necessariamente alcune medie *non negative*: quindi per il teorema in (1) avrebbero integrale non negativo su D . Ossia $\int_D (f - \beta) d\mu \geq 0$ e $\int_D (\alpha - f) d\mu \geq 0$: e sommando queste due disuguaglianze si perverrebbe alla conclusione $(\alpha - \beta)\mu(D) \geq 0$ che non è però possibile essendo $\alpha - \beta < 0$ e $\mu(D) > 0$.)

[5]: Si faccia vedere che l'ipotesi di limitatezza $|f(x)| < K$ in [2] non è necessaria e può essere sostituita dalla ipotesi $f \in L_1(\mu)$. Inoltre:

$$\begin{aligned} |\bar{f}|_{L_1} &\equiv \int_M \mu(dx) |\bar{f}(x)| \leq \int_M \mu(dx) |f(x)| \equiv |f|_{L_1} \\ \int_M \bar{f}(x) \mu(dx) &= \int_M f(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

e quindi, poichè f è una costante del moto ($f(x) = f(Sx)$), se μ è ergodica si avrà

$$\bar{f}(x) \equiv \int_M f(y) \mu(dy) \quad \mu\text{-quasi ovunque.}$$

[6]: (*teorema ergodico subadditivo di Kingman*) Sia (M, S, μ) un sistema dinamico ergodico e $n \rightarrow f_n(x)$ una successione subadditiva di funzioni (beninteso μ -misurabili), ossia tali che:

$$|f_1(x)| < K, \quad f_{n+m}(x) \leq f_n(x) + f_m(S^n x) \quad \mu\text{-quasi ovunque}$$

per tutti gli $n, m \geq 0$. Applicando il teorema ergodico [2],[3] si mostri che il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n(x) = \bar{f}(x)$ esiste μ -quasi ovunque.

(*Idea*: si noti che le funzioni:

$$f_{sup}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n(x), \quad f_{inf}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n(x)$$

sono tali che $f_{sup}(Sx) \geq f_{sup}(x)$ e $f_{inf}(Sx) \leq f_{inf}(x)$, perchè $f_n(x) \leq f_1(x) + f_{n-1}(x)$. Laonde per cui l'invarianza di μ implica che queste funzioni sono costanti del moto, (invero $\int (f_{sup}(Sx) - f_{sup}(x)) d\mu = 0$). Allora, per la supposta ergodicità, esistono due costanti $\alpha < \beta$ tali che $f_{sup}(x) = \beta$ e $f_{inf}(x) = \alpha$ μ -quasi ovunque. Si contempli dunque il caso $\beta > \alpha$ e sia $\eta > 0$ tale che $\alpha + 2\eta < \beta$.

Se si definisce Δ_n come l'insieme dei punti x per i quali $f_m(x) \leq \alpha + \eta$ per almeno un tempo $m \leq n$ è chiaro che $\mu(\Delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Dato dunque $\varepsilon > 0$, $K\varepsilon < \eta$ esiste n_ε tale che $\mu(\Delta_{n_\varepsilon}^c) < \varepsilon$ (ove l'indice c denota il complementare).

Se $x \in M$ si può supporre, per l'ipotesi di ergodicità e a meno di in insieme di misura nulla, che la frequenza di visita di x a $\Delta_{n_\varepsilon}^c$ sia inferiore a ε , perchè tale frequenza è il valore medio (su j) della funzione $\chi_{\Delta_{n_\varepsilon}^c}(S^j x)$, se χ_Δ denota la funzione caratteristica di Δ .

Se dunque $j_1 < j_2 < \dots$ è la successione degli istanti per cui, invece, $S^{j_k} x \in \Delta_{n_\varepsilon}^c$ si deduce che il numero p degli istanti $j_k \leq T$ è tale che $p/T < \varepsilon$ per T abbastanza grande (dal momento che $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{p}{T} = \mu(\Delta_{n_\varepsilon}^c) < \varepsilon$ per l'ipotesi di ergodicità.)

Sia $k_0 \geq 0$ il primo istante $\leq T$ in cui $S^{k_0} x \in \Delta_{n_\varepsilon}$, e k'_0 il più grande intero $\leq T$ tale che $f_{k'_0 - k_0}(S^{k_0} x) \leq (\alpha + \eta)(k'_0 - k_0)$: ne esiste almeno uno che sia $\leq k_0 + n_\varepsilon$; sia $k_1 > k'_0$, $k_1 \leq T$ il primo istante successivo a k'_0 e diverso da j_1, j_2, \dots ; e sia poi $k'_1 \leq T$ il più grande tempo successivo per cui $f_{k'_1 - k_1}(S^{k_1} x) \leq (\alpha + \eta)(k'_1 - k_1)$ e così via. Si giunge così a definire una successione di intervalli di tempo $[k_0, k'_0]$, $[k_1, k'_1]$, \dots , $[k_r, k'_r] \subset [0, T]$. Ogni valore $k'_j + 1$ deve essere uno dei j_i e il primo punto non fra i j_i dev' essere più vicino di n_ε a T . Il valore di k'_r deve essere più vicino a T di una quantità $\leq n_\varepsilon$. È quindi chiaro che i punti al di fuori degli tali intervalli $[k_j, k_{j+1}]$ sono al più $p + n_\varepsilon$. Pertanto:

$$\frac{1}{T} f_T(x) \leq \frac{1}{T} [(p + n_\varepsilon) K + (\alpha + \eta) T] = K \frac{p + n_\varepsilon}{T} + (\alpha + \eta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha + \eta < \beta$$

il che elimina la possibilità di continuare la contemplazione del caso $\beta > \alpha$, per la contraddizione che nol consente, e implica che $\alpha = \beta$.)

[7]: Si mostri che, posto $\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} f_n(x)$, [4] implica che la \bar{f} è costante μ -quasi ovunque e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \int_M f_n(x) \mu(dx) = \inf_n n^{-1} \int_M f_n(x) \mu(dx)$$

(*Idea*: $n^{-1} f_n(x) \leq n^{-1} (K + f_{n-1}(Sx))$ e pertanto $\bar{f}(x) \leq \bar{f}(Sx)$ quindi, analogamente al (4), $\int (\bar{f}(x) - \bar{f}(Sx)) \mu(dx) = 0$ implica $\bar{f}(x) = \bar{f}(Sx)$ μ -quasi ovunque e dunque per l'ergodicità supposta \bar{f} è μ -quasi ovunque costante. Per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale ("convergenza dominata") si deduce la prima realzione. D'

altra parte la funzione $\langle f_n \rangle = \int f_n(x) \mu(dx)$ è *subadditiva* (ossia $\langle f_{n+m} \rangle \leq \langle f_n \rangle + \langle f_m \rangle$) e limitata da K e quindi, per un argomento elementare, $n^{-1} \langle f_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_n n^{-1} \langle f_n \rangle$.)

[8]: Si faccia vedere che l'ipotesi $|f_1(x)| < K$ in (4),(5) non è necessaria e può essere sostituita da un'ipotesi di sommabilità sulla parte positiva $f_1^+(x) \equiv \max(0, f_1(x))$ che richieda $f_1^+ \in L_1(\mu)$. (*Idea*: nessuna idea: si esaminino con cura le dimostrazioni di [4] e [5].)

[9]: Si supponga S e (M, S, μ) μ -regolare e si applichi il teorema ergodico per mostrare che se $\mu(N) = 0$ e se $S^j N$ è μ -misurabile per $j \geq 0$, anche $\mu(SN) = 0$. (*Idea*: la frequenza di visita $\varphi_x(SN)$ del dato iniziale x a SN della traiettoria originante in x è uguale a quella a N stesso: $\varphi_x(SN) = \varphi_x(N)$; ma per il teorema ergodico $\mu(SN) = \int \varphi_x(SN) d\mu \equiv \int \varphi_x(N) d\mu = \mu(N) = 0$.)

[10]: (*uguaglianza delle medie nel pasato e nel futuro per sistemi dinamici metrici*) Dato (M, S, m) si supponga che S sia invertibile (μ -quasi ovunque). Si definisca, via il teorema ergodico, la media “nel futuro” $f^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x)$ e la media “nel passato” $f^-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(S^{-j} x)$. Si mostri che $f^+(x) \equiv f^-(x)$ μ -quasi ovunque. (*Idea*: sia D, α, β tali che $\mu(D) > 0$ e $f^+(x) > \beta > \alpha > f^-(x)$ per $x \in D$. Sia D_n^+ l'insieme dei punti $x \in D$ per cui $\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x) > \beta$ per tutti i valori $m \geq n$; e sia D_n^- l'analogo insieme ove $\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(S^{-j} x) < \alpha$. Allora se n è abbastanza grande $S^{-(n-1)} D_n^- \cap D_n^+ \neq \emptyset$, perchè $\mu(D_n^-) \equiv \mu(S^{-(n-1)} D_n^-)$ e $\mu(D_n^+)$ sono entrambe assai vicine a $\mu(D)$ per n grande, e quindi: $\alpha > n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(S^{-j} x) \equiv n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j S^{-(n-1)} x) > \beta$: impossibile.

Problemi ulteriori, (*Oseledec, Raghunathan, Ruelle.*)

Dato (M, S, μ) si supponga nei seguenti problemi che S sia μ -regolare. Avrà allora senso porre $T^n(x) \equiv \partial S^n(x)$, per $n \in (-\infty, +\infty)$ che, (*c.f.r.* commento (8) alla definizione 3), è una funzione definita μ -quasi ovunque. Si supponga sempre che (M, S, μ) è un sistema ergodico, e $M \subset R^l$.

[11] (*teorema di Oseledec*) Si constati che $T_n(x) = T(S^{n-1}x) \cdots T(Sx) \cdot T(x)$ evincendone che se $(\log \|T\|)^+ \in L_1(\mu)$ allora esiste il limite $\lambda_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \|T(x)\|$, μ -quasi ovunque (la norma è definita pensando che su R^l sia definito il prodotto scalare euclideo e $\|T\|$ è il massimo della lunghezza $\|Tu\|$ al variare di u con $\|u\| = 1$). (*Idea*: la funzione $f_n(x) = \log \|T_n(x)\|$ è subadditiva nel senso del problema [6], *c.f.r.* anche [6].)

[12] Si immaginino i vettori $u \in R^l$ come funzioni $i \rightarrow u_i$ sullo spazio finito $L = \{1, 2, \dots, l\}$. Sia $(R^l)^{\wedge q}$ lo spazio delle funzioni su L^q antisimmetriche (cioè le funzioni $u_{i_1 \dots i_q}$ antisimmetriche). Allora su questo spazio lineare si può definire un prodotto scalare in modo naturale $((u, v) = \sum u_{i_1, \dots, i_q} v_{i_1, \dots, i_q})$, e quindi una lunghezza dei vettori in $(R^l)^{\wedge q}$. Si definisca la matrice $T_n^{\wedge q}$ agente su $(R^l)^{\wedge q}$ come:

$$(T_n^{\wedge q}(x)u)_{i_1 \dots i_q} = \sum_{j_1 \dots j_q}^{1, l} (T_n(x))_{i_1 j_1} \cdots (T_n(x))_{i_q j_q} u_{j_1 \dots j_q}$$

e si mostri che se $(\log \|T_1\|)^+ \in L_1(\mu)$ esiste il limite $\lambda_q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \|T_n^{\wedge q}(x)\|$ esiste μ -quasi ovunque (la norma di un operatore O su $(R^l)^{\wedge q}$ è definita via la nozione di lunghezza sopra definita). (*Idea*: segue immediatamente dal teorema ergodico subadditivo, come nel caso precedente perchè $\log \|T_n^{\wedge q}(x)\|$ è anche subadditiva).

[13]: Si consideri una successione di operatori reali (cioè matrici con elementi di matrice reali) T_j su R^l . Si ponga $T^n = T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_1$ e si supponga che esistano i limiti:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \|T_n\| \leq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \|T_n^{\wedge q}\| = \lambda_q \quad q = 1, 2, \dots, l \quad (*)$$

Se $\Lambda_n \equiv (T^{n*}T^n)^{1/2n}$ siano $t_n^{(1)} \geq \dots \geq t_n^{(l)}$ gli l autovalori di Λ_n . Si mostri che i limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log t_n^{(i)}$ esistono. (*Idea*: si osservi che $t_n^{(1)} t_n^{(2)} \dots t_n^{(q)} \equiv \|T^{\wedge q}\|$. La prima ipotesi in (*) non è necessaria, ed è posta solo per riferimento successivo.)

[14]: Nel quadro del problema precedente si chiamino $\mu^{(1)} > \dots > \mu^{(s)}$ i possibili valori diversi dei limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log t_n^{(i)}$: e si definisca la molteplicità m_i di $\mu^{(i)}$ come il numero di valori di q per cui $\lim \frac{1}{k} \log t_k^{(q)} = \mu^{(i)}$. Siano $U_k^1, U_k^2, \dots, U_k^s$ gli spazi lineari sottesi dai primi m_1 autovettori di Λ_k , dai successivi m_2 autovettori, ..., dagli ultimi m_s autovettori: si giustifichi che è naturale dire che m_i è la molteplicità asintotica dell'autovalore μ_i . Si ponga $r(p) = i$ se $\frac{1}{k} \log t_k^{(p)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu^{(i)}$.

[15]: (*ortogonalità delle basi dinamiche*) Nel quadro del problema precedente si mostri che la nozione di molteplicità asintotica è ancor più giustificata poiché vale la seguente proprietà di ortogonalità. Dato $\delta > 0$ esiste $C > 0$ tal che per ogni coppia $u \in U_n^{(r)}$ e $u' \in U_{n+k}^{(r')}$, con $1 \leq r, r' \leq s$, si ha:

$$|(u, u')| \leq C e^{-(|\mu^{(r)} - \mu^{(r')}| - \delta)n}$$

se $\|u\| = \|u'\| = 1$. (*Idea*: il caso $r = r'$ è ovvio. Si distingua il caso “banale” $r' > r$ dall'altro $r' < r$. Se $r' > r$ si consideri prima $k = 1$ e si noti la seguente catena di relazioni (basata sul teorema spettrale per Λ_{n+1} , che consente di scrivere $\Lambda_{n+1} = \sum_i t_{n+1}^{(i)} P_i$ ove P_i è l'operatore di proiezione sull'autovettore associato a $t_n^{(i)}$, arbitrariamente scelto in caso di degenerazione), dato $\delta_1 > 0$:

$$\begin{aligned} |(u, u')| &\leq \max_{u' \in U_{n+1}^{(r')}} e^{-(n+1)\mu^{(r')}} |(u, \sum_{i \geq r'} e^{(n+1)\mu^{(r')}} P_i u')| = \\ &= e^{-(n+1)\mu^{(r')}} \max_{u' \in U_{n+1}^{(r')}} |(\sum_{i \geq r} e^{(n+1)\mu^{(r')}} P_i u, u')| \leq \\ &\leq e^{-(n+1)\mu^{(r')}} \|\sum_{i \geq r} e^{(n+1)\mu^{(r')}} P_i u\| \leq \\ &\leq e^{-(n+1)\mu^{(r')} + (n+1)\delta_1} \|\sum_{i \geq r} t_{n+1}^{(i)} P_i u\| \leq \\ &\leq e^{-(n+1)\mu^{(r')} + (n+1)\delta_1} \|(T^{(n+1)*} T^{(n+1)})^{1/2} u\| \end{aligned}$$

se n è talmente grande che $|\frac{1}{m} \log t_m^{(j)} - \mu^{(i)}| < \delta_1/2$ per $m \geq n$ e per tutti gli indici j per cui questo è possibile (cioè $r(j) = i$ con le notazioni introdotte al problema [12]: ossia per gli indici j tali che $\lim \frac{1}{m} \log t_m^{(j)} = \mu^{(i)}$). Allora poiché l'ultima quantità è $\|T^{n+1}u\|$ perché

$$\|(A^*A)^{1/2}u\|^2 = ((A^*A)^{1/2}u, (A^*A)^{1/2}u) = (u, A^*Au) = \|(Au)^2\|,$$

deduciamo, se n è talmente grande che per $m \geq n$ si ha $\frac{1}{m} \log \|T_m\| < \log 2$ (usando qui per la prima volta la prima ipotesi in (*) del problema [13]:

$$\begin{aligned} |(u, u')| &\leq e^{-\mu^{(r')}(n+1) + \delta_1(n+1)} \|T^{n+1}u\| = e^{(n+1)(-\mu^{(r')} + \delta_1)} \|T_n T u\| \leq \\ &\leq e^{(n+1)(-\mu^{(r')} + \delta_1)} 2 \|T^n u\| \leq 2 e^{-\mu^{(r)}n} e^{(n+1)(-\mu^{(r')} + \delta_1)} e^{(n+1)(\mu^{(r)} + \delta_1)} \end{aligned}$$

perché $u \in U_n^{(r)}$. Quindi, dato $\delta_1 > 0$, esiste $C_1 > 0$ tale che la conclusione vale, se $r' > r$ e se $k = 1$. Il caso $k > 1$ si riduce al caso $k = 1$ semplicemente osservando che in

questo caso la disuguaglianza triangolare consente di maggiorare $|(u, u')|$ con la somma $\sum_{i=1}^k 2e^{-\mu^{(r)}} e^{-(\mu^{(r')} + \delta_1)(n+i)} e^{(\mu^{(r)} + \delta_1)(n+i)}$ e la somma su i converge.

La parte concettualmente non banale è il caso $r' < r$. In tal caso, dati u e u' si immagini di definire due basi ortonormali F e F' contenenti rispettivamente u e u' fra i loro elementi. Le basi ortonormali siano scelte poi in modo che i primi m_1 vettori di F siano in $U_n^{(1)}$, i successivi m_2 in $U_n^{(2)}$, ..., gli ultimi m_s in $U_n^{(s)}$; e i vettori di F' abbiano la analoga proprietà rispetto agli autospazi $U_{n+k}^{(i)}$.

Si consideri la matrice ortogonale $U_{\alpha\alpha'} = (u_\alpha, u'_{\alpha'})$. Per quanto visto nel caso precedente possiamo dire che (con la definizione di $r(\alpha)$ data al problema [14]:

$$\begin{aligned} |(u_\alpha, u'_{\alpha'})| &\leq C_1 e^{-\left(\mu^{(r(\alpha'))} - \mu^{(r(\alpha))} - 3\delta_1\right)n} && \text{se } u_\alpha \in U_n^{(r(\alpha))}, u'_{\alpha'} \in U_{n+k}^{(r(\alpha'))} \\ |(u_\alpha, u'_{\alpha'})| &\leq 1 && \text{per ogni } \alpha, \alpha' \end{aligned}$$

e la *osservazione chiave, base e fondamento del teorema*, è semplicemente che se $r(\alpha) < r(\beta)$ allora si può utilizzare l'ortogonalità di U per cui $(u_\alpha, u'_\beta) = U_{\alpha\beta} \equiv \overline{U_{\beta\alpha}^{-1}}$ ove la barra indica coniugazione complessa. Questa ultima quantità è il determinante della matrice ottenuta cancellando la riga α e la colonna β della matrice U (perché U è ortogonale). Il calcolo di questo determinante consiste nella somma dei $(l-1)!$ prodotti competenti: nell'eseguire questi prodotti si dovranno prendere un certo numero di fattori uguali a elementi di matrice $\gamma\gamma'$ "sopra la diagonale" in cui $r(\gamma') > r(\gamma)$ che sono stimati da $C_1 e^{-\Delta\mu n + 2l\delta_1 n}$ e si vede che la somma dei $\Delta\mu$ che si trovano è necessariamente $\geq \mu^{(r)} - \mu^{(r')}$ (per capire questa proprietà si consideri prima il caso non degenerare in cui tutti gli esponenti di Lyapunov sono diversi, e quindi $r(\alpha) \equiv \alpha$). Gli altri elementi di matrice sono maggiorati da 1 e quindi si vede che in questo caso $|(u_\alpha, u'_\beta)| \leq (l-1)! C_1^{l-1} e^{-|\mu^{(r)} - \mu^{(r')}|n + 2l\delta_1 n}$ concludendo la discussione.)

[16]: Si mostri che il problema [15] implica che $U_n^{(i)}$, pensato come piano in R^l tende, per $n \rightarrow \infty$ ad un piano limite $U^{(i)}$ per ogni i . (*Idea*: i piani $U_{n+k}^{(1)}$ e $U_{n+h}^{(1)}$ devono formare con $\bigoplus_{r>1} U_n^{(r)}$ un angolo più vicino a 90° di una quantità prefissata a piacere, se n è abbastanza grande, indipendentemente da $h, k \geq 0$. Dunque i piani $U_n^{(1)}$ formano "una successione di Cauchy"; per gli altri piani il ragionamento è identico.)

[17]: Si deduca dal risultato di [16] e dall'ipotesi (*) in [13] che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T^{n*} T^n)^{1/2n}$ esiste ed è una matrice Λ con autovalori $e^{\mu^{(i)}}$ con autospazi corrispondenti $U^{(i)}$, per $i = 1, \dots, s$.

[18]: Si deduca che $\lim n^{-1} \log |T^n u| = \mu^{(i)}$ se $u \in U^{(i)}$.

[19]: Si faccia vedere che i risultati dei problemi [11÷18] implicano il teorema I. (*Idea*: Per gli stessi argomenti possiamo costruire $\hat{U}^{(1)}, \dots, \hat{U}^{(s)}$ usando S^{-1} ; per cui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \log |S^{-k} dx| / |dx| = -\mu^{(i)}$$

se $dx \in \hat{U}^{(i)}$. Allora possiamo porre $W^{(i)} = (U^{(1)} \oplus U^{(2)} \oplus \dots \oplus U^{(i)}) \cap (\hat{U}^{(1)} \oplus \hat{U}^{(2)} \oplus \dots \oplus \hat{U}^{(i)})$.

[20]: Si consideri il sistema dinamico $\mathcal{C} = [-1, 1] \times T^2$, ove T^2 è il toro bidimensionale. Sia $x = (z, \varphi_1, \varphi_2)$ un punto in \mathcal{C} . Sia $z \rightarrow f(z)$ una trasformazione regolare tale che $f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \pm 1$, e sia $\nu(z) = 2$ if $z > 0$ and $\nu(z) = 1$ if $z < 0$; define:

$$x' = (z', \varphi'_1, \varphi'_2) = \begin{cases} f(z) \\ \varphi_1 + \nu(z)\varphi_2 \mod 2\pi \\ \nu(z)\varphi_1 + (\nu(z)^2 + 1)\varphi_2 \mod 2\pi \end{cases}$$

e si verifichi che le statistiche di dati iniziali scelti a caso con distribuzione $\mu = dz \frac{d\varphi_1 d\varphi_2}{(2\pi)^2}$ sono *diverse* per $n \rightarrow \pm\infty$.

[21]: Si calcolino gli esponenti di Lyapunov nell'esempio del problema [20]; e si trovino le basi dinamiche (dei punti che le ammettono) e i sistemi di piani relativi a S e S^{-1} (dei punti che li ammettono).

[22] Si consideri il sistema dinamico (M, S_t) ottenuto considerando il toro bidimensionale T^2 privato di un numero finito di regioni circolari C_1, \dots, C_s disgiunte (o più in generale convesse) e un punto materiale che si muove fra esse con velocità unitaria subendo collisioni elastiche. Si constati che si definiscono così le trasformazioni S_t sullo spazio delle fasi (x, α) , ove $x \in T^2 \setminus \bigcup_j C_j$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ denotano posizione e direzione della velocità, con $S_t(x, \alpha) = (x', \alpha')$ che danno le coordinate al tempo t del punto che inizialmente si trovava in (x, α) . Si faccia vedere che le trasformazioni S_t hanno singolarità ma lasciano invariante la misura di Liouville $dx d\alpha$ su M .

[23] Nel contesto del problema [22] si definisca su ogni frontiera ∂C_j una coordinata $r \in [0, l_j]$ che dá l'ascissa curvilinea del punto generico di ∂C_j . Si consideri una *collisione* (x, α) con $x \in \bigcup_j \partial C_j$ e α tale che la velocità formi un angolo $\varphi \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ con la normale esterna al punto x dell'ostacolo C_j . Allora l'insieme delle *collisioni* è parametrizzabile con (j, r, φ) il cui insieme sarà denotato \mathcal{C} . Si immagini ora di definire gli eventi candenzanti come gli eventi in cui si verificano collisioni. E sia S la trasformazione di una collisione (j, r, φ) nella successiva (j', r', φ') . Si faccia vedere che S conserva la misura $\mu = \sin \varphi dr d\varphi$ e che S è regolare su \mathcal{C} rispetto al volume e che è μ -regolare. Il sistema dinamico (\mathcal{C}, S) si chiama *biliardo*.

[24]: Si noti che nella teoria sopra esposta non è necessario che la matrice $T(x)$ sia la matrice Jacobiana di S : esattamente le stesse conclusioni valgono se $T(x)$ è supposta essere una funzione su M a valori nelle matrici (di dimensione arbitrariamente fissata) e tale che $\int \log_+ \|T(x)\| \mu(dx) < +\infty$. Pertanto la teoria sopra discussa può essere considerata anche come una teoria dei prodotti di matrici casuali.

[25]: Sia $M = [0, 2\pi]$ e $\mathcal{M}(\varphi)$ sia definita da

$$\mathcal{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda \cos \varphi - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con λ, E reali. Sia $\mathcal{M}_N(\varphi) = \mathcal{M}(\varphi + (N-1)\omega) \dots \mathcal{M}(\varphi + \omega) \mathcal{M}(\varphi)$ ove ω è *irrazionale*: si verifichi che l'esponente di Lyapunov massimo, nel senso dell'estensione in [22] del teorema di Oseledec può essere espresso dal limite

$$\begin{aligned} \Lambda_{\max}(\varphi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \log \|\mathcal{M}_N(\varphi)^* \mathcal{M}_N(\varphi)\| = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{1}{2N} \log \|\mathcal{M}_N(\psi)^* \mathcal{M}_N(\psi)\| \end{aligned}$$

che esiste ed è φ -indipendente μ -quasi sicuramente. (*Idea*: È una riformulazione del teorema di Oseledec, tenendo conto di [22] e della ergodicità delle rotazioni irrazionali del cerchio.)

[26]: Nel contesto dei precedenti problemi [24], [25], si ponga $z \stackrel{def}{=} e^{-i\varphi}$ e si noti che

$$\begin{aligned} \Lambda_{\max}(\varphi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} \max_{\|\underline{v}\|=1} \log \|\mathcal{M}_N(\varphi) \underline{v}\| d\varphi = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} \max_{\|\underline{v}\|=1} \log \|\tilde{\mathcal{M}}_N(z) \underline{v}\| d\varphi \end{aligned}$$

ove

$$\tilde{\mathcal{M}}(ze^{-i\omega n}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} z^2 e^{-2i\omega n} - Eze^{-i\omega n} & -ze^{-i\omega n} \\ ze^{-i\omega n} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \\ \tilde{\mathcal{M}}_N(z) = \tilde{\mathcal{M}}(ze^{-i(N-1)\omega}) \dots \tilde{\mathcal{M}}(z)$$

Si mostri che la funzione $\tilde{\mathcal{M}}_N(z)\underline{v}$, come funzione di z è olomorfa per ogni \underline{v} al variare di z nel disco $|z| \leq 1$. Si deduca che $\|\tilde{\mathcal{M}}_N(\varphi)\underline{v}\|$ e quindi $\max_{\|\underline{v}\|=1} \|\tilde{\mathcal{M}}_N(\varphi)\underline{v}\|$ sono funzioni subarmoniche di z e tale è anche il logaritmo $\log \|\tilde{\mathcal{M}}_N(\varphi)\|$. (*Idea:* Semplicemente si ricordi la definizione di funzione subarmonica: f è subarmonica in un dominio D se il valore di f in ogni punto z di D è \leq della media di f su una circonferenza in D con centro z : quindi si applichi il teorema di Cauchy per le funzioni olomorfe e si usi la disuguaglianza triangolare e la concavità del logaritmo).

[27]: (*teorema di Herman*) Si mostri che il massimo esponente di Lyapunov del prodotto di matrici [25], [26] è

$$\Lambda_{\max} \geq \frac{1}{2}\lambda \quad \text{per quasi tutti i } \varphi$$

Si mostri che, quindi, la relazione di ricorrenza (*equazione di Schrödinger quasi periodica*)

$$-(x_{n+1} + x_{n-1}) + \lambda \cos(\varphi + n\omega) x_n - E x_n = 0$$

è tale che per $\lambda > 2$ e ogni E esiste un insieme $\Delta(\lambda, E)$ di φ 's in $[0, 2\pi]$ di misura nulla tale che, se $\varphi \notin \Delta(\lambda, E)$, esistono dati iniziali (x_1, x_0) che generano, secondo la ricorrenza data, una traiettoria (x_n, x_{n+1}) che diverge esponenzialmente per $n \rightarrow +\infty$. (*Idea:* Poiché la funzione $\log \|\tilde{\mathcal{M}}_N(z)\|$ come funzione di z è subarmonica l' integrale $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log \|\tilde{\mathcal{M}}_N(z)\| d\varphi$ con $z = e^{-i\varphi}$ è maggiore o uguale del valore in 0 della funzione: $\log \|\tilde{\mathcal{M}}_N(0)\| \equiv \log(\lambda/2)^N$. La questione sulla relazione di ricorrenza genera esattamente il problema sui prodotti di matrici risolto nei due problemi precedenti.)

[28]: (*un insieme attraente non normale*) Si consideri una sfera e si traccino due cerchi massimali ortogonali. Siano N, S i poli ove si intersecano. Notiamo sui quattro "meridiani" con i simboli 0, 1, 2, 3 in senso antiorario; e immaginiamo che N e S siano punti fissi iperbolici con i meridiani 0, 2 come varietà stabili per N e instabili per S mentre i meridiani 1, 3 sono le varietà instabili di N e le stabili per S . Così la sfera è divisa in quattro spicchi. In ciascuno spicchio i poniamo due punti O_i, P_i e immaginiamo che siano punti iperbolici per la trasformazione e che le loro varietà stabili e instabili colleghino questi punti su una figura a tre cappi (cio 'e a forma di doppio 8), si veda la Fig. (24.1). Nei centri dei cappi \mathcal{L}_i immaginiamo tre punti A_i, B_i, C_i che sono anche fissi e iperbolici (con esponenti di Lyapunov complessi). Definiamo poi arbitrariamente la trasformazione S sugli altri punti ma in modo che spinga via i meridiani verso i cappi e all' interno dei cappi singola via dai punti fissi A_i, B_i, C_i verso i rispettivi cappi \mathcal{L}_i . I punti P_i, O_i si comportano come i punti O_0, P_0 nel problema [6] del §23. Si noti che il sistema *non* verifica l' assioma A. Si mostri che i punti non erranti consistono nelle descritte linee che congiungono $N, S, A_i, B_i, C_i, O_i, P_i$ e che gli insiemi attraenti sono i cappi: così nessun punto fuori dai cappi ha una statistica ben definita, a causa del meccanismo del problema [6] del §23. I punti periodici (fissi in questo caso) *non sono densi* nell' insieme dei punti nonerranti che non sono iperbolici. E non è definita alcuna distribuzione SRB. (*Idea:* c.f.r. [5.3.6].)

Bibliografia: [Sm],[R3],[R1]; i problemi filosofici sono tratti da [G2] e la teoria di Oseledec è tratta dall' estensione [R2] degli articoli originali che sono [Os],[Ra]. Il risultato sugli esponenti di Lyapunov per l' equazione di Schrödinger su reticolo esposto nei problemi da [23] a [25] è tratto da [He82]

§25 Statistiche SRB. Attrattori ed insiemi attraenti. Dimensione frattale.

Torniamo ora ai sistemi con insiemi attraenti verificanti l'assioma A, secondo la definizione 2 del §24, allo scopo di descrivere i risultati menzionati riguardo alla statistica SRB generata su di essi dalle traiettorie ottenute scegliendo dati iniziali a caso con una distribuzione assolutamente continua rispetto al volume dello spazio delle fasi.

(A) *Distribuzioni di probabilità "fisiche" o SRB.*

Conviene dare subito una descrizione intuitiva della misura SRB e delle sue proprietà salienti. La difficoltà sta nella corretta visualizzazione di un insieme attraente iperbolico A , che in generale è un insieme che non è una superficie regolare, neppure a tratti; ha bensì carattere frattale. Si vedano i problemi [8],[9] per esempi di insiemi attraenti frattali verificanti l'assioma A.

Al fine di sviluppare l'intuizione è però utile considerare un caso semplice in cui A sia una superficie. Considereremo il sistema dinamico con spazio delle fasi a tre dimensioni $M = T^2 \times [-1, 1]$ i cui punti sono descritti da tre coordinate (x, y, z) in cui x e y sono definite mod 2π , cosicchè vanno pensate come coordinate su un toro bidimensionale. La trasformazione S che definisce la dinamica sarà:

$$25.1 \quad S(x, y, z) = (x', y', z') = \begin{cases} x' = x + y & \text{mod } 2\pi \\ y' = x + 2y & \text{mod } 2\pi \\ z' = \frac{1}{2}z \end{cases} \quad (25.1)$$

In questo caso l'insieme $A = T^2 \times \{0\}$ è un insieme attraente globale iperbolico perchè da ogni punto si possono far uscire tre vettori:

$$25.2 \quad \begin{aligned} \underline{e}_+ &= (1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), 0) \equiv (\underline{v}_+, 0) \\ \underline{e}_- &= (1, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), 0) \equiv (\underline{v}_-, 0), \quad \underline{e}_3 = (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (25.2)$$

ove \underline{v}_\pm sono autovettori (non normalizzati) della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ relativi agli autovalori $e^{\lambda_+} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ e $e^{\lambda_-} = e^{-\lambda_+}$. È ovvio che un vettore infinitesimo $d\xi$ nella direzione di \underline{e}_+ si espande esponenzialmente con progressione e^{λ_+} , mentre uno nella direzione di \underline{e}_- si contrae esponenzialmente con progressione $e^{-\lambda_+}$ e uno nella direzione \underline{e}_3 si contrae con progressione $\frac{1}{2}$.

Lo spazio lineare sotteso da $\underline{e}_-, \underline{e}_3$, a due dimensioni, è lo spazio V_2 della definizione 4 del §24, mentre lo spazio V_3 è la retta parallela a \underline{e}_3 . Similmente lo spazio sotteso da $\underline{e}_3, \underline{e}_+$ è lo spazio \tilde{V}_2 della definizione 4, §24, per S^{-1} e lo spazio parallelo a \underline{e}_+ è lo spazio \tilde{V}_3 della definizione 4, §24. Le direzioni stabile e instabile di un punto $x \in A$ sono, rispettivamente

$V_s(x) \equiv R_2$ (piano $\underline{e}_-, \underline{e}_3$) e $V_i(x) \equiv \tilde{R}_3$ (retta \underline{e}_+). Si veda la figura successiva per una rappresentazione grafica di questi oggetti geometrici.

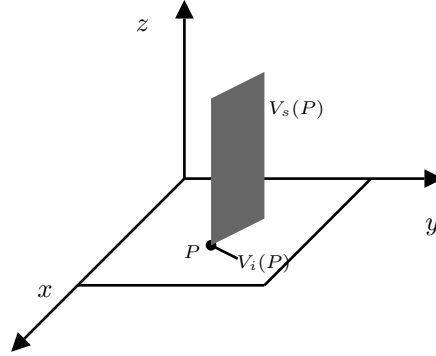


Fig. 1: La superficie grigia è una porzione del piano stabile $V_s(P)$ di P mentre il segmento è una porzione del piano instabile $V_i(P)$.

Questo esempio, particolarmente semplice, illustra alcune proprietà generali, non sempre facili da vedere.

(1) Le famiglie di piani $V_s(x)$ e $V_i(x)$ sono *integrabili*: questo significa che entro una sfera di centro x e raggio δ piccolo (rispetto al diametro e alla curvatura di M) si può definire una porzione di superficie regolare $W_x^{\delta,s}$ passante per x e avente in ognuno dei suoi punti y il piano $V_s(y)$ come piano tangente. Pertanto $W_x^{\delta,s}$ è un grafico sulla sfera (un disco nel caso presente) di raggio δ intorno a x nel piano $V_s(x)$, cioè localmente $W_x^{\delta,s}$ e $V_s(x)$ sono identiche entro il secondo ordine nella distanza da x .

Similmente si può definire una porzione di superficie regolare $W_x^{\delta,i}$ avente ovunque $V_i(y)$ come piano tangente in ognuno dei suoi punti y , e $W_x^{\delta,i}$ è un grafico sulla sfera (un segmento nell' esempio) di raggio δ intorno a x nel piano $V_i(x)$. Si veda Fig. 1.

Nel caso in esame tali superfici sono banali e non sono altro che il disco intersezione fra la sfera di raggio r e centro in x con il piano $\underline{e}_-, \underline{e}_3$ passante per x e, rispettivamente, il segmento intersezione con la stessa sfera della retta parallela a \underline{e}_+ e passante per x : purchè r sia piccolo rispetto alla dimensione di M , ossia rispetto a 2π . Se r è troppo grande il disco e il segmento, dovendo essere pensati avvolti sullo spazio delle fasi (essendo x, y definite mod 2π), non sarebbero più il grafico di una funzione.

(2) E le superfici $W_x^{r,s}$ e $W_x^{r,i}$ sono tali che se $y \in W_x^{r,s}$ allora $|S^n x - S^n y| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ esponenzialmente (con progressione almeno uguale alla massima contrazione dei vettori tangenti); mentre se $y \in W_x^{r,i}$ si ha $|S^{-n} x - S^{-n} y| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ esponenzialmente (con progressione uguale alla minima espansione dei vettori tangenti). Le superfici $W_x^{r,s}, W_x^{r,i}$ possono essere chiamate *varietà stabile e instabile r -locali* di x .

(3) Inoltre in ogni punto x le due superfici sono “trasversali e indipendenti”, ossia i loro piani tangenti sottendono tutto il piano tangente e formano un angolo non nullo (uguale a quello fra $V_i(x)$ e $V_s(x)$, che, nella metrica naturale su M , nel caso in esame è addirittura costante e uguale a 90°).

Un importante risultato generale (Pesin, *c.f.r.* teorema I, §24 e in seguito) mostra che nelle stesse ipotesi del teorema I, §24, e fissata una qualsiasi distribuzione di probabilità μ invariante (definita su M) si ha che per μ -quasi ogni punto di M passano porzioni di superficie regolare $W_x^{r(x),s}$ e $W_x^{r(x),i}$ con $r(x) > 0$ che *integrano* la base dinamica: dunque questa *non è una particolarità* dell' esempio. Un risultato generale importante (Pesin, *c.f.r.* teorema I, §24 e quanto segue) mostra che nelle ipotesi del teorema I, §24, e prefissata un' arbitraria distribuzione invariante regolare μ (definita su M) si ha che per μ -quasi tutti i punti di M passano porzioni di superficie regolare $W_x^{\delta(x),s}$ e $W_x^{\delta(x),i}$ con $\delta(x) > 0$ che *integrano* i piani $V_i(x)$ e $V_s(x)$ della base dinamica: quindi questa integrabilità *non è una particolarità dell' esempio*.

In generale si possono poi definire le varietà stabili e instabili globali di x come descritto nella definizione 4 del §24.

(3) Nell' esempio (25.1) si vede che se r è abbastanza piccolo la regolarità di queste superfici (in questo caso sono addirittura porzioni di superfici piatte) consente di definire, dati due punti abbastanza vicini x, y , una *corrispondenza* fra punti $\xi \in W_x^{r,i}$ e $\xi' \in W_y^{r,i}$ facendo corrispondere ξ e ξ' se $\xi, \xi' \in W_\xi^{r,s}$. La corrispondenza è illustrata nella Fig.2 (in cui ξ, ξ' si corrispondono come anche x e y stessi).

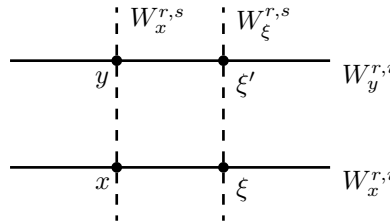


Fig.2

Secondo questa corrispondenza punti corrispondenti evolvono nel futuro avvicinandosi esponenzialmente, e pur vagando sull' insieme attrattante i moti sono dinamicamente indistinguibili. Questo accade *anche se* x e y *si trovano sulla stessa varietà instabile* (come è possibile se, come nell' esempio, le varietà instabili globali sono dense); cioè se $W_x^{r,i}$ continuata fuori della sfera di raggio r contiene anche $W_y^{r,i}$.

Inoltre si pongono così in corrispondenza archi infinitesimi δ_x^0 di $W_x^{r,i}$ e archi infinitesimi δ_y^0 di $W_y^{r,s}$ che hanno lunghezza confrontabile, ossia con rapporto finito (uguale ad 1 nell' esempio): anche questo [Pe1] resta vero in un senso opportuno, in generale, nelle ipotesi del teorema I. A quest' ultima proprietà si dà nome di *assoluta continuità* delle varietà instabili rispetto alle stabili. Naturalmente vale, allo stesso tempo, la proprietà simmetrica

in cui si scambiano i ruoli delle varietà stabili e instabili.

In generale, sotto ipotesi molto deboli, è possibile definire le varietà stabili e instabili di μ -quasi tutti i punti di un insieme invariante rispetto all'azione di una trasformazione S , μ -regolare (c.f.r. definizione 2, §24): ma la sola definizione ha un carattere assai tecnico se non si hanno in mente esempi concreti (è infatti ispirata interamente dalle proprietà del biliardo, c.f.r. §23, §24 e ne costituisce una “astrattizzazione” e generalizzazione). Ci concentreremo piuttosto sul caso molto più semplice dei sistemi dinamici (M, S) differenziabili, cioè con M di classe analitica (o C^∞) e S diffeomorfismo di classe C^∞ tali che (M, S) sia un sistema che verifica l'assioma A (c.f.r. §24, definizione 2 e osservazioni). Per tali sistemi vale il seguente teorema:

I Teorema (esistenza e assoluta continuità delle varietà stabili e instabili):
Sia (M, S) un sistema dinamico differenziabile che verifica l'assioma A e sia A un insieme attraente sul quale S sia topologicamente transitivo (il che non è molto restrittivo, c.f.r. §24, osservazioni alla definizione 2). Si supponga che S sia invertibile con inversa differenziabile in un intorno di A .¹ Allora:

(i) I piani stabile e instabile $V_i(x)$ e $V_s(x)$ sono Hölder continui al variare di $x \in A$; inoltre sono integrabili nel senso che, per $x \in A$, esistono superfici di classe C^∞ denotate $W_x^{\delta,s}$ e $W_x^{\delta,i}$ che sono rappresentabili come grafici sulla sfera di raggio δ di $V_s(x)$ e $V_i(x)$ rispettivamente, e tangenti in ogni loro punto y al piano $V_s(y)$ e $V_i(y)$ rispettivamente, purché δ sia abbastanza piccolo (“esistenza delle varietà stabile e instabile δ -locali” su A).

(ii) Esistono $C, \lambda > 0$ per cui se $y \in W_x^{\delta,s}$ allora $d(S^n y, S^n x) \leq Ce^{-\lambda n}$. Inoltre $W_x^{\delta,i} \subset A$ e se $y \in W_x^{\delta,i}$ e $S^{-n}x, S^{-n}y$ sono abbastanza vicini (più di un R opportunamente piccolo) allora $d(S^{-n}x, S^{-n}y) \leq Ce^{-\lambda n}$.²

(iii) Sia δ abbastanza piccolo e si consideri la superficie $W_x^{\delta,i}$ e, per ogni $y \in W_x^{\delta,s}$, la superficie $W_y^{\delta,i}$. Dati x e $y \in W_x^{\delta,s}$ con y abbastanza vicino a x , per ogni $\xi \in W_x^{\delta/2,i}$ la $W_\xi^{\delta,s}$ interseca la $W_y^{\delta,i}$ in un punto η . Si stabilisce così una corrispondenza Hölder continua $\eta = z(\xi)$ “lungo la varietà stabile $W_x^{\delta,s}$ ” fra punti di varietà δ -locali instabili $W_x^{\delta,i}$ e $W_y^{\delta,i}$ vicine, definita per ogni ξ abbastanza vicino a x , c.f.r. Fig.2. E il rapporto fra elementi di superficie $d\sigma$ e $d\sigma'$ corrispondenti è una funzione non nulla $\rho_{x,y}(\xi)$. Questa proprietà è detta assoluta continuità delle varietà instabili.

Osservazioni:

(1) La proprietà (ii) consente di definire le varietà stabili globali $W_s^g(x)$ semplicemente come l'insieme dei punti y tali che $d(S^n x, S^n y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. E analogamente si possono definire le varietà instabili globali $W_i^g(x)$. Tali varietà, nell'esempio considerato, sono il piano $\underline{e}_-, \underline{e}_3$ e la retta \underline{e}_+ passanti

¹ O almeno che ogni punto di A sia parte di una successione $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0 = x$ di punti di A tali che $Sx_{k-1} = x_k$, $k \leq -1$.

² Nel caso non invertibile $S^{-n}x, S^{-n}y$ vanno sostituiti da y_{-n}, x_{-n} abbastanza vicini (più di un R opportunamente piccolo) e tali che $S^n y_{-n} = y$, $S^n x_{-n} = x$ e si deve richiedere che $d(y_n, x_n) \leq Ce^{-\lambda n}$.

per x e pensate avvolte sul toro nel modo naturale, essendo le coordinate x, y definite mod 2π . Come si vede nel caso, (25.1), le varietà globali di ogni punto sono dense sull'insieme attraente. Questa è una proprietà *generale*, c.f.r. [R3] p. 157, nel caso che l'insieme attraente sia topologicamente mescolante che, a sua volta, è una proprietà che non è sostanzialmente restrittiva (per l'osservazione (4) alla definizione 2 del §24). Dunque la sfrutteremo per costruire l'intuizione sulla natura di un insieme attraente.

(2) La proprietà (iii) fa vedere che la proprietà di assoluta continuità resta vera, anche se in un senso più debole e locale, assai più in generale che nell'esempio (25.1).

(B) *Struttura degli attrattori che verificano l'assioma A. Considerazioni euristiche.*

(1) L'insieme attraente A è, dunque, (nel caso di insiemi attraenti topologicamente mescolanti), la chiusura della varietà instabile di un qualsiasi suo punto. Ed è pure la chiusura della varietà instabile di un qualsiasi suo punto fisso, o di un'orbita periodica, (ad esempio di $\underline{0}$ nell'esempio considerato). La varietà stabile di un punto x consiste di una parte "ignorabile" (che possiamo chiamare *vagante* o *errante*), costituita dai punti "realmente" fuori dell'insieme attraente, (nell'esempio sono i punti che hanno una coordinata $z \neq 0$ e che evolvono schiacciandosi sull'insieme attraente).³

In molti casi la divisione qui netta, fra parte ignorabile e no, non è netta e la parte ignorabile può addirittura mancare, c.f.r. gli esempi nei problemi [7], [8]. Quello che è però comunque corretto è pensare l'insieme attraente come la chiusura della varietà instabile di un suo punto fisso o periodico (escludendo il caso di non mescolamento topologico che modificherebbe, però, banalmente il quadro). Tale varietà si ripiega su se stessa, ma due punti su di essa anche vicini si allontanano, nella loro evoluzione secondo S , con progressione esponenziale *purché* la loro distanza venga misurata *lungo la varietà stessa*.⁴

(2) Dunque conviene pensare l'insieme attraente come una varietà instabile di un punto x_0 , fisso o su un'orbita periodica, "svolta": il che nel caso dell'esempio considerato significa pensare la retta \mathcal{L} per $x_0 = (\underline{0}, 0)$ parallela alla \underline{e}_+ non come avvolta sul toro (e ivi densa) ma come una retta sul piano (cioè non la si pensa definita mod 2π). Il moto è allora di una semplicità grande: i dati iniziali che si trovano in un intorno 3-dimensionale U (ad esempio un cubetto di lato h con centro in $x_0 \in A$ e lati paralleli a $\underline{e}_+, \underline{e}_-, \underline{e}_3$) evolvono schiacciandosi sulla retta \mathcal{L} e deformando U in un lunghissimo e sottilissimo rettangolo.

³ Nell'esempio (25.1) questa "parte ignorabile" consiste nei punti che hanno una coordinata $z \neq 0$ ed evolvono verso l'insieme attraente mentre la parte sull'insieme attraente consiste nei punti con $z = 0$ locati sulla retta parallela a \underline{e}_- : quest'ultima *ricopre densamente* A .

⁴ Naturalmente poiché la varietà è limitata la vera distanza non può crescere indefinitamente, diversamente dalla distanza misurata lungo la varietà instabile.

(3) Con questa rappresentazione euristica del moto possiamo vedere facilmente cosa accade se si scelgono \mathcal{N} punti $x_1, \dots, x_{\mathcal{N}} \in U$ con distribuzione assolutamente continua rispetto alla misura di volume; ad esempio con densità costante $\rho = h^{-3}$. È chiaro che la media dei valori di un'osservabile f qualsiasi (di classe C^∞ sullo spazio delle fasi) è calcolabile, su tempi molto grandi, semplicemente mediando sull'insieme $S^N U$ con la densità $h^{-3} |(\det \partial S^N)_i|^{-1}$, ove $(\partial S^N)_i$ è la matrice jacobiana della trasformazione S^N come trasformazione della linea \mathcal{L} (che è la varietà instabile, donde la notazione con l'indice i) anzichè dell'intero spazio delle fasi M .

25.x

$$\langle f \rangle = \int_{S^N U} f(x) \rho | \det(\partial S^{-N}(x)_i) | dx \quad (25.3)$$

Ma poichè la regione $S^N U$ è sottilissima attorno a un tratto limitato \mathcal{L}_N della linea \mathcal{L} , quello che veramente conta è la densità lineare su \mathcal{L}_N e la media di f può essere calcolata semplicemente integrandone i valori su \mathcal{L}_N rispetto all'arco di linea ds con densità lineare *proporzionale* a $\Lambda_i(S^{-N}x(s); N)^{-1}$ se $\Lambda_i(x; N)$ è il coefficiente di dilatazione subito dall'elemento di linea su \mathcal{L} che inizia in U e che arriva in $x(s)$ al tempo N . Se $\lambda_i(x)$ denota l' "esponente locale di Lyapunov" $\lambda_i(x) \equiv \log \Lambda_i(x; 1)$ allora, per la regola di derivazione delle funzioni composte, $\Lambda_i(x, N) = \prod_{j=0}^{N-1} e^{\lambda_i(S^j x)}$.

Nel caso generale a più dimensioni $\Lambda_i(x; 1)$ va sostituito con la dilatazione dell'elemento d'area della restrizione di S alla varietà \mathcal{L} , ossia $| \det(\partial S)_i |$ e la densità lineare deve diventare ora una densità superficiale rispetto all'elemento d'area della varietà instabile.

(4) Quanto appena detto non consente ancora di descrivere quale sia la misura *SRB* associata all'insieme attrattore: per ottenerla si deve eliminare la dipendenza dei risultati dalla linea \mathcal{L} che rappresenta l'insieme attrattore "svolto", perchè ovviamente un tale oggetto geometrico ideale non deve apparire nei risultati. Allora ci si ricorda che punti lontanissimi su \mathcal{L} sono in realtà vicini, o possono esserlo, come punti su A . Ad esempio se x e y sono due punti di W_x^i vicini e tali che $y \in W_x^s$ allora possiamo facilmente confrontare la massa vicino a x e quella vicino a y : infatti sia $\delta_x^0 \subset \mathcal{L}$ un segmento (infinitesimo) di varietà instabile intorno ad x e δ_y^0 sia il corrispondente segmento intorno a y ottenuto via la corrispondenza illustrata nella Fig. 2. Immaginiamo ora che N sia enorme e notiamo che la densità attorno a x e a y va rarefacendosi sempre più al crescere di N ; il rapporto delle masse in x e y tende esattamente a:

25.3

$$\begin{aligned} \frac{\text{massa}(\delta_x^0)}{\text{massa}(\delta_y^0)} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\delta_x^0 \prod_{j=0}^M e^{-\lambda_i(S^{-j}x)}}{\delta_y^0 \prod_{j=0}^M e^{-\lambda_i(S^{-j}y)}} \equiv \\ &\equiv \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{\prod_{j=-M}^N e^{-\lambda_i(S^j x)} \delta_{S^N x}^N}{\prod_{j=-M}^N e^{-\lambda_i(S^j y)} \delta_{S^N y}^N} \equiv \prod_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(S^j x)}}{e^{-\lambda_i(S^j y)}} \end{aligned} \quad (25.4)$$

e la prima relazione richiede la considerazione del limite per $M \rightarrow \infty$ a

meno che l'espansione di S nell'intorno del punto fisso non sia costante.⁵ Nella seconda relazione $\delta_{S^N x}^N$ è il segmento di varietà instabile immagine di δ_x^0 per S^N , e simile notazione è usata per $\delta_{S^N y}^N$.

I due ultimi segmenti sono “praticamente identici” dal momento che si può dimostrare (*c.f.r.* (i) del teorema I) che le varietà instabili di coppie di punti che sono sulla stessa varietà stabile sono funzioni Hölder continue con un esponente $\alpha > 0$ della distanza fra x e y (e quindi anche $\lambda_i(x)$ dipende da x in modo da essere Hölder continua con un esponente $\alpha > 0$).

Infine il prodotto infinito della terza relazione converge perchè $S^j(x)$ e $S^j(y)$ hanno una distanza che tende a zero esponenzialmente sia nel futuro che nel passato: nel futuro perchè sono situati sulla stessa varietà stabile, per ipotesi, e nel passato perchè sono sulla stessa varietà instabile.

Tutto ciò è banale nel caso dell'esempio perchè $\lambda_i(x) \equiv \lambda_+$ è costante; e anche $\delta_x^0/\delta_y^0 = 1$ perchè le linee che stabiliscono la corrispondenza fra i segmenti δ_x^0 e δ_y^0 sono perpendicolari ai segmenti stessi (parallele a \underline{e}_-)

Si introduce, allora, la nozione di distribuzione assolutamente continua sulle varietà instabili:

1 Definizione (assoluta continuità sulla varietà instabile):

Nelle ipotesi del teorema I si considerino le varietà δ -locali $W_x^{\delta,i}, W_x^{\delta,s}$ su un insieme attraente A . Si dirà che la misura μ definita sui boreliani di A è assolutamente continua sulle varietà instabili se per tutti i punti $x \in A$ accade che sull'insieme Δ che consiste dell'unione delle superfici $W_\xi^{\delta,i}$ che passano per i punti $\xi \in W_x^{\delta/2,s}$ (la geometria è illustrata nella Fig.3) l'integrale $\int_\Delta f(y)\mu(dy)$ può essere calcolato come:

$$25.4 \quad \int_\Delta f(y)\mu(dy) = \int_{W_x^s} \nu(d\xi) \int_{W_\xi^i} f(\sigma)\rho_\xi(\sigma)d\sigma \quad (25.5)$$

ove ν è un'opportuna distribuzione di probabilità sulla varietà $W_x^{\delta/2,s}$, $d\sigma$ è l'elemento di superficie su $W_\xi^{\delta,i}$ e $\rho_\xi(\sigma)$ è una opportuna funzione, densità sulla varietà instabile.

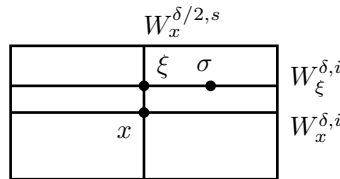


Fig.3

Fig.3: Il rettangolo rappresenta Δ e la figura illustra la (25.5).

Osservazioni euristiche:

(1) La (25.5) è una generalizzazione della formula di Fubini per gli integrali ordinari e differisce da essa perchè la misura ν non è necessariamente

⁵ Ovvero anche se U non ha spessore costante h nella direzione parallela alla varietà instabile del punto fisso.

dotata di densità, ossia non è necessariamente assolutamente continua nell'esempio considerato in (25.1), ν non è assolutamente continua (banalmente) perchè se $x = (\xi, \sigma, z)$ è un punto generico si ha $\nu(d\xi dz) = d\xi \delta(z) dz$.

(2) La formula (25.4) è molto interessante: se si visualizza l'insieme attraente come una varietà instabile allora si può dire che la misura SRB è una distribuzione dotata di densità rispetto alla misura di superficie sulla varietà instabile e la densità è inversamente proporzionale al coefficiente di espansione sulla varietà stessa. In altre parole si può pensare che il sistema sia, sull'insieme attraente, come un sistema hamiltoniano con hamiltoniana formale uguale a $H = cost + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \log \lambda_i(S^j(x))$. Questo è ovviamente improprio perchè la superficie è infinita, essendo la varietà instabile "senza bordo", e H è una somma divergente.

Ma il prodotto $e^{-H} d\sigma$ può avere senso ed essere interpretato come la misura μ . Un pó come nella Meccanica Statistica si dice che la distribuzione di probabilità che descrive lo stato di equilibrio di un sistema meccanico di particelle in R^3 (gas) è descritto dalla misura di Gibbs $\mu = C e^{-H(p,q)} dp dq$: anche questa è un'affermazione che non ha senso, a meno che non la si intenda come una relazione di limite in un senso opportuno. È analogo al senso in cui si deve intendere l'affermazione fatta su H e μ nel caso di un insieme attraente.

Si deve interpretare la misura di area sulla varietà instabile del punto fisso come analoga alla misura di Liouville: in modo che la parte di superficie instabile $S^N W_O^{\delta,i}$, del punto fisso O scelto, con N grande sarà analoga al contenitore di lato grande del gas. E $cost e^{-\sum_{j=0}^N \lambda_i(S^{-j}x)} d\sigma$, c.f.r. (25.4), è analoga alla misura di Gibbs a volume finito; il limite $N \rightarrow \infty$ gioca il ruolo di limite termodinamico.

Queste analogie sono il vero motivo per cui si noterà una sempre più stretta analogia del linguaggio adoperato per descrivere la teoria qualitativa dei moti su un insieme attraente e il linguaggio e le idee della Meccanica Statistica.

(3) Evidentemente la (25.5) non determina univocamente ν e ρ_ξ : se esiste una tale coppia si può moltiplicare $\nu(d\xi)$ per una funzione di ξ e dividere ρ_ξ per la stessa funzione ottenendo un'altra coppia ν', ρ' che ancora verifica le (25.5). C'è però una scelta naturale per ν e ρ che è suggerita dall'argomento che conduce alla (25.4).

Si può definire $\nu(d\xi)$ in modo che $\int_{\xi_1}^{\xi_2} \nu(d\xi) = \text{massa di } U \text{ che trasformata con } S^N \text{ viene a trovarsi nella striscia di } \Delta \text{ compresa fra } W_{\xi_1}^i \text{ e } W_{\xi_2}^i$.

Con questa scelta si avrà che $\int \rho_\xi(\sigma) d\sigma \equiv 1$ per ogni ξ . L'argomento euristico che conduce alla (25.4) dirà che il rapporto $\frac{\rho_\xi(\sigma)}{\rho_{\xi'}(\sigma)}$ è dato appunto dalla (25.4).

Quindi fissato Δ e il valore di $\rho_\xi(\sigma)$ in un punto arbitrario $x = (\xi, \sigma)$ in Δ (e sul supporto di μ) si determinano i valori di ρ nei punti $x' = (\xi, \sigma')$ e $y = (\xi', \sigma)$ a mezzo delle:

$$25.5 \quad \frac{\rho_\xi(\sigma)}{\rho_\xi(\sigma')} = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(S^{-j}x)}}{e^{-\lambda_i(S^{-j}x')}} \quad \text{e} \quad \frac{\rho_\xi(\sigma)}{\rho_{\xi'}(\sigma)} = \prod_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(S^{-j}x)}}{e^{-\lambda_i(S^{-j}y)}} \quad (25.6)$$

che determinano univocamente $\rho_\xi(\sigma)$ in Δ a meno di un fattore (per l'arbitrarietà del valore di ρ nel punto x prescelto).

Considerando la (25.6) per ciascuna delle varie scelte di Δ si trova che in realtà c'è solo l'arbitrarietà di un fattore *globale* perchè, potendosi ricoprire l'insieme attraente a mezzo di insiemi Δ , i fattori arbitrari in ciascun Δ sono tutti determinati salvo uno. Quest'ultimo è però poi determinato dalla condizione, di normalizzazione, che la μ -misura totale dell'insieme attraente deve essere 1. E quindi le (25.5), (25.6) determinano univocamente ν, ρ in ogni Δ che si voglia considerare.

Le considerazioni euristiche che hanno portato alla definizione 4 portano, dunque, anche alla seguente congettura, [R6],[R2]:

Congettura: Se (M, S) è un sistema dinamico (nel senso del §23) la misura SRB associata ad un insieme attraente A è una distribuzione di probabilità μ tale che:

- (i) per μ -quasi ogni punto di A ha senso definire una varietà stabile locale ed una varietà instabile locale regolari.
- (ii) la μ è assolutamente continua sulla varietà instabile di ogni punto $x \in A$ e ha una densità che verifica la (25.6) e (25.5), purchè valgano ipotesi ragionevoli (!).

Osservazioni:

(1) La necessità di "ipotesi ragionevoli", e il senso preciso da dare alle nozioni che intervengono nella congettura, è dovuta all'altrimenti facile costruzione di controesempi, *c.f.r.* problemi. Quali siano queste ipotesi è parte del problema posto dalla congettura. Se A è un insieme attraente che verifica l'assioma A e S è mescolante su A la congettura è vera, (Sinai, Ruelle, Bowen), onde il nome di SRB. In tal caso, inoltre, la μ è tale che il sistema dinamico (A, S, μ) è ergodico, mescolante e ogni osservabile ha spettro di potenza continuo (nel senso descritto all'inizio del §22).

(2) Dunque se A è un insieme attraente, cioè verificante l'assioma A (*c.f.r.* definizione 2 del §24), e se S è mescolante su A esiste una distribuzione SRB. In un certo senso il problema è risolto completamente in questo caso perchè si può anche dimostrare che esiste un'unica distribuzione invariante μ che verifica (25.5).

(3) Se il sistema dinamico (M, S, μ) è regolare nel senso della definizione 3 del §24 e A è un insieme attraente sul quale è concentrata la distribuzione μ invariante, allora per il teorema I del §24 vale la proprietà (i) della congettura: per questo motivo in [ER] si adotta una definizione di distribuzione SRB diversa da quella che usiamo e useremo qui e che chiama distribuzione SRB per (M, S) ogni distribuzione μ tale che (M, S, μ) è regolare e μ è assolutamente continua lungo le varietà instabili. Anche il requisito di

regolarità è, in [ER], posto in forma più debole che nella nostra definizione 3 del §24 (è la condizione $(\log ||T||)^+ \in L_1(\mu)$ del problema [11] del §24).

In relazione all'osservazione (2) sugli insiemi attraenti iperbolici è interessante menzionare che valgono, per tali insiemi attraenti, anche altre proprietà che si può pensare siano in realtà valide più in generale. Citiamo ad esempio:

II Teorema (rappresentazione in termini di orbite periodiche degli stati SRB):

Se A è un insieme attraente che verifica l'assioma A la distribuzione SRB definita su di esso può essere calcolata al modo seguente. Sia $\text{per}_n(A)$ l'insieme dei punti $x \in A$ che generano un moto periodico con periodo n e sia $\Lambda_i(x) \equiv (\det \partial S^n(x)|_{W^i(x)})$, ossia il determinante della matrice ∂S^n pensata come trasformazione agente sulla direzione instabile $V_i(x)$ (a valori in $V_i(Sx)$). Si definisca:

$$25.6 \quad \langle f \rangle_n = \frac{\sum_{x \in \text{per}_n(A)} \Lambda_i(x)^{-1} f(x)}{\sum_{x \in \text{per}_n(A)} \Lambda_i(x)^{-1}} \quad (25.7)$$

allora, per ogni osservabile regolare f , si ha:

$$25.7 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f \rangle_n \equiv \int_A \mu(dx) f(x) \quad (25.8)$$

ove μ è la distribuzione SRB.

Osservazioni:

(1) Dunque si vede, di nuovo, che il logaritmo del coefficiente di espansione locale $\log \Lambda_i(x)$, in un punto x su un tempo n , gioca il ruolo della funzione energia nella meccanica statistica, il tempo “di osservazione” n gioca il ruolo di volume del sistema. Il limite $n \rightarrow \infty$ gioca il ruolo del “limite termodinamico”.

(2) Grazie a questa osservazione si vede, in un modo diverso da quello già notato nell'osservazione (2) alla definizione 1, che è possibile formulare molte proprietà qualitative delle medie temporali del sistema utilizzando idee e metodi della Meccanica Statistica. L'effettivo uso di questa analogia dá luogo al cosiddetto “formalismo termodinamico” per la descrizione dei moti su insiemi attraenti strani.

(3) La relazione (25.7) è un' immediata conseguenza della teoria SRB, [S], ed è stata molto studiata in [R1] e [Bo], *c.f.r.* [G2] in particolare a p.254 Eq. (21.18). Per una sua ulteriore discussione si veda il seguente §27, (D).

(4) Nella (25.8) ci si può limitare alla sola somma sulle orbite periodiche che non intersecano una superficie regolare prefissata arbitrariamente.

(5) Le (25.7), (25.8) seguono dalla teoria di Sinai basata sui pavimenti markoviani (*c.f.r.* §27, e [G2] §21, XLIII): ma negli articoli originali questo fatto è talmente ovvio da non essere stato sottolineato molto esplicitamente. Ciononostante è “filtrato” all'esterno (della teoria) ed continua, sorprendentemente, ad essere “riscoperto”: è noto come lo *sviluppo in orbite periodiche* della distribuzione SRB. Si deve attribuire la fortuna di questa rappresentazione

della distribuzione SRB al fatto che le orbite periodiche sono un concetto assai semplice ed elementare rispetto alle nozioni geometriche alla base della teoria di Sinai (*c.f.r.* §27). Ma non si deve perdere di vista che invece è proprio sulle nozioni “giudicate” più complesse (“i pavimenti di Markov”, *c.f.r.* §27) della teoria di Sinai che in ultima analisi riposa la validità della (25.8) che esprime solo un corollario della teoria completa (discussa nel §27) e non è equivalente ad essa.

(C) *Insiemi attraenti e attrattori. Dimensioni frattali.*

A questo punto conviene introdurre la nozione di *attrattore* e di sua *dimensione frattale*.

Sia dato un sistema dinamico (M, S) con un insieme attraente A , ossia un insieme chiuso invariante tale che per tutti i punti x di un suo intorno U sia $d(S^n x, A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, e che sia privo di sottoinsiemi con le stesse proprietà, *c.f.r.* definizione 1 del §23. La definizione 1 del §24 allude al fatto che su A possono esistere varie distribuzioni di probabilità S -invarianti μ le quali possono essere pensate come le statistiche di diverse distribuzioni μ_0 definite sul bacino di attrazione U , si vedano i problemi per alcuni esempi.

Le distribuzioni μ sono di solito ergodiche (ma non sempre, *c.f.r.* il problema [2]) e quindi dire che μ e μ' non sono identiche significa dire che $\mu(N) = 0$ e $\mu'(N) = 1$ per qualche insieme boreliano $N \subset A$.

In questo caso si dirà che le distribuzioni μ_0 e μ'_0 , delle quali μ e μ' sono le statistiche, hanno lo stesso insieme attraente ma un diverso attrattore. Diamo dunque una definizione formale:

2 *Definizione (attrattore e dimensione d'informazione):*

Dato un sistema dinamico regolare (M, S) e una distribuzione di probabilità μ_0 su M diremo che A_{μ_0} è un attrattore per (M, S, μ_0) se μ_0 ha una statistica μ e:

(i) A_{μ_0} è invariante.

(ii) A_{μ_0} ha μ -probabilità 1: $\mu(A_{\mu_0}) = 1$.

(iii) A_{μ_0} ha dimensione frattale d_I di Hausdorff (*c.f.r.* §15, (A)) minima fra quelle degli insiemi che verificano (i, ii). La dimensione d_I si chiama *dimensione d'informazione* di (M, S, μ_0) e talvolta si denota $d_I(\mu_0)$ ove sia necessario sottolineare la sua dipendenza dalla distribuzione μ_0 .

Osservazioni:

(1) A_{μ_0} non è, in generale, unico. Ad esempio se i singoli punti di A_{μ_0} hanno μ -probabilità nulla e $x \in A_{\mu_0}$ allora l'insieme che si ottiene togliendo da A_{μ_0} tutta l'orbita di x ha ancora le proprietà (i, ii, iii).

(2) Se μ_0 dà probabilità 1 ad un bacino d'attrazione U per un insieme attraente A (“se μ_0 è concentrata sul bacino d'attrazione d'un insieme attraente A ”) allora A_{μ_0} può essere scelto contenuto in A .

(3) Un attrattore per (M, S, μ_0) è, in generale, *non chiuso*.

(4) La nozione di insieme attraente è naturale per sistemi dinamici in cui M è regolare e S è almeno continua. Quella di attrattore per (M, S, μ_0) ha invece senso ed interesse anche se M e S hanno singolarità su insiemi di

μ_0 -misura nulla. E addirittura se M è molto più generale che una varietà: ad esempio se M ha dimensione infinita o è solo uno spazio metrico.

(5) In generale se A è un insieme che ha probabilità 1 per una distribuzione di probabilità μ si dice che μ è *concentrata* o ha *supporto* su A . Dunque si può dire che *un attrattore per (M, S, μ_0) è un insieme invariante di minima dimensione di Hausdorff sul quale possa essere concentrata la statistica μ di μ_0 .*

(6) La discussione euristica che porta alla congettura in (B) e le (24.6) consentono di stabilire un'altra interessante nozione di dimensione frattale legata a quella di dimensione di Hausdorff.

Siano $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$ gli esponenti di Lyapunov contati con la loro molteplicità, di un sistema dinamico (M, S, μ) ergodico in cui μ sia la statistica SRB su un insieme attraente $A \subset M$. Le (24.6) mostrano che gli elementi di volume di dimensione d con d tale che $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d > 0$ si espandono "genericamente" e, quindi, ci si potrebbe aspettare che un attrattore abbia dimensione di informazione (*diversa da quella d_H di A , in generale*) almeno d .

Se poi $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{d+1} \leq 0$ la dimensione d'informazione del sistema potrebbe essere $\leq d + 1$ e se ε è tale che $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d + \varepsilon \lambda_{d+1} = 0$ allora la dimensione d'informazione dovrebbe essere proprio $d_L = d + \varepsilon$: un argomento euristico, di validità ristretta, si trova in [KY]. È un problema interessante trovare condizioni che implicino che $d + \varepsilon$ è effettivamente uguale alla dimensione di informazione.

Siccome può essere differente da d_I , la quantità $d_L = d + \varepsilon$ si chiama *dimensione di Lyapunov* della dinamica S vista con la distribuzione μ sull'insieme attraente A : la nozione è dovuta a Kaplan e Yorke, *c.f.r.* [ER], e talvolta si denota $d_L(\mu)$ per sottolineare la sua dipendenza dalla distribuzione μ .

(7) È noto che la dimensione di Lyapunov d_L di una distribuzione invariante ergodica μ su un insieme attraente A per una dinamica analitica S su una varietà analitica M è \geq della dimensione d'informazione d_I di (M, S, μ) , [Le], *che μ sia una statistica SRB o no: $d_I \geq d_H$ (disuguaglianza di Ledrappier).* Inoltre se la dimensione di M è 2 e se μ è assolutamente continua sulle varietà instabili allora la dimensione di Lyapunov di (M, S, μ) e quella d'informazione coincidono, [Y], (*teorema di Young*). Si vedano i problemi [9]÷[11] del §27 per un'analisi euristica del teorema di Young.

Ma in assoluta generalità è facile trovare controesempi alla uguaglianza $d_I = d_L$, *c.f.r.* problema [10], altri esempi si trovano in [ER]. Pertanto converrà sempre pensare come *distinte* le nozioni di dimensione d'informazione e dimensione di Lyapunov. ■

Appendice: La teoria di Pesin.

Vale il seguente teorema, *c.f.r.* [Os],[Pe1],[Pe2]:

*I' Teorema: Se (M, S) è un sistema dinamico invertibile e (M, S, μ) è un sistema μ -regolare ergodico (*c.f.r.* §23, e definizione 3 del §24):*

(i) μ -quasi ogni punto di M ha una base dinamica per S e una per S^{-1} .

(ii) Gli esponenti di Lyapunov $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$ per la S e le loro molteplicità sono costanti μ -quasi ovunque ed opposti a quelli di S .

(iii) Se nessun esponente di Lyapunov è nullo e se le $V_s(x)$, $V_i(x)$ sono il piano stabile e instabile per S , allora tali piani sono integrabili nel senso che esiste $\delta(x) > 0$ e due porzioni di superficie regolare, denotate $W_x^{\delta(x),s}$ e $W_x^{\delta(x),i}$, che contengono x e

(1) In ogni loro punto y esiste una base dinamica e i piani $V_s(y)$ e $V_i(y)$ sono, rispettivamente, tangenti a $W_x^{\delta(x),s}$ e $W_x^{\delta(x),i}$.

(2) ogni $y \in W_x^{\delta(x),s}$ o $y \in W_x^{\delta(x),i}$ ha basi dinamiche per S e per S^{-1} ,

(3) in ogni loro punto y le varietà sono tangenti a $V_s(y)$ e $V_i(y)$ rispettivamente. ■

(4) inoltre se $y \in W_x^{\delta(x),s}$ o $y \in W_x^{\delta(x),i}$ si ha $\delta(y) \geq \frac{1}{2}\delta(x)$.

(iv) Se tutti gli esponenti di Lyapunov non positivi sono $< -\lambda < 0$ allora per ogni $y \in W_x^{\delta(x),s}$ si ha $d(S^n x, S^n y) \leq C(x)e^{-\lambda n}$ per $n \geq 0$, similmente se tutti gli esponenti non negativi sono $> \lambda > 0$ allora per ogni $y \in W_x^{\delta(x),i}$ si ha $d(S^{-n} x, S^{-n} y) \leq C(x)e^{-\lambda n}$ per $n \geq 0$, $\lambda, C(x)$ opportune, e μ -quasi ovunque in x .

Osservazioni:

(1) La proprietà (iv) consente di estendere le definizioni delle *varietà stabili globali*, c.f.r. osservazione (1) al teorema I, definendo $W_s^g(x)$ semplicemente come l'insieme degli y tali che $d(S^n x, S^n y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: tuttavia in generale tale varietà non sarà regolare e conterrà punti di singolarità. E così si possono definire *varietà instabili globali* $W_i^g(x)$. La varietà $W_i^g(x)$ è a volte densa sul supporto di μ e il teorema può essere usato per costruire l'intuizione sulla natura di un insieme attraente in questa situazione più generale, analogamente al caso degli insiemi attraenti verificanti l'assioma A.

(2) Anche la corrispondenza stabilita fra varietà stabili tramite le loro intersezioni con le varietà instabili, c.f.r. (iii) del Teorema I e Fig.2, Fig.3, è generalizzabile ai casi del teorema I'. Ma il fatto che in generale le varietà locali possono avere grandezza $\delta(x)$ variabile in funzione di x fa sì che la formulazione precisa sia un pò pesante e non la discutiamo esplicitamente.

(3) Il motivo sostanziale alla radice della validità di questo teorema è che i punti regolari si avvicinano con "velocità al più" polinomiale alle singolarità di S o S^{-1} (c.f.r. osservazione (2) alla definizione 3 del §24), mentre le proprietà delle varietà stabile e instabile vengono dedotte in base alla loro contrazione esponenziale. Quindi sui punti regolari "le cose vanno" come se il sistema fosse privo di singolarità.

(4) La dimostrazione di questo teorema è alla base di una assai soddisfacente estensione del teorema II a sistemi (M, S) regolari rispetto alla misura di volume μ_0 nel senso della definizione 3, §24, c.f.r. [Pe2]. La teoria in [Pe2] estende la (25.7) e soprattutto le seguenti (27.4), (27.8) (dalla quale la (25.7) segue) sulle quali le applicazioni del Cap. IV, §31÷§34 saranno fondate. ■

Problemi

[1] Si consideri il pendolo e la sua separatrice nello spazio delle fasi. Si mostri che è possibile modificare le equazioni del moto lontano dal punto fisso instabile in modo che la separatrice attragga i punti di un suo intorno ma in modo che il moto sulla separatrice resti inalterato. Si mostri che l'insieme attraente così ottenuto (per l'evoluzione cadenzata ad intervalli di tempo costanti, ad esempio) non è iperbolico (si trovi almeno un motivo diverso dall'assenza di punti periodici densi). Inoltre si mostri che sull'insieme attraente esiste una distribuzione di probabilità che descrive la statistica di quasi ogni punto vicino ad esso ma che non è assolutamente continua sulla varietà instabile (ossia sulla separatrice). (*Idea:* La distribuzione invariante è semplicemente una δ di Dirac sul punto di equilibrio instabile.)

[2] Si modifichi l'esempio [1] in modo da costruire un insieme attraente che non ha una statistica SRB. (*Idea:* si immagini il cerchio su cui ruota il pendolo come doppio, ossia l'angolo va da 0 a 4π in modo che il sistema acquisisca due punti fissi instabili distinti ma "legati dalla stessa separatrice", allora per il meccanismo visto al problema [7] del §23 il tempo speso presso ognuno dei due punti fissi instabili non è una frazione ben definita del tempo totale T trascorso neppure per $T \rightarrow \infty$.)

[3] Si consideri l'esempio nell'equazione (25.1) e si scriva $S = S_0 \times 2^{-1}$ ove S_0 è il gatto arnoldico definito sul toro T^2 dalla prima delle due relazioni del membro di destra dell'equazione (25.1)). Supponendo che la distribuzione $\mu = dx dy / (2\pi)^2$ non sia l'unica distribuzione invariante ergodica, per la trasformazione S_0 , e che da probabilità positiva a tutti gli insiemi aperti di T^2 , c.f.r. §27 per alcuni esempi, si costruisca un esempio di un insieme attraente sul quale il sistema dinamico dell'equazione (25.1) genera, rispetto a due diversi metodi di scelta casuale dei dati iniziali, attrattori diversi e con dimensioni di informazione diverse. (*Idea:* Sia $\mu' \neq \mu$ un'altra distribuzione invariante; allora le scelte casuali di dati iniziali con distribuzione $\rho(x, y, z) dx dy \times dz$ conducono, per ogni scelta di $\rho > 0$, alla statistica $\mu(dx dy) \times \delta(z) dz$ mentre scelte casuali di dati iniziali con la distribuzione $\rho(x, y, z) \mu'(dx dy) \times dz$ conducono, per ogni scelta di $\rho > 0$, alla statistica $\mu'(dx dy) \times \delta(z) dz$. La dimensione di informazione sarà $d_I(\mu) = 2$ nel primo caso e $d_I(\mu')$ nel secondo e, per esempi si veda §27, μ' può essere scelta in modo che $d_I(\mu')$ sia piccola quanto si voglia.)

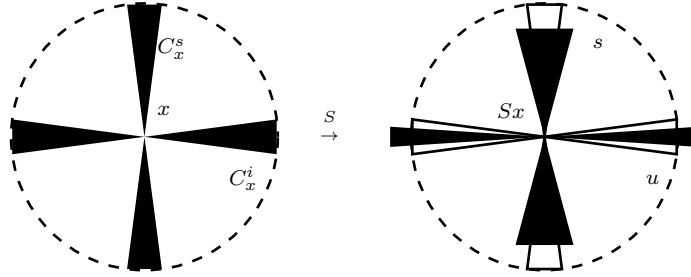


Fig. 4: Rappresentazione simbolica della proprietà di cono per le varietà stabile (verticale) e instabile (orizzontale).

[4] Sia (M, S) un sistema iperbolico, nel senso della definizione 2 del §24, allora è possibile definire nello spazio tangente T_x di ogni punto x due coni⁶ di vettori tangenti C_x^α , $\alpha = s, i$ di apertura $\rho > 0$ e assi (R_x^s, R_x^i) o, rispettivamente, (R_x^i, R_x^s) tali che esista un intero $m > 0$ e un coefficiente $\kappa > 1$ per cui:

⁶ Un cono in x con assi (W_x, Y_x) e apertura ρ è un insieme di vettori tangenti aventi la forma $w + y$ con $|y| < \rho|w|$ e $w \in W_x, y \in Y_x$ e $W_x \oplus Y_x = T_x$. Inoltre la somma di due piani tangenti denota il piano tangente sotteso dai due addendi mentre la somma \oplus denota che i due piani sono anche linearmente indipendenti.

$$\begin{aligned} \partial S^m C_x^i &\subset C_{S^{\pm m}x}^i & (\partial S^m C_x^i) \oplus C_{S^m x}^s &= T_{S^m x} \\ \|\partial S^m \xi\| &\geq \kappa \|\xi\|, & \xi \in C_x^i & \quad \|\partial S^m \xi\| \leq \kappa^{-1} \|\xi\|, & \xi \in C_x^s \end{aligned} \quad (!)$$

per ogni $x \in M$. Si interpreti la precedente figura Fig. 4 come una illustrazione della definizione:

[5] Dato il sistema dinamico (M, S) si supponga che X sia un sottoinsieme invariante chiuso e che nel suo intorno S, S^{-1} siano invertibili e differenziabili C^∞ . Si supponga che in ogni punto $x \in X$ lo spazio tangente T_x sia decomposto come $T_x = E_x^+ \oplus E_x^-$ (con una decomposizione non necessariamente invariante) e che esistano funzioni $\rho^\pm(x)$ (non necessariamente continue) e $\kappa > 1$, $m > 0$ e due coni C_x^i e C_x^- di assi (E_x^+, E_x^-) e (E_x^-, E_x^+) , e aperture $\rho^+(x)$ e $\rho^-(x)$, rispettivamente. Si dice che il sistema (M, S) è *approssimativamente iperbolico* su X se valgono le (*) di [4], c.f.r. [R3] p. 95.

[6] Se (M, S) è approssimativamente iperbolico, nel senso del [5], su X allora l'insieme X è iperbolico nel senso della definizione 2 di §24. Si veda [R3] p. 125 e p. 126 per una semplice e rapida dimostrazione.

[7] Se il sistema dinamico (M, S) è regolare rispetto al volume μ_0 nel senso della definizione 3 del §24 e se X è un insieme invariante di punti regolari sul quale vale la proprietà di iperbolicità approssimata nel senso del [5] *ma senza la condizione che X sia chiuso* allora per ogni $x \in X$ esistono piani R_x^s e R_x^i tali che $T_x = R_x^s \oplus R_x^i$ che verificano le (24.1). Si dimostra lungo le linee di [6].

[8] Si consideri un toro bidimensionale “pieno” M , cioè un cilindro pieno con le basi identificate (comunemente chiamato “tarallo”, da pensare crudo nella costruzione che segue). Si immagini di comprimere di un fattore $\lambda > \sqrt{2}$ la sezione allungando al tempo stesso la circonferenza di un fattore 2. Si ottiene un tarallo lungo e stretto che può essere deformato fino ad acquisire una forma di “otto” (senza però sovrapporlo, neanche parzialmente, a se stesso: il tarallo è dunque pensato come impenetrabile) e quindi si immagini di inserirlo nello spazio già occupato dal tarallo all'inizio degli stiramenti descritti. Si definisce così una trasformazione S di M in se. L'attrattore di questa dinamica verifica l'assioma A ma non è una superficie regolare. Per ragioni che mi sfuggono questo esempio classico è chiamato “il solenoide”.

[9] Il solenoide del problema [8] può essere pensato come $C \times \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$, prodotto di un cerchio $C = [0, 2\pi]$ per lo spazio $\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ delle successioni $\underline{\sigma}$ di cifre ± 1 identificando $(0, \underline{\sigma})$ e $(2\pi, \underline{\sigma}')$ con $\underline{\sigma}'$ opportunamente definito in termini di $\underline{\sigma}$. Si mostri anche che la dimensione di Hausdorff del solenoide è $\alpha = 1 + \frac{\log 2}{\log \lambda}$. (Idea: Si noti che la sezione del tarallo dopo una trasformazione S^n consiste di 2^n cerchi di raggio λ^{-n} , e quindi si ragioni come nello studio della dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor, c.f.r. §15, (A).)

[10] Si consideri l'esempio (25.1) ma con z sostituito da $\underline{z} = (z_1, \dots, z_k)$, $z_j \in [-1, 1]$ e con la trasformazione S definita dal gatto arnoldiano su (x, y) e da:

$$z_j' = e^{-\varepsilon} z_j, \quad \varepsilon > 0, \quad j = 1, \dots, k$$

per le altre variabili. Si dimostri che *tutte le distribuzioni invarianti* hanno gli stessi esponenti di Lyapunov $\lambda = \log \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $-\lambda$ con molteplicità 1 e $-\varepsilon$ con molteplicità k . Si mostri anche che la distribuzione SRB è $\mu(dx dy dz_1 \dots) = \frac{dx dy}{(2\pi)^2} \prod_j \delta(z_j) dz_j$ e che l'insieme attraente ha dimensione di Hausdorff 2, l'attrattore ha anche dimensione d'informazione 2, mentre la dimensione di Lyapunov è $2 + k$ se $\varepsilon = \lambda/k$. (Idea: La misura di Lebesgue è assolutamente continua sulla varietà instabile (e anche sulla stabile) per il teorema di Fubini.)

[11] Si trovi un esempio di un sistema dinamico con un insieme attraente A sul quale esistono diverse distribuzioni μ, μ', \dots che sono statistiche SRB nel senso che quasi tutti i punti vicini ad A hanno una statistica ben definita che è una fra le μ, μ', \dots . (Idea: Si consideri il sistema dinamico del problema [3] e, usando le notazioni dell'idea per il

problema [3], sia $\bar{\mu} = (\mu + \mu')/2$ e $\mu_0 = \bar{\mu} \cdot dz$; allora $\bar{\mu}$ -quasi tutti i punti in $M = T^2 \times [0, 1]$ hanno una statistica che però è con probabilità 1/2 la distribuzione $\mu \times \delta(z)dz$ e con probabilità 1/2 la $\mu' \times \delta(z)dz$.)

Bibliografia: [S],[R1], [G2], [R3] p.94. Per (25.8) si veda ad esempio [R4], 7.20. Per l'analisi dettagliata di varie nozioni di dimensione *c.f.r.* [Pe3]. Si veda [ER] e [Pe2], [R3] per i problemi.

§26 Ordinamento del Caos. Entropia e complessità.

Un'altra importante proprietà qualitativa dei moti caotici è la loro complessità. Questa nozione può essere resa quantitativa conducendo ad interessanti nuove idee dinamiche.

(A) Osservazioni complete e dinamica simbolica formale.

Dato un sistema dinamico metrico regolare (M, S, μ) con S trasformazione μ -regolare nel senso della definizione 3 del §24, possiamo immaginare il seguente “modello di osservazione”: sia $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ una “pavimentazione” della superficie M (spazio delle fasi) in n domini (c.f.r. nota ¹ all'inizio del §23) che, due a due, hanno in comune al più punti di frontiera (che si supporrà che sia “regolare”, ad esempio C^∞ a tratti). Gli insiemi P_i , $i = 1, \dots, n$, rappresentano gli “stati” x nei quali i risultati di una certa osservazione assumono valore dato: se $x \in P_i$ allora il risultato della osservazione è i ; e se x è comune a due o più insiemi di \mathcal{P} rappresenta uno stato sul quale l'osservazione è “imprecisa” e fornisce risultato ambiguo.

Si può ad esempio pensare che lo spazio delle fasi sia suddiviso in regioni consistenti nei punti in cui una certa funzione regolare $f(x)$, con $0 \leq f \leq n+1$ assume valori $f(x) \in [i, i+1]$ con $i = 0, 1, \dots, n-1$. Se $P_i = f^{-1}([i, i+1])$, con $i = 0, \dots, n-1$, e se $x \in P_i$ si dirà che il risultato dell'osservazione è i .

Ad ogni punto x si possono associare le sue S -storie, o semplicemente le storie, $\underline{\sigma}(x)$ rispetto all'osservazione \mathcal{P} : sono le successioni $\underline{\sigma}(x) = \{\sigma_k\}_{k=0, \infty}$ tale che $S^k x \in P_{\sigma_k}$. Ci dicono in quale insieme P_σ si viene a trovare x dopo un tempo k .

Poichè gli elementi del pavimento \mathcal{P} non sono necessariamente disgiunti (a causa di eventuali punti di frontiera comuni) potrà accadere che ad uno stesso x possano essere associate più storie: ma questo può avvenire solo se per qualche k il punto $S^k x$ appartiene alla frontiera di due tessere diverse del pavimento e quindi sarà di solito un evento eccezionale.

La storia di un punto è un modo di introdurre coordinate che lo rappresentano in modo *non convenzionale*. Si può immaginare che i simboli σ_k , che appaiono nella storia del punto x , siano una *generalizzazione* della rappresentazione in base n del valore di una coordinata del sistema, o addirittura di tutte le coordinate necessarie a descrivere lo stato del sistema.

Per chiarire questo concetto è bene pensare ad un esempio: sia $M = [0, 1]$, e sia S la trasformazione $Sx = 10x \bmod 1$. Allora si immagini di dividere l'intervallo $[0, 1]$ in 10 intervalli $P_0 = [0, 0.1]$, $P_1 = [0.1, 0.2]$, \dots , $P_9 = [0.9, 1]$. Se $x = 0.\sigma_0\sigma_1\dots$ è la rappresentazione in base 10 di x è immediato verificare che una possibile S -storia di x sul pavimento \mathcal{P} appena descritto è proprio $\sigma_0, \sigma_1, \dots$. Dunque si vede in quale senso la storia di un punto sia un modo per descrivere a mezzo di coordinate il punto stesso.

Si vede anche che in questo caso “solo” i punti che in base 10 sono

rappresentati da successioni di cifre definitivamente uguali a 0 o definitivamente uguali a 9 possono avere storie ambigue. Tali punti sono un insieme numerabile (*anche se denso*).

Di solito se la trasformazione S è invertibile la storia di un punto non determina il punto stesso e in tal caso si introduce la *storia bilatera* come la successione $\underline{\sigma} = \{\sigma_k\}_{k=-\infty, \infty}$ definita da $S^k x \in P_{\sigma_k}$ per $k \in (-\infty, \infty)$: la storia bilatera, a volte, determina il punto anche se la storia unilatera non lo fa.

1 Definizione: Si dice che un'osservazione \mathcal{P} è completa rispetto alla trasformazione S e alla distribuzione S -invariante μ se per μ -quasi tutti i punti x la storia $\underline{\sigma}(x)$, (bilatera se S è invertibile e unilatera altrimenti), è unica e determina univocamente x . Ossia se esiste un insieme N di μ -probabilità nulla, $\mu(N) = 0$, tale che se $x, x' \notin N$ e $\underline{\sigma}(x) = \underline{\sigma}(x')$ allora $x \equiv x'$ e se, inoltre, $x \notin N$ allora la storia di x su \mathcal{P} è unica. Si dice anche che \mathcal{P} è un pavimento generante.

Ovviamente una trasformazione invertibile può anche essere considerata solo per tempi positivi e come non invertibile: quindi è possibile che uno stesso pavimento sia un'osservazione completa nel caso che la trasformazione sia pensata invertibile, e non lo sia se invece la trasformazione S viene considerata solo per tempi ≥ 0 , cioè viene considerata come non invertibile.

Non tutte le trasformazioni ammettono pavimenti generanti: ad esempio l'identità $x \rightarrow x$ ovviamente *non* le ammette (a meno che M sia un insieme con un numero finito di punti). Ma, almeno se M è una superficie (a dimensione finita) e S è regolare su M , i casi in cui non esistono osservazioni complete sono molto speciali.

Sia dunque (M, S, μ) un sistema dinamico metrico regolare (c.f.r. definizione 3 (c) del §23) che ammette un'osservazione $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ completa. È chiaro che l'azione di S viene rappresentata in modo banale in termini della storia di $x \in M$. Se N è l'insieme di misura nulla fuori del quale la storia determina univocamente il punto che la genera e ne è determinata, allora la storia di Sx è legata a quella di x semplicemente da $\sigma_k(Sx) \equiv \sigma_{k+1}(x)$. Ossia nel caso invertibile l'applicazione di S equivale alla *traslazione* della storia di una unità a sinistra; nel caso non invertibile invece equivale alla traslazione di una unità a sinistra seguita dalla *rimozione* del primo simbolo.

Dal momento che l'associazione punto–storia conduce ad una rappresentazione universale e semplice della dinamica, quale traslazione nello spazio delle successioni, *deve* essere in generale assai difficile costruire il *codice* che associa a $x \in M$ la sua storia rispetto a \mathcal{P} .

Invero le cose stanno così e la prima questione interessante è quanti siano i simboli necessari, al minimo, per poter avere un pavimento con quel numero di simboli e generante rispetto ad un sistema dinamico (M, S, μ) .

Questa semplice domanda conduce al concetto di *complessità* o *entropia* del sistema dinamico (M, S, μ) . Per introdurlo si da prima la nozione di *distribuzione delle frequenze* dei simboli di una storia o, più in generale, di

una successione di cifre.

2 *Definizione (frequenze di stringhe in una successione di simboli):*

Se $k \rightarrow \sigma_k$, $k = 0, 1, \dots$, è una successione di cifre con $\sigma_k = 0, \dots, n-1$ si dice che $\underline{\sigma} = \{\sigma_k\}_{k \geq 0}$ ha frequenze ben definite se, per ogni stringa finita di cifre $(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p)$, esistono i limiti:

$$\nu(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} (\text{numero di valori di } h \text{ tali} \quad (26.1)$$

$$\text{che } \sigma_h = \hat{\sigma}_0, \dots, \sigma_{h+p} = \hat{\sigma}_p \text{ con } h \leq N)$$

cioè se la frequenza $\nu(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p)$ con cui la stringa $(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p)$ appare nella successione $\underline{\sigma}$ è ben definita.

Osservazioni:

(1) Dato un sistema dinamico (M, S, μ) ergodico, c.f.r. §23 definizione 5, e un'osservazione completa (o pavimento generante) \mathcal{P} di M si può definire per μ -quasi ogni punto x la storia $\underline{\sigma}(x)$ su \mathcal{P} e la famiglia $\{\nu(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p)\}$ delle frequenze delle stringhe finite $(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p)$ in cui $\hat{\sigma}_i$ assume i valori $0, 1, \dots, n-1$. Tali frequenze¹ sono ovviamente costanti del moto (in quanto x e Sx hanno storie con uguali frequenze), e quindi devono essere μ -quasi ovunque indipendenti da x .

(2) È chiaro allora, c.f.r. §24 problemi [4],[5], che se nel caso ergodico della precedente osservazione si pone:

$$E \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ \hat{\sigma}_0 & \hat{\sigma}_1 & \dots & \hat{\sigma}_p \end{pmatrix} \equiv \bigcap_{j=0}^p S^{-j} P_{\hat{\sigma}_j} \quad (26.2)$$

si deve avere:

$$\nu(\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_k) = \mu \left(E \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ \hat{\sigma}_0 & \hat{\sigma}_1 & \dots & \hat{\sigma}_p \end{pmatrix} \right) \quad (26.3)$$

(3) Si può dimostrare, senza eccessive difficoltà e sulla base delle definizioni fondamentali della teoria della misura, che se \mathcal{P} è completa (c.f.r. definizione 1), allora la misura μ è univocamente determinata dalle frequenze (26.3).

(4) Se \mathcal{P} è un'osservazione completa, ogni funzione $x \rightarrow f(x)$ su M (che sia μ -misurabile) è pensabile come una funzione sullo spazio \mathcal{S} delle successioni unilateri $\underline{\sigma}$ di cifre, nel caso non invertibile, ovvero bilatere nel caso invertibile. Inoltre le osservazioni (2) e (3) fanno vedere che le frequenze di una successione $\underline{\sigma}$ di cifre possono essere interpretate come una distribuzione di probabilità $\mu_{\underline{\sigma}}$ sullo spazio \mathcal{S} , invariante rispetto alle traslazioni τ delle successioni (verso sinistra). Basta porre:

$$\mu_{\underline{\sigma}} \left(C \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ \hat{\sigma}_0 & \hat{\sigma}_1 & \dots & \hat{\sigma}_p \end{pmatrix} \right) = \nu(\hat{\sigma}_0 \dots \hat{\sigma}_p) \quad (26.4)$$

¹ Che esistono, in generale, μ -quasi ovunque per il teorema ergodico di Birkhoff, c.f.r. problemi filosofici [4] e [5], §24.

ove $C_{\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_p}^{0 \ 1 \ \dots \ p}$ è un *cilindro* in \mathcal{S} , cioè è l'insieme delle successioni di \mathcal{S} tali che $\sigma_0 = \hat{\sigma}_0, \dots, \sigma_p = \hat{\sigma}_p$; o più formalmente:

$$C_{\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_p}^{0 \ 1 \ \dots \ p} = \bigcap_{j=0}^p \tau^{-j} C_{\hat{\sigma}_j}^{0 \ 1 \ \dots \ p} \quad (26.5)$$

La (26.4) può essere estesa per “additività” in modo da dare senso alla probabilità $\mu_{\underline{\sigma}}(E)$ per ogni insieme E rappresentabile come unione finita o numerabile di cilindri, *c.f.r.* (26.5), disgiunti. Si ottiene così una distribuzione di probabilità $\mu_{\underline{\sigma}}$ definita sulla più piccola famiglia di insiemi che contiene i cilindri e che è chiusa rispetto ad operazioni di complementazione, unione e intersezione numerabile.

Poichè sullo spazio \mathcal{S} delle successioni di cifre è naturale introdurre una nozione di convergenza per cui $\underline{\sigma}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{\sigma}$ se per ogni j si ha *definitivamente* $(\sigma_n)_j \equiv \sigma_j$ (ossia questa relazione vale per $n > n_j$ per un opportuno n_j): si vede che i cilindri (26.5) giocano rispetto a questa nozione di convergenza (e alla topologia su \mathcal{S} ad essa associata) e alla distribuzione $\mu_{\underline{\sigma}}$ il ruolo degli intervalli per l'ordinaria nozione di convergenza su $[0, 1]$ e per la misura di Lebesgue su $[0, 1]$. Quindi la distribuzione di probabilità $\mu_{\underline{\sigma}}$ può essere pensata come definita sui *boreliani* della topologia naturale di \mathcal{S} .

Così dato un sistema dinamico (M, S, μ) le frequenze di μ -quasi tutti i punti di M definiscono² un sistema dinamico metrico $(\mathcal{S}, \tau, \mu_{\underline{\sigma}})$, ove τ è la traslazione sopra definita, che è “equivalente” al sistema dinamico (M, S, μ) : l'equivalenza (detta *isomorfismo*) è una nozione che non definiremo formalmente ed è stabilita dalla corrispondenza punto \longleftrightarrow storia su \mathcal{P} . Tale corrispondenza associa il cilindro $C_{\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_p}^{0 \ 1 \ \dots \ p}$ all'insieme $E_{\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_p}^{0 \ 1 \ \dots \ p}$, (26.2).

3 Definizione (dinamica simbolica):

(1) Un sistema dinamico simbolico è una terna (\mathcal{S}, τ, μ) ove \mathcal{S} è lo spazio delle successioni di un numero finito di simboli, τ è la traslazione delle successioni di un passo (a sinistra) e μ è una distribuzione di probabilità τ -invariante definita sui cilindri e gli insiemi che possono essere approssimati con essi.

(2) Data una successione di n simboli $\underline{\sigma}$ a frequenze definite definiremo un sistema metrico simbolico come $(\mathcal{S}, \tau, \mu_{\underline{\sigma}})$, ove \mathcal{S} è lo spazio delle successioni di n simboli, τ è la traslazione e $\mu_{\underline{\sigma}}$ è la distribuzione di probabilità generata sui cilindri di \mathcal{S} dalle frequenze delle stringhe finite di simboli.

la terna $(\mathcal{S}, \tau, \mu_{\underline{\sigma}})$, dove \mathcal{S} è lo spazio delle successioni a n simboli, τ è la traslazione a sinistra delle successioni e $\mu_{\underline{\sigma}}$ è la distribuzione di probabilità generata, sui cilindri di \mathcal{S} , dalle frequenze delle stringhe finite di cifre (*c.f.r.* (26.1), (26.4)).

² Nel caso invertibile occorrono, per determinare μ , anche le probabilità degli insiemi cilindrici $C_{\hat{\sigma}_{-p} \dots \hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_p}^{-p \ \dots \ 0 \ 1 \ \dots \ p}$: tali misure saranno naturalmente definite dalle probabilità $\mu_{\underline{\sigma}}(C_{\hat{\sigma}_{-p} \dots \hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_p}^{0 \ \dots \ p+1 \ p+2 \ \dots \ 2p})$ in modo da implicare l'invarianza per traslazioni.

Osservazioni:

(1) Il sistema dinamico riceve l'attributo di simbolico perché in questo caso \mathcal{S} non è una superficie ma solo uno spazio metrico compatto (nel senso che da ogni successione è possibile estrarre una sottosuccessione convergente) se si definisce la distanza fra due successioni come $d(\underline{\sigma}', \underline{\sigma}'') = 2^{-N}$ se N è il più grande intero per cui $\sigma'_i = \sigma''_i$ for $|i| \leq N$: si noti che con questa definizione di distanza la traslazione τ è una trasformazione continua.³ Si confronti questa definizione di sistema dinamico simbolico con la definizione 4 del §23 di sistema dinamico metrico (di cui è un caso particolare), e con la definizione 2 del §23 di sistema dinamico topologico (rispetto alla quale c'è in più la distribuzione $\mu_{\underline{\sigma}}$). Pertanto è naturale attribuire alle successioni le proprietà omonime delle proprietà che finora abbiamo attribuito a sistemi dinamici, c.f.r. definizioni 5,6,7 del §23, alla maniera che segue.

(2) Una successione $\underline{\sigma}$ si dice *ergodica* se il sistema dinamico $(\mathcal{S}, \tau, \mu_{\underline{\sigma}})$ è ergodico, ossia se ogni funzione $\mu_{\underline{\sigma}}$ -misurabile f tale che $f(\underline{\sigma}') = f(\tau \underline{\sigma}' X)$, per $\mu_{\underline{\sigma}}$ -quasi tutte le successioni $\underline{\sigma}'$, è necessariamente costante.

(3) Una successione si dice *mescolante* se ogni funzione continua su \mathcal{S} è tale che:

$$26.6 \quad \Omega_f(n) = \int_{\mathcal{S}} \mu_{\underline{\sigma}}(d\underline{\sigma}') f(\underline{\sigma}') f(\tau^n \underline{\sigma}') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathcal{S}} \mu_{\underline{\sigma}}(d\underline{\sigma}') f(\underline{\sigma}') \right)^2 \quad (26.6)$$

(4) Una successione $\underline{\sigma}$ ha una componente a spettro continuo se esiste una funzione f tale che la trasformata di Fourier $\hat{\Omega}_f(k)$, $k \in (-\pi, \pi)$, della $\Omega_f(n)$ è localmente una funzione L_1 per $k \neq 0$. Si dice a *spettro continuo* se questo avviene per tutte le funzioni non costanti.

(B) *Complessità di successioni di simboli. Teorema di Shannon-McMillan.*

Per i sistemi dinamici simbolici su uno spazio \mathcal{S} di successioni di simboli vale una proprietà di *decomposizione ergodica*, c.f.r. osservazioni conclusive al §23: ossia se (\mathcal{S}, τ, μ) non è ergodico, allora μ -quasi tutti i punti $s \in \mathcal{S}$ hanno una statistica ergodica e se \mathcal{S}^e denota l'insieme dei punti s a statistica ergodica μ_s , si può scrivere:

$$26.7 \quad \int_{\mathcal{S}} \mu(dx) f(x) = \int_{\mathcal{S}^e} \nu(ds) \int_{\mathcal{S}} \mu_s(dx) f(x) \quad (26.7)$$

ove ν è un'opportuna distribuzione di probabilità su \mathcal{S}^e (in generale).

Dunque se una successione di cifre $\underline{\sigma}$ è prodotta come storia, per un'evoluzione S osservata su un pavimento \mathcal{P} , di un punto scelto a caso con

³ Qui 2 può essere sostituito da un qualsiasi numero > 1 . Questa nozione di distanza è molto naturale se si pensa a cosa divenga nel caso in cui la successione consiste di soli due simboli 0, 1 e σ_i, σ'_i con $i \geq 0$ si interpretano come lo sviluppo binario di due numeri reali x, x' , mentre σ_i, σ'_i con $i < 0$ si interpretano come sviluppo binario di due numeri y, y' . Si vede facilmente che 2^{-N} è essenzialmente $\max(|x - x'|, |y - y'|)$.

una distribuzione S -invariante, allora la non ergodicità di $\underline{\sigma}$ è una proprietà probabilisticamente impossibile. E per questo ci limiteremo a considerare la nozione di complessità *solo per successioni a statistica ergodica*, c.f.r. [G2].

Si pone allora la seguente definizione di *entropia* o *complessità* di una successione ergodica:

4 Definizione: Data una successione di cifre $\underline{\sigma}$ a n simboli ed a statistica ergodica, si considerino le stringhe $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_p)$ che appaiono in $\underline{\sigma}$ con frequenza > 0 . Si dividano tali stringhe in stringhe “ ε -frequent” ed “ ε -rare”, l’insieme $\mathcal{C}_{\varepsilon,p}^{\text{rare}}$ è una famiglia di stringhe di p cifre con frequenze la cui somma (“frequenza totale”) è $< \varepsilon$. Dato $\varepsilon > 0$ esistono, in generale, molti modi di collezionare le (al più n^p) stringhe di p cifre in ε -rare ed ε -frequent. Sia $\bar{\mathcal{C}}_{\varepsilon,p}^{\text{rare}}$ una scelta per la quale il corrispondente numero di stringhe ε -frequent è minimo: denotiamo tale numero di stringhe ε -frequent con $\mathcal{N}_{\varepsilon,p}$ (si ha $\mathcal{N}_{\varepsilon,p} \leq n^p$). Si definisce (se esiste):

$$26.8 \quad s(\underline{\sigma}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log \mathcal{N}_{\varepsilon,p} \leq \log n \quad (26.8)$$

e $s(\underline{\sigma})$ è l’entropia o complessità di $\underline{\sigma}$.

Osservazioni:

(1) Dunque $s(\underline{\sigma})$ conta il numero di stringhe di p cifre “realmente esistenti” asintoticamente per $p \rightarrow \infty$, se si è disposti ad ignorare una classe di stringhe di frequenza totale $< \varepsilon$.

(2) Ovviamente se s è l’entropia di un libro (voluminoso, perchè lo si possa considerare una successione infinita di lettere dell’alfabeto, inclusi gli spazi, la punteggiatura e gli accenti) la sua complessità è $s \leq \log 64$.⁴

Il teorema di Shannon–McMillan stabilisce l’esistenza del limite in (26.8) e anche può essere raffinato aggiungendovi l’affermazione che le stringhe frequenti hanno tutte “circa” la stessa frequenza (a parità di lunghezza); cioè, fissato $\varepsilon > 0$ e $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_p) \notin \bar{\mathcal{C}}_{\varepsilon,p}^{\text{rare}}$:

$$26.9 \quad e^{-(s(\underline{\sigma})+\varepsilon)p} < \nu(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_p) < e^{-(s(\underline{\sigma})-\varepsilon)p} \quad (26.9)$$

per p abbastanza grande. L’ergodicità della distribuzione $\mu_{\underline{\sigma}}$ implica anche che $\mu_{\underline{\sigma}}$ -quasi tutte le stringhe hanno la *medesima statistica*, e quindi la medesima complessità, della $\underline{\sigma}$ stessa.

Inoltre se C è un *codice* che codifica successioni di cifre $\underline{\sigma}$ in successioni di cifre $\underline{\sigma}' = C\underline{\sigma}$, cioè è una trasformazione di $\mathcal{S} = \{0, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$ a valori in $\mathcal{S}' = \{0, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$, che è permutabile con la traslazione τ di una unità a sinistra delle cifre delle successioni ($C\tau\underline{\sigma}' \equiv \tau C\underline{\sigma}'$: ossia è commutabile con “la scrittura”), allora il sistema dinamico $(\mathcal{S}, \tau, \mu_{\underline{\sigma}})$ è trasformato da C

⁴ 42 lettere di cui 21 minuscole, 21 maiuscole, 10 numeri, 6 segni di interpunzione, 2 due accenti (di cui uno anche per l’apostrofo), un segno di divisione in sillabe, uno spazio bianco e due parentesi.

nel sistema dinamico $(\mathcal{S}', \tau', \mu')$ ove μ' è la misura immagine della $\mu_{\underline{\sigma}}$ via la “trasformazione di coordinate” C . E la complessità di μ' —quasi tutte le successioni $\underline{\sigma}' \in \mathcal{S}'$ è $\leq s(\underline{\sigma})$. Tali complessità sono in realtà uguali se C è invertibile.⁵

Dunque cambiando rappresentazione delle successioni, ossia “traducendole in un altro linguaggio” *non se ne può aumentare la complessità*. Se la traduzione è perfetta (ossia C è invertibile) allora la complessità resta la stessa. Questa e altre proprietà “termodinamiche” della complessità fanno sì che essa venga chiamata, oltre che entropia, anche “informazione”.

Ad esempio si può interpretare quanto sopra, in riferimento all’osservazione (2) precedente, come una formalizzazione della proprietà empirica per cui traducendo un libro da un linguaggio ad un altro non se ne può aumentare l’informazione. E se il nuovo linguaggio ha un alfabeto di k simboli con $\log k$ inferiore alla complessità s del libro, allora *non si potrà tradurre il libro in uno di uguale lunghezza nel nuovo linguaggio*.

Tuttavia lo si potrà tradurre in qualunque alfabeto al prezzo, eventualmente, di allungarne il testo, ad esempio in un alfabeto binario a due simboli (come nei libri digitali, ormai comuni). L’ allungamento sarà almeno di un fattore p'/p tale che $2^{p'} = e^{ps}$: ossia $\frac{p'}{p} = \frac{s}{\log 2}$.

Poichè in generale $s < \log n$ potrà addirittura rivelarsi possibile ridurre la lunghezza di un (lungo) testo scritto in un alfabeto a n caratteri usando lo stesso alfabeto da lunghezza p a p' , ma evidentemente mai più di un fattore $s/\log n$, ossia rendendolo di lunghezza $n^{p'} = e^{ps}$. Ad esempio l’ insieme dei manuali di materiale logico per elaboratori elettronici può essere riscritto in forma drasticamente più corta o, altro esempio, l’ insieme dei libri di astrologia, che ha entropia $s = 0$ può addirittura esser tradotto in un testo di lunghezza 1 consisting dal simbolo di spazio. Per una teoria generale della trasmissione dell’ informazione si veda [Ki2].

Questo mostra l’ interesse informatico più immediato della nozione di entropia: invero proprio ricerche volte a precisare la nozione di “migliore codificazione possibile” condussero Shannon alla nozione di complessità, o informazione o entropia di una successione di simboli.

Si apprezza dunque l’ interesse della nozione. Ma è *molto difficile* stimare la complessità di oggetti assai strutturati come la lingua italiana o anche un lungo testo: un modo per stimarla può essere di esaminare la lunghezza dei codici che portano libri nella forma digitale ormai anche commercialmente comune. Tali codici sono scritti (alcuni, almeno) cercando di trarre profitto dalle ridondanze della lingua per ridurre lo spazio occupato. Sebbene il profitto non sia ottimale, la lunghezza p' del testo codificato in binario confrontata alla lunghezza del testo p_0 “in chiaro” sarà tale che $p' \log 2 > p_0 s$ e quindi $\frac{p'}{p_0} \log 2$ fornirà una stima per eccesso del fattore ottimale s .

⁵ È possibile dare controesempi all’ affermazione che μ' sia $\mu_{C\underline{\sigma}}$ e, addirittura, può darsi che $C\underline{\sigma}$ non abbia neppure frequenze definite. Questa patologia non si presenta se la trasformazione C è un codice finito, ossia è tale che $(C\underline{\sigma}')_i$ è una funzione solo di $(\underline{\sigma}')_j$ con $|j - i| < M$, ove la “memoria” M del codice C è un intero.

Grazie ai grandi progressi dell' elettronica, è divenuto inutile cercare di codificare i libri in modo molto astuto: perchè essi possono essere digitalizzati via procedimenti fotografici, assai inefficienti dal punto di vista informatico (per cui risulterà di solito addirittura $p' \log 2 \gg p_0 \log n$, (!)), in modo che l' intera Enciclopedia Britannica può venir scritta su pochi "dischetti compatti". E invece una codificazione che tenesse conto delle ridondanze in maniera efficace, richiederebbe un grosso lavoro editoriale e, probabilmente, la riscrittura in forma elettronica dell' intera opera (per l' Enciclopedia Italiana neppure il primo passo, ossia la banale ricopiatura su dischetti compatti è stato compiuto, a tutt' oggi). Ma soprattutto richiederebbe un immane e interessantissimo studio della struttura della lingua italiana.

D' altra parte è possibile trovare codici che risultano notevolmente efficaci pur traendo profitto solo dalle più semplici ridondanze della scrittura. Ad esempio cito *zip* che applicato a testi comuni (come questo libro) fa vedere che la loro lunghezza potrebbe essere ridotta "di un fattore $\sim \frac{4}{9}$ ". Infatti *zip* traduce un ordinario testo italiano (scritto in un alfabeto a 64 caratteri, c.f.r. nota ⁴), in un testo scritto in alfabeto *ascii esteso* a 256 caratteri riducendolo di un fattore circa 3. Questo significa che se s è l' entropia del testo allora $s < \frac{1}{3} \log 256$ e quindi se si traducesse in un alfabeto a 64 caratteri si potrebbe ridurre un testo di lunghezza p di un fattore $x = \frac{\frac{1}{3} \log 256}{\log 64} \simeq \frac{4}{9}$.⁶ Ma l' algoritmo *zip* (c.f.r. la scheda *algorithm.doc* che su *internet* accompagna il pacchetto logico di *zip*) è piuttosto semplice (sebbene molto acuto) e (quindi) non tiene conto della struttura sintattica dell' italiano (o dell' inglese).

(C) *Entropia di un sistema dinamico e teoria di Kolmogorov-Sinai.*

Introdotta la nozione di complessità di una successione si deve ricordare che le successioni si generano, essenzialmente sempre, come storie dell' evoluzione di un punto osservate su un pavimento \mathcal{P} dello spazio delle fasi di un sistema dinamico metrico (A, S, μ) , o meglio su una *partizione* \mathcal{P} dello spazio delle fasi.

Una partizione $\mathcal{P} = (P_0, \dots, P_n)$ differisce da un pavimento perchè si richiede che gli insiemi P_i siano due a due *disgiunti*. Si ottiene una partizione da un pavimento semplicemente "decidendo" a quali insiemi i punti di frontiera comuni a due tessere appartengono. Ma le partizioni sono più generali in quanto si permette alle loro tessere di essere insiemi anche solo boreliani. Ovviamente la nozione di storia si pone allo stesso modo per le partizioni: ma in questo caso la storia di ogni punto è unica. Una partizione si dirà generante rispetto a una trasformazione S e a una distribuzione μ se esiste un insieme N con $\mu(N) = 0$ tale che le storie su \mathcal{P} dei punti fuori di N determinano univocamente i punti stessi.

E allora è naturale definire la complessità di un sistema dinamico metrico

⁶ Questa non è un' operazione così strana perchè circa la metà del 256 caratteri non sono normalmente trasmessi correttamente dai più semplici programmi di comunicazione: quindi esistono programmi che ritraducono testi compattati ("*zipped*") in testi che usano solo i 128 caratteri *ascii* standard, come il programma unix *uuencode*.

(A, S, μ) come la *massima complessità* delle successioni ottenibili con probabilità non nulla quali storie di un punto su una generica partizione \mathcal{P} .⁷

Ossia come la complessità massima di una successione generabile a mezzo della trasformazione S scegliendo il dato iniziale a caso rispetto alla distribuzione μ . O almeno come l'estremo superiore delle complessità delle successioni così ottenibili.

Si potrebbe temere che tale complessità sia ∞ per l'osservazione nella nota ⁷ o perchè si possono costruire partizioni arbitrariamente fini, quindi contenenti una grande quantità di elementi, e dall'esame di un solo simbolo della storia di un punto su una partizione finissima si ottiene evidentemente "molta informazione" in quanto si determina quasi completamente il punto stesso. Si pensi al caso estremo in cui si rappresenti un libro (di una grande biblioteca) con un solo simbolo: il libro stesso.

È quindi molto importante il seguente teorema (Sinai), *c.f.r.* [AA]:

I Teorema (massima complessità di partizioni generanti): Se (A, S, μ) è un sistema dinamico ergodico allora μ -quasi tutti i punti x generano storie su una data partizione \mathcal{P} con una complessità $s(\mathcal{P})$ indipendente da x . La complessità $s(\mathcal{P})$ si dice complessità della partizione \mathcal{P} nel sistema (A, S, μ) . Inoltre tutte le partizioni generanti (se ne esiste una) hanno uguale complessità s e $s \geq s(\mathcal{P})$.

Quindi le successioni che si possono ottenere osservando l'evoluzione di un punto preso a caso con distribuzione μ in A *non possono* avere complessità arbitrariamente grande. Anzi la massima complessità è proprio ottenuta usando, per costruirle, una partizione generante (o un pavimento generante, se le frontiere dei suoi elementi hanno μ -probabilità nulla).

Non vale dunque la pena raffinare le osservazioni oltre un certo limite finito, perchè l'informazione che se ne trae non può aumentare, almeno se i dati iniziali sono scelti a caso con distribuzione μ e se si è interessati ad eseguire *molte* osservazioni: in altre parole con molte osservazioni poco raffinate si può ottenere la stessa informazione che con poche molto raffinate. Questo appare, detto così, ovvio. Ma è interessante che a mezzo della nozione di complessità e dei teoremi precedenti, si possano porre queste affermazioni in una forma quantitativa che elude la difficoltà menzionata nella nota ⁶ e che, come notato, ha il "sapore di termodinamica".

Infine cosa si può dire quando la storia $\underline{\sigma}$ di un punto, ossia il sistema

⁷ È essenziale escludere successioni generate da dati a probabilità nulla. Altrimenti data una successione $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots)$ generata da uno schema di Bernoulli a N facce e quindi a complessità $\log N$ sarebbe possibile la seguente spiacevole costruzione. Dato un punto x non periodico si definisca P_j , $j = 1, \dots, N$, come l'insieme (al più numerabile) dei punti $S^t x$ con t tale che $\sigma_t = j$ e sia P_0 l'insieme degli altri punti (quasi tutti, dunque, se μ attribuisce probabilità nulla ai singoli punti). Per costruzione la storia di x sulla partizione così costruita è $\underline{\sigma}$ che dunque ha complessità $\log N$, e N è arbitrario. Si vede allora che la storia in questione è proprio esclusa dall'ipotesi che si considerano solo storie di punti che hanno μ -probabilità non nulla di essere scelti.

$(A, S, \mu_{\underline{\sigma}})$, non è ergodica (pur avendo frequenze definite)? Vale il seguente teorema (Kolmogorov–Sinai):

II Teorema (entropia media): Se (M, S, μ) è un sistema dinamico metrico e \mathcal{P} una partizione di A in insiemi μ -misurabili si considerino le quantità $\mu(\bigcap_{i=0}^{\infty} S^{-i} P_{\hat{\sigma}_j})$, che nel caso che μ sia ergodica sono le frequenze delle stringhe di cifre $\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p$ nella storia su \mathcal{P} di quasi tutti i dati iniziali. Allora esiste il limite:

$$s(\mathcal{P}, \mu, S) = \lim_{p \rightarrow \infty} -\frac{1}{p} \sum_{\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p} \mu\left(\bigcap_{i=0}^p S^{-i} P_{\hat{\sigma}_i}\right) \log \mu\left(\bigcap_{i=0}^p S^{-i} P_{\hat{\sigma}_i}\right) \quad (26.10)$$

ed è chiamato entropia media.

Inoltre $s(\mathcal{P}, \mu, S)$ assume il valore del suo estremo superiore, calcolato su tutte le partizioni \mathcal{P}' : $s(\mu, S) = \sup_{\mathcal{P}'} s(\mathcal{P}', \mu, S)$ se \mathcal{P} è generante. Questo estremo superiore è chiamato entropia media del sistema dinamico (M, μ, S) o anche invariante di Kolmogorov–Sinai. Infine se (M, S, μ) è un sistema ergodico e \mathcal{P} è generante $s(\mu, S)$ coincide con l'entropia delle storie su \mathcal{P} di μ -quasi tutti i punti di A .

Osservazioni:

(1) È naturale definire l'entropia di un sistema dinamico, ergodico o no, come l'estremo superiore $s(\mu)$ delle complessità delle storie costruibili estraendo a caso un (con distribuzione μ) un punto x e seguendone la storia su una partizione \mathcal{P} . Se (M, S, μ) non è ergodico l'entropia e l'entropia media sono in generale differenti.

(2) Questo teorema dà anche un metodo per calcolare la complessità. Ad esempio se (\mathcal{S}, S, μ) è uno schema di Bernoulli, (p_1, \dots, p_n) , ossia il sistema dinamico in cui \mathcal{S} è l'insieme delle successioni bilatere a n simboli, S è la traslazione a sinistra e μ è la distribuzione di probabilità che dà ad ogni cilindro in \mathcal{S} una probabilità uguale al prodotto delle probabilità (p_1, \dots, p_n) degli n simboli:

$$\mu\left(C \begin{smallmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ a_0 & a_1 & \dots & a_p \end{smallmatrix}\right) = \prod_{i=0}^p p_{a_i} \quad (26.11)$$

È allora un'immediata conseguenza del teorema che:

$$s(\mu) = - \sum_i p_i \log p_i \quad (26.12)$$

(3) Sia (\mathcal{S}, S, μ) un processo di Markov (p_{ij}) a n stati, cioè \mathcal{S} è lo spazio delle successioni a n simboli, S è la traslazione a sinistra e p_{ij} è la probabilità di transizione dallo stato i allo stato j (tale quindi che $\sum_j p_{ij} = 1$) che si suppone tale che gli elementi di matrice di una sua potenza siano tutti strettamente positivi (*mescolamento* del processo di Markov). Allora la probabilità di un cilindro è definita da:

$$26.13 \quad \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ a_0 & a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} = \pi_{a_0} \prod_{i=0}^{p-1} p_{a_i a_{i+1}} \quad (26.13)$$

ove π_i , $i = 1, \dots, n$ è tale che $\sum_{i=1}^n \pi_i p_{ij} = \pi_j$ è l' autovettore sinistro della matrice p_{ij} .

Applicando il teorema si vede subito che:

$$26.14 \quad s(\mu, S) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i p_{ij} \log p_{ij} \quad (26.14)$$

Problemi.

[1] Si mostri che uno schema di Bernoulli (p_1, \dots, p_n) cioè il sistema dinamico (S, τ, μ) sullo spazio S delle stringhe bilatere di n cifre in cui l' evoluzione τ è la traslazione di una unità a sinistra della successione e μ è definita dalle probabilità dei cilindri, (26.11), è un sistema dinamico astratto ergodico. (*Idea:* sia $\chi_{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n}(\underline{\sigma})$ la funzione caratteristica del cilindro (26.5), cioè dell' insieme delle successioni di cifre tali che le cifre con indice $1, \dots, n$ coincidono con le cifre $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n$. Si definisca:

$$\Delta_N(\underline{\sigma}) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n}(\tau^j \underline{\sigma}) - \prod_{j=1}^{n-1} p_{\hat{\sigma}_j}$$

e si noti che, per il teorema di Birkhoff, esiste il limite per $N \rightarrow \infty$ di $\Delta_N(\underline{\sigma})$ con μ -probabilità 1 e in $L_1(\mu)$, c.f.r. §24, problemi [2],[3].

Poichè l' integrale di $\Delta_N^2(\underline{\sigma})$ rispetto alla distribuzione μ ha un limite per $N \rightarrow \infty$ facilmente calcolabile e che è evidentemente nullo segue che $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N(\underline{\sigma}) = 0$ con μ -probabilità 1. Questo significa che μ -quasi tutte le successioni $\underline{\sigma}$ di S hanno frequenze definite e tali frequenze sono *indipendenti* dal dato iniziale $\underline{\sigma}$.

Per la densità in $L_1(\mu)$ delle funzioni che sono combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di cilindri segue che le medie $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\tau^j \underline{\sigma})$ esistono e sono quasi ovunque costanti. Quindi ogni integrale primo è quasi ovunque costante e il sistema è ergodico.)

[2] Si faccia vedere che gli schemi di Bernoulli sono sistemi dinamici a spettro continuo. Lo stesso si svolga per i processi di Markov transitivi (cioè con matrice di compatibilità $M_{\sigma\sigma'}$ dotata di un' iterata con tutti gli elementi di matrice positivi). (*Idea:* si calcoli la funzione di correlazione fra due funzioni cilindriche, cioè che dipendono solo da un numero finito di cifre delle successioni $\underline{\sigma}$ e si applichi la definizione 1 del §22.)

[3] Si mostri, applicando direttamente la definizione 4, che la complessità di una successione $\underline{\sigma}$ a frequenze definite e tali che $\nu(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_r) = \prod_{i=1}^r p_{\hat{\sigma}_i}$, c.f.r. (26.1), è $s = - \sum_i p_i \log p_i$. Quindi la complessità di una successione "tipica" di uno schema di Bernoulli è data dalla (26.12). (*Idea:* Si studi prima il caso dello schema di Bernoulli con due simboli 0, 1. La probabilità della stringa di k simboli 0, che è $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, mostrando che non supera, per tutti i $0 \leq k \leq n$ e per tutti gli n grandi la quantità, al di sopra o al di sotto (\pm rispettivamente) la quantità

$$n^{\pm 1/2} e^{-(s(k/n) + (k/n) \log p + (1-k/n) \log(1-p))n}$$

ove $s(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$. Poiché la funzione all' esponente ha un massimo in $x = k/n = p$ con derivata seconda $p^{-1}(1-p)^{-1}$ segue che la probabilità totale delle stringhe tali che $|k/n - p| > \delta$ è stimata superiormente da

$$n\sqrt{n} e^{(-2^{-1} p^{-1} (1-p)^{-1} \delta^2 + O(\delta^3))n}$$

Fissati $\varepsilon, \delta > 0$ e n così che l'ultima espressione è $< \varepsilon$. Allora la decomposizione ottimale $\mathcal{C}_{rare}^\varepsilon, \mathcal{C}_{freq}^\varepsilon$ deve essere tale che tutti gli elementi di $\mathcal{C}_{freq}^\varepsilon$ sono stringhe con $|k/n - p| \leq \delta$. Quindi ne segue che il loro numero è $\leq \sum_{|k/n - p| \leq \delta} \binom{n}{k} \leq \exp(s(p) + O(\delta))n$. Ma poiché la probabilità di ognuna di tali stringhe è limitata dal basso da $e^{-(s(p) - O(\delta))n}$ il loro numero non può essere minore di $e^{(s(p) - O(\delta))n}$ se δ è abbastanza piccolo, quindi $s = s(p)$. Il caso generale di schemi di Bernoulli con più di 2 simboli è ridotta al caso appena trattato.)

[4] Come il problema [2] ma per una successione $\underline{\sigma}$ a frequenze definite come nella (26.13), ossia “tipiche per un processo di Markov”.

[5] Si consideri un sistema dinamico differenziabile (M, S) con M a dimensione d e sia $\mu(dx)$ il volume e si supponga che μ sia S -invariante. Sia \mathcal{P} una partizione ottenuta da un pavimento $\mathcal{P} = (P_0, \dots, P_n)$ con domini con frontiera ∂P_σ regolare a tratti decidendo (arbitrariamente, perchè si vedrà che è irrilevante) a quale tessera appartengono i punti comuni a due frontiere. La frontiera di $\cap_{j=0}^{k-1} S^j P_{\sigma_j}$ sarà costituita da vari elementi $\mathcal{F}_{\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}}^j \subset S^j \partial P_{\sigma_j}$ con in comune al più parti di bordo. L'unione di tutti questi elementi di frontiera è $\cup_{j=0}^{k-1} S^j \cup_\sigma P_\sigma$. Supponendo che $\lambda = \max_{x, \xi} |\partial S_x \xi|$ sia il massimo coefficiente di espansione dei vettori infinitesimi ξ tangenti in x (cioè la massima espansione degli elementi di linea), si dimostri che per un'opportuna costante:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \text{area}(\mathcal{F}_{\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}}^j) \leq C \frac{\lambda^k}{\lambda - 1}$$

(Idea: Si noti poi che la massima espansione di un elemento di superficie è $\leq \gamma \lambda$ (e non λ^{d-1}) per un'opportuna costante γ perchè il volume è conservato per ipotesi.)

[6] Con riferimento alla definizione 4 e nel contesto del problema precedente si consideri, fissato $\eta > 0$, la classe $\mathcal{C}_1(k)$ delle stringhe $i \equiv \sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}$ tali che:

$$p_i \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\cap_{j=0}^{k-1} S^{-j} P_{\sigma_j}) > e^{-k\eta} \lambda^{-dk}$$

e si faccia vedere, facendo uso di [5], che l'insieme $\mathcal{C}_2(k)$ complementare di $\mathcal{C}_1(k)$ ha probabilità totale $X \leq C e^{-\eta k/d}$. (Idea: Si usi la disuguaglianza isoperimetrica in R^d per cui il volume di una regione E a superficie fissata $|\partial E|$ è massimo per la sfera e quindi $\mu(E) \leq \Gamma |\partial E|^{d/(d-1)}$. Si noti quindi che

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i \in \mathcal{C}_2(k)} \mu(\cap_{j=0}^{k-1} S^{-j} P_{\sigma_j}) \equiv \sum_{i \in \mathcal{C}_2(k)} p_i = \\ &= \sum_{i \in \mathcal{C}_2(k)} \left(\mu(\cap_{j=0}^{k-1} S^{-j} P_{\sigma_j}) \right)^{\frac{d-1}{d} + \frac{1}{d}} \leq \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{C}_2(k)} \left(\left(\Gamma |\partial \cap_{j=0}^{k-1} S^{-j} P_{\sigma_j}| \right)^{\frac{d-1}{d}} \right)^{\frac{d-1}{d}} e^{-\eta k/d} \lambda^{-k} \leq C e^{-\eta k/d}. \end{aligned}$$

[7] Nel contesto di [5,6] si dimostri che un sistema dinamico differenziabile (M, S, μ) che conserva il volume μ non può avere entropia che supera $d \log \lambda$ se λ è il massimo coefficiente di espansione degli elementi di linea (teorema di Kouchnirenko), (c.f.r. [G2] p. 127). (Idea: sia $i \equiv (\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1})$ e $p_i = \mu(\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1})$; allora:

$$\begin{aligned} - \sum_i p_i \log p_i &= - \sum_{i \in \mathcal{C}_1(k)} p_i \log p_i - \sum_{i \in \mathcal{C}_2(k)} p_i \log p_i \leq \\ &\leq (d \log \lambda + \eta)k + X \sum_{i \in \mathcal{C}_2(k)} \frac{-p_i}{X} \log \frac{p_i}{X} + \log X \leq \\ &\leq (d \log \lambda + \eta)k + X k \log(n+1) + X \log X \end{aligned}$$

e, via la definizione 4 e il teorema II, si usi l'arbitrarietà di η .)

Bibliografia: [Ki1], [Ki2], [AA], [G2] §12. Ulteriori applicazioni del teorema di Shannon–McMillan e notevoli raffinamenti del teorema di Kouchnirenko (la formula di Pesin e i teoremi di Ledrappier–Young) si troveranno fra gli ultimi problemi del §27.

┐

┐

376

§26: Entropia. Complessità. Informazione.

┐

┐

§27 Ordinamento del Caos. Dinamica simbolica. Principio di Ruelle.

Tornando alla questione, posta prima della definizione 2 del §26, della necessaria difficoltà della costruzione di un codice che costruisca la storia dei punti di un sistema dinamico su un pavimento \mathcal{P} generante, discutiamo alcuni casi in cui questo è possibile.

(A) *Trasformazioni espansive su $[0, 1]$. Infinità del numero di distribuzioni invarianti.*

Il caso più semplice è fornito dall' esempio delle trasformazioni espansive dell' intervallo $I = [0, 1]$. Si tratta di trasformazioni non invertibili e dotate di almeno una singolarità nelle derivate; sono definite da una funzione f che è regolare negli intervalli $[0, a_0], [a_0, a_1], \dots, [a_{n-2}, 1]$, con $0 \equiv a_{-1} < a_0 < \dots < a_{n-1} \equiv 1$, salvo che agli estremi e trasforma ciascuno di questi intervalli in *tutto* l' intervallo $[0, 1]$.

Si suppone che f sia espansiva e cioè che $|f'(x)| > \gamma > 1$ per un certo $\gamma > 1$ e che in ogni tratto (a_i, a_{i+1}) la f sia estendibile ad una funzione regolare su *tutto* $[a_i, a_{i+1}]$.

Se si traccia un grafico di questa funzione si vede che la sua derivata deve essere discontinua nei punti a_i , estremi degli intervalli del pavimento \mathcal{P} di I in $P_0 = [0, a_0], P_1 = [a_0, a_1], \dots, P_{n-1} = [a_{n-2}, 1]$.

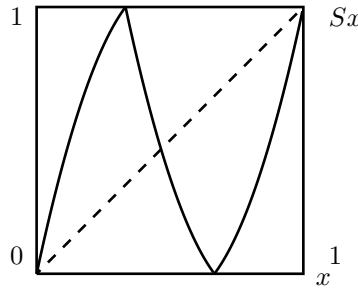


Fig. 1: Una trasformazione $x \rightarrow Sx$ espansiva dell' intervallo $[0, 1]$.

La funzione f è costituita dunque da n funzioni regolari f_i , con f_i definita su $[a_{i-1}, a_i]$ ed ivi regolare con derivata di modulo superiore a $\gamma > 1$.

Supporremo che $f(x) = f_i(x)$ se $x \in [a_{i-1}, a_i]$ e $f(1) = 1$ e che le f_i siano di classe $C^\infty([a_i, a_{i+1}])$. Nei punti a_i può accadere che la funzione f sia discontinua (cioè $f_i(a_i) = 0$ e $f_{i+1}(a_i) = 1$ o viceversa). La coppia (I, f) può essere considerata un *sistema dinamico*, c.f.r. definizione 1 del §23.

Conviene esaminare in dettaglio un esempio semplice. Si consideri, come esempio, $f(x) = 10x \bmod 1$ definita ponendo $a_i = i/10$ e $f_i(x) = 10(x - a_{i-1})$ per $a_{i-1} \leq x < a_i$ e $f(1) = 1$. In questo caso la storia di un punto è semplicemente la successione delle cifre della sua rappresentazione decimale $x = 0.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$

Si noti che esistono successioni eccezionali la cui storia è ambigua perché nella loro evoluzione vengono a cadere su uno degli a_i : secondo le convenzioni del §26 la storia di questi punti non è definita.¹

Ma è chiaro che *tutte le storie*, tranne una infinità numerabile (quelle definitivamente 9), ossia tutte le successioni $\underline{\sigma}$ a 10 simboli tranne una infinità numerabile di esse, corrispondono biunivocamente ad un punto di I . La corrispondenza è biunivoca fra le successioni che non sono definitivamente 0, o definitivamente 9, e il sottoinsieme dell'intervallo ottenuto togliendo da esso l'insieme D dei numeri “decadici”, che in base 10 hanno una rappresentazione con periodo 0 (cioè sono rappresentati da un numero finito di cifre significative), ovvero con periodo 9.

È facile rendersi conto che questo insieme di punti, evidentemente numerabile, consiste dei punti di $[0, 1]$ tali che $10^k x \bmod 1$ è uno dei punti a_i per qualche k intero.

Se dunque scegliamo i dati iniziali a caso con una distribuzione che attribuisce misura nulla a tutti i punti e quindi, in particolare, a tutti gli insiemi numerabili possiamo immaginare che i punti decadici “non esistano”, a tutti gli effetti per quel che riguarda lo studio dei moti che si potranno osservare. E allora la corrispondenza punto–storia è biunivoca e descritta da un codice semplice.

È interessante notare che a partire da (I, f) si può costruire un sistema dinamico metrico (I, f, μ) se μ è la distribuzione uniforme su I (*misura di Lebesgue*), c.f.r. definizione 3 (c) del §24. Infatti l'immagine inversa di un qualsiasi segmento (e quindi insieme misurabile) E ha la *stessa lunghezza* dell'insieme di partenza.²

Ci si può domandare cosa divenga la distribuzione uniforme μ , una volta “codificata” sullo spazio delle storie dei punti identificando un punto x con la sua storia $\underline{\sigma}(x)$: e si vede immediatamente che diviene semplicemente lo schema di Bernoulli unilatero a 10 simboli ciascuno con probabilità $\frac{1}{10}$. Dunque seguire la storia di un punto preso a caso con distribuzione μ produce una storia che non è distinguibile dalla successione dei risultati dei lanci di un *dado equo* a 10 facce. Concludiamo da questo che la trasformazione f merita bene il titolo di “caotica”. Addirittura potrebbe essere usata per generare numeri casuali.³

¹ Per le scelte operate nel definire f sugli estremi degli intervalli è chiaro che le successioni definitivamente uguali a 9 non sono possibili, tranne quella fatta da soli 9 che rappresenta 1. Questo avviene a dispetto del fatto che le successioni definitivamente uguali a 9 possono essere pensate come sviluppo decimale di un numero e rappresentano un punto dell'intervallo: i punti estremi destri degli intervalli hanno storie che si potrebbero rappresentare anche, definendo diversamente il valore di f sui punti di singolarità, con successioni definitivamente uguali a 9, ad esempio 0.1 potrebbe avere come storia 0.0999... Questo spiega perché non sia opportuno definire le storie dei punti eccezionali.

² Perché consiste di 10 segmentini ciascun lungo $\frac{1}{10}$ di quello iniziale.

³ Questo in realtà è illusorio perché la nostra rappresentazione in base 10 dei numeri reali è tale che qualsiasi numero si scelga venga necessariamente considerato decadico, ossia rappresentato da un numero finito di cifre decimali non nulle seguito da infiniti

Questa osservazione ci fa vedere anche che per il sistema dinamico (I, f) esistono molte altre distribuzioni invarianti. Ad esempio pensandone i punti come rappresentati dalle loro storie su \mathcal{P} (cioè in rappresentazione decimale, e quindi identificando I con lo spazio delle successioni unilaterale a 10 simboli) si può definire sullo spazio delle successioni la distribuzione di Bernoulli $\tilde{\mu}$ in cui i simboli hanno probabilità p_0, \dots, p_9 diverse da $\frac{1}{10}$ (*dado iniquo*). Ad esempio $p_i = \frac{1}{9}$ per $i \neq 1$ e $p_1 = 0$.

Esistono dunque *infinite distribuzioni invarianti* per f definite su I : una di queste è la distribuzione uniforme, e le altre non sono uniformi e anzi sono concentrate (*c.f.r.* definizione 2, §25, osservazione (5)) su insiemi di lunghezza nulla (e dimensione frattale che può essere < 1 , come nel secondo esempio appena dato in cui il codice trasforma la misura di Bernoulli in una misura $\tilde{\mu}$ su I concentrata sull'insieme dei numeri che non hanno 1 nel loro sviluppo decimale e quindi che da misura 1 ad un insieme di Cantor la cui dimensione di Hausdorff è $\log 9 / \log 10$, *c.f.r.* §15).

Gli schemi di Bernoulli, quali sistemi dinamici astratti, sono ergodici ossia generano con probabilità 1 successioni a frequenza definita ed ergodiche, *c.f.r.* problema [1] del §26. Quindi una successione generata come storia su \mathcal{P} a partire da un dato iniziale preso a caso rispetto ad una distribuzione su I che è immagine di uno schema di Bernoulli, via il codice decadico, è una successione ergodica (*c.f.r.* definizione 3 del §26, osservazione (2)). Se ne può quindi calcolare la complessità in base ai teoremi del §26.

Ad esempio estraendo a caso un dato con la distribuzione μ uniforme si producono successioni a complessità $\log 10$, mentre estraendole con la seconda distribuzione introdotta, $\tilde{\mu}$, si otterranno storie meno complesse: a complessità $\log 9$.

Ovviamente esistono anche altre distribuzioni possibili e invarianti: basta definire sullo spazio delle successioni una qualsiasi distribuzione invariante per traslazione⁴ e poi trasformarla, via il codice decadico, in una distribuzione su I . Ad esempio si può considerare un qualunque processo di Markov a 10 stati, *c.f.r.* §26, e ottenere così una nuova distribuzione invariante su I .

Quanto detto non cambia sostanzialmente se la funzione f è una trasformazione espansiva qualsivoglia, cioè se l'espansività non è costante (10 nell'esempio precedente), *c.f.r.* i problemi per una teoria sostanzialmente completa.

Dal punto di vista simbolico non c'è molta differenza fra la dinamica $10x \bmod 1$ e un'altra dinamica espansiva. La corrispondenza fra punto e storia sarà sempre biunivoca salvo una infinità numerabile di eccezioni (legate al fatto che gli intervalli $[a_i, a_i + 1]$ hanno estremi in comune. E gli schemi di Bernoulli, i processi di Markov e altre distribuzioni sullo spazio delle successioni (che danno probabilità nulla ad insiemi numerabili

0, e quindi dopo un (piccolo) numero di trasformazioni la storia termina nella noiosa successione di 0. E qui si vede la differenza profonda tra un buon generatore "teorico", quale $x \rightarrow 10x \bmod 1$, e un buon generatore reale, che ovviamente *non deve avere* questa proprietà di divenire rapidamente banale.

⁴ Pur sempre attribuente probabilità 0 ai singoli punti per evitare problemi dovuti ai numeri decadici.

di successioni) saranno codificate in distribuzioni invarianti su I (che danno misura nulla a tutti i punti a_i e alle loro immagini e controimmagini rispetto a f).

Fra queste ne esisterà (*c.f.r.* problemi) una che ha una densità (in generale non uniforme) e tutte le altre saranno concentrate su insiemi di lunghezza nulla, salvo casi banali come ad esempio le distribuzioni di probabilità che hanno la forma $\mu' = \alpha\mu + (1-\alpha)\nu$ ove μ è la distribuzione dotata di densità mentre ν è una non dotata di densità, e $0 < \alpha < 1$ (è questo, si noti, un caso in cui μ' non è ergodica, *c.f.r.* problemi.).

Che non tutti i punti abbiano una storia (ben definita) sul pavimento \mathcal{P} è certamente “spiacevole” ed è dovuto al fatto che un pavimento non è una partizione dello spazio delle fasi: questo non costituisce un problema reale dal momento che i punti per i quali una storia non può essere definita (essendo ambigua) formano di solito un insieme invariante di probabilità nulla rispetto alle scelte causali dei dati iniziali che si è interessati a considerare. ■ È tuttavia utile introdurre una nozione simile a quella di storia applicabile a tutti i punti di un sistema dinamico (M, S) , almeno se il sistema è *privo di singolarità*: sarà la nozione di *successione compatibile* rispetto ad un pavimento \mathcal{P}

1 Definizione (successione compatibile rispetto ad una pavimentazione): Sia (M, S) un sistema dinamico senza singolarità. Una successione $\underline{\sigma}$ è *S-compatibile rispetto al pavimento \mathcal{P} di M* se $\cap_i S^{-i}P_{\sigma_i} \neq \emptyset$. Diremo che ogni punto $x \in \cap_i S^{-i}P_{\sigma_i}$ ha la successione $\underline{\sigma}$ come “storia possibile”.

Pertanto se \mathcal{P} è generante per S , ad ogni punto x possiamo associare una successione compatibile e se μ è una distribuzione S -invariante che attribuisce probabilità 0 alle frontiere ∂P_σ degli elementi del pavimento c'è una ed una sola successione compatibile (ossia storia possibile) associata con ogni punto ad eccezione di un insieme N di punti di probabilità nulla e tale successione coincide con la storia su \mathcal{P} se il punto è fuori dell' insieme eccezionale N .

(B) *Applicazione al modello di Lorenz.*

Un' importante applicazione di queste osservazioni fu sviluppata da Lorenz ■ che le utilizzò per mostrare che nel modello di Lorenz, dopo la seconda biforcazione, quella in cui punti stazionari perdono definitivamente stabilità, ■ *c.f.r.* §20), appare un moto che è caotico.

Lorenz osservò che la perdita di stabilità avveniva in modo che i moti osservati con osservazioni cadenzate all' evento che z assumesse un valore massimo (locale) erano tali che, “con buona approssimazione”, il valore della coordinata x assunta ad uno dei momenti di massimo per z *determinava* ■ la corrispondente coordinata x' all' osservazione successiva (e lo stesso accadeva per la y). Per cui, detti x_{min} e x_{max} i valori minimi e massimi della coordinata x alle cadenze delle osservazioni, l' evoluzione poteva essere modellata da una trasformazione f dell' intervallo $[x_{min}, x_{max}]$ in se stesso. E dai dati numerici ottenuti dal suo esperimento poté disegnare il grafico

di questa funzione f , c.f.r. [Lo].

Il grafico risultò essere, dopo un opportuno riscaldamento e traslazione per trasformare l'intervallo $[x_{min}, x_{max}]$ in $[0, 1]$, quello di una trasformazione espansiva basata su 2 intervalli, ossia con $n = 2$ ed essenzialmente simile alla trasformazione il cui grafico è a forma di “tenda”: $x \rightarrow 2x$ se $x \in [0, \frac{1}{2})$ e $x \rightarrow 2(1 - x)$ se $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

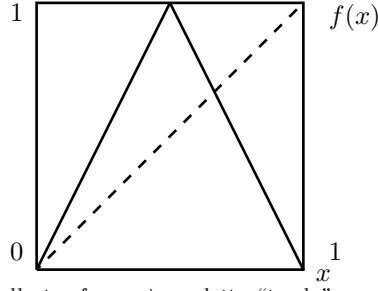


Fig. (5.7.2): Il grafico della trasformazione detta “tenda”.

Quindi ne dedusse che il sistema possedeva moti caotici, potendo essere pensato come un generatore di successioni di numeri casuali, come descritto al punto (A).

(C) Trasformazioni iperboliche e pavimenti markoviani.

Gli esempi considerati in (A) riguardano trasformazioni non invertibili (dell'intervallo $[0, 1]$). Ma esempi analoghi possono essere ottenuti anche per trasformazioni invertibili. Il caso paradigmatico è fornito dalla trasformazione

S del toro T^2 definita dalla matrice $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, considerata al §22:

$S\varphi \equiv g\varphi \bmod 2\pi$ (“gatto di Arnold”). In questo caso si nota che la trasformazione è iperbolica nel senso del §24, punto (c) della definizione 2.

Da ogni punto φ di T^2 escono le rette parallele agli autovettori v_{\pm} di g : queste hanno l'interpretazione di varietà stabile e instabile del moto iperbolico generato da g su T^2 .

Queste rette sono dense su T^2 , se pensate avvolte su di esso considerando T^2 come un quadrato con condizioni al bordo periodiche: gli autovettori v_{\pm} hanno infatti inclinazione irrazionale, c.f.r. (25.2). Denoteremo $e^{\lambda+}, e^{\lambda-} \equiv e^{-\lambda+}$ i corrispondenti autovalori.

Costruiamo un pavimento \mathcal{P} di T^2 , generante rispetto alla dinamica S e alla misura μ di area (c.f.r. definizione 1, §26). La costruzione che segue è importante perché può essere ripetuta quasi *verbatim* nel caso di trasformazioni di Anosov topologicamente mescolanti su varietà bidimensionali: la sola differenza sarà che le varietà stabili e instabili di un punto fisso (o di un punto periodico in assenza di punti fissi): in the case of more general saranno varietà curve e non semplici linee rette.

Disegniamo, c.f.r. la seguente Fig.3, i tratti di lunghezze L, L' della varietà stabile e della varietà instabile dell'origine nelle direzioni positive, ad esempio (ossia dalla parte degli estremi dei vettori v_{\pm}).

Poichè le varietà, pensate avvolte sul toro, sono dense (*c.f.r.* §22) è chiaro che tracciando le linee si vengono a delimitare su T^2 moltissimi rettangolini, di diametro che si può rendere piccolo quanto si vuole prendendo L, L' abbastanza grandi, si vedano le Fig.3 e Fig.4 seguenti. In realtà non proprio tutti questi rettangoli sono “completi”: invero l'origine e gli estremi dei tratti di varietà stabile e instabile tracciati finiranno (“sicuramente” se tracciate di lunghezza “scelta a caso”) nel mezzo di due dei rettangoli (o anche dello stesso rettangolo) senza raggiungere un lato diverso da quello di ingresso.

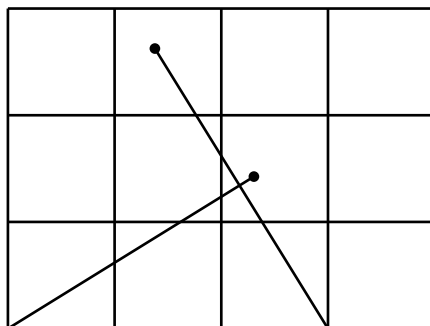


Fig.3: Tratti di varietà stabile e instabile dell'origine per il “gatto di Arnold” disegnate dopo aver rappresentato T^2 come un reticolo di copie del quadrato $[0, 2\pi]^2$ con lati opposti identificati.

Nella Fig.3 si sono tracciate le varietà stabili e instabili dell'origine nella direzione degli autovetori \underline{v}_{\pm} della matrice g . Per chiarezza la figura è stata disegnata immaginando il toro “spianato” e ripetuto periodicamente: ma i punti omologhi dei vari quadrati devono essere identificati. Eseguendo l'identificazione si ottengono le linee *non tratteggiate* della Fig.4 seguente.

Allora immaginiamo di prolungare i segmenti di varietà stabile fino a che questi incontrino il lato opposto al lato già attraversato del rettangolo nel mezzo del quale terminano, come esemplificato nella seguente Fig.4. E poi immaginiamo di ripetere la stessa operazione per il segmento di varietà instabile (l'ordine delle operazioni è arbitrario anche se il risultato dipende, in generale dall'ordine). Prolunghiamo anche le varietà stabile e instabile dell'origine nella direzione *opposta* agli autovettori \underline{v}_{\pm} di g fino ad incontrare le varietà già tracciate (*c.f.r.* Fig.4 seguente).

Otteniamo ora un pavimento del toro con tessere P_i di diametro più piccolo di una quantità δ prefissata, pur di scegliere L, L' abbastanza grandi. ■

Le frontiere di questi rettangoli (11 in figura, a ben contare), *analogo bidimensionale dei punti a_i dell'esempio precedente* sulle trasformazioni dell'intervallo $[0, 1]$, ovviamente formano un insieme di misura nulla rispetto alla distribuzione uniforme (misura di area) sul toro. ■

Pertanto, se ci interessiamo esclusivamente all'evoluzione di dati iniziali presi a caso rispetto a distribuzioni che attribuiscono misura nulla a tutti i segmenti in T^2 e quindi alle loro unioni numerabili, vediamo che ogni tale

dato iniziale ha una storia ben definita che lo determina univocamente.

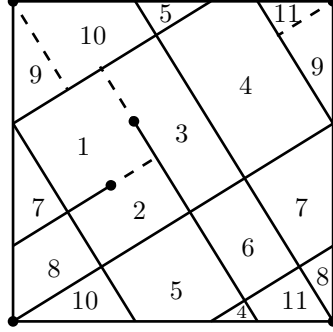


Fig. 4: I tratti di prolunga sono segnati tratteggiati e emergono dai punti segnati; si noti che i quattro vertici del quadrato sono in realtà lo *stesso punto* (l'origine) a causa delle condizioni periodiche che si devono immaginare ai bordi.

Infatti se due punti avessero la stessa storia σ_i per $0 \leq i \leq N$ la loro distanza nella direzione \underline{v}_+ sarebbe inferiore al massimo lato dei rettangoli, $\leq \delta$, *diviso per l'espansione* $e^{\lambda_+ N}$ che questo lato subisce in N iterazioni della S (“nel tempo N ”). Questo è vero se δ è abbastanza piccolo rispetto al lato di T^2 , ossia 2π .⁵

Similmente se i due punti hanno la stessa storia per $-N \leq i \leq 0$, allora i due punti devono avere distanza nella direzione \underline{v}_- inferiore a $\delta e^{-|\lambda_-|N}$.

Queste osservazioni implicano che se due punti hanno la stessa storia allora devono coincidere, purchè δ sia abbastanza piccolo (si trova, eseguendo l'analisi in modo formale, che è sufficiente che $\delta e^{\lambda_+} < \frac{2\pi}{4}$).

Come discusso nel §26 si deve notare che esistono punti la cui storia è ambigua (perchè \mathcal{P} è un pavimento e non una partizione) e poichè la trasformazione è continua ha senso considerare successioni S -compatibili: ad ogni punto corrisponde almeno una successione compatibile nel senso della definizione 1; e per quasi tutti i punti rispetto alla misura (invariante) di area esiste un'unica successione compatibile che coincide con la storia del punto.

A differenza del caso delle trasformazioni espansive dell'intervallo ora *non tutte le successioni* con n cifre, se n è il numero di rettangolini in \mathcal{P} , sono permesse.

Lo si capisce considerando il caso in cui δ è piccolissimo. In questo caso è chiaro che l'immagine di un rettangolo *non può intersecare* tutti gli altri rettangoli, semplicemente perchè il lato dell'immagine sarà ancora cortissimo, anche dopo l'amplificazione del fattore e^{λ_+} . Dunque la dinamica

⁵ Occorre infatti evitare i casi in cui i rettangoli possano essere così grandi da “avvolgersi sul toro” permettendo all'immagine SQ , di un rettangolino Q di \mathcal{P} , di intersecare un altro rettangolino Q' in parti sconnesse: il che è possibile solo se i rettangoli sono molto grandi, come si vede eseguendo un disegno (reso un po' difficile dalla geometria periodica, per cui rettangoli grandi possono apparire addirittura sconnessi se disegnati sul toro rappresentato come un quadrato di lato 2π).

simbolica associata a questa pavimentazione produce successioni in cui ci sono importanti vincoli, non eliminabili decidendo semplicemente d'ignorare un insieme di area nulla costituito da un'infinità numerabile di segmenti: ad esempio se σ_i e σ_{i+1} sono due simboli che si susseguono nella storia di un punto x , che non appartiene alle frontiere dei P_σ nè alle immagini di tali frontiere rispetto alle iterate di S , deve essere $SP_{\sigma_i}^0 \cap P_{\sigma_{i+1}}^0 \neq \emptyset$, se P_σ^0 denota la parte interna di P_σ .

L'ultima osservazione ci porta alla nozione generale di *S-compatibilità per primi vicini* di una successione rispetto ad un pavimento dato. Definiamo dunque

2 Definizione (matrice compatibilità della dinamica simbolica):

Sia $\mathcal{P} = (P_0, \dots, P_n)$ un pavimento dello spazio delle fasi del sistema dinamico (X, S) e P_σ^0 denoti la parte interna di $P_\sigma \in \mathcal{P}$. La metrica $M_{\sigma\sigma'}$ con elementi di matrice $M_{\sigma\sigma'} = 1$ se $SP_\sigma^0 \cap P_{\sigma'}^0 \neq \emptyset$ e $M_{\sigma\sigma'} = 0$ altrimenti sarà chiamata “matrice di compatibilità” del pavimento \mathcal{P} rispetto a (X, S) . Una successione $\underline{\sigma}$ sarà chiamata “compatibile per primi vicini” se $M_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} \equiv 1$ per $i \in (-\infty, \infty)$ (o, nei casi non invertibili, per $i \in [0, \infty)$).

Una successione $\underline{\sigma}$ potrà essere una storia di un punto preso a caso, con una distribuzione μ su T^2 , che attribuisce misura nulla ai segmenti, solo se la “condizione di compatibilità” $\prod_i M_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} = 1$ vale.

Se si decide di considerare solo storie compatibili per primi vicini gran parte dell'ambiguità delle storie è eliminata: invero le storie compatibili con \mathcal{P} sono meno di quelle possibili, in generale.⁶ Tuttavia resta ancora un'ambiguità che di solito è *finita*: ad esempio nel caso dell'esempio delle trasformazioni espansive è 2 al più, e nel caso del gatto di Arnold è al più 4, (esercizio).

Il problema generale cui ci si trova di fronte quando si tenta di definire un codice in cifre (detto anche *dinamica simbolica*) per le storie di punti osservate su dati pavimenti è che, anche considerando come è naturale e come faremo d'ora in poi, solo storie compatibili *in generale si dovranno imporre molte altre condizioni di compatibilità* affinché una storia compatibile sia in realtà storia di un punto.

Invero nulla garantisce in generale che la compatibilità fra simboli che si susseguono immediatamente sia sufficiente a generare successioni che effettivamente sono storie di qualche punto. Ad esempio perchè al simbolo σ possa seguire σ' e poi σ'' sarà necessario non solo che le coppie $\sigma\sigma'$ e $\sigma'\sigma''$ siano compatibili ma anche che $S^2P_\sigma \cap P_{\sigma''} \neq \emptyset$, etc. Quindi ci si deve attendere che esistano *infinite, ulteriori, condizioni di compatibilità* coinvolgenti numeri arbitrari di elementi della storia.

Ne segue che in generale, come già da aspettarsi, il codice punto–storia

⁶ Talvolta assai meno: ad esempio se un punto x periodico appartiene a $\partial P_i \cap \partial P_j$ per qualche $i \neq j$ il numero di storie possibili è non numerabile ma il numero di storie possibili e compatibili per primi vicini non supera n ed è 2 se i, j sono la sola coppia di elementi di \mathcal{P} che contengono x .

sarà impraticabilmente complesso rendendo la seguente definizione di pavimento di Markov per un sistema dinamico (X, S) interessante a dispetto della sua particolarità.

3 Definizione (pavimenti markoviani e loro proprietà): Un pavimento generante \mathcal{P}^7 tale che ogni successione compatibile per primi vicini determina (unicamente) un punto $x \in X$, ossia se la sola condizione di compatibilità per primi vicini $\prod_i M_{\sigma_i \sigma_{i+1}} = 1$ implica che $\underline{\sigma}$ è una storia possibile, sarà chiamato un pavimento markoviano per il sistema dinamico (X, S) : un caso raro ma per questo motivo interessante.

Un esempio di pavimento markoviano è fornito dalle trasformazioni dell'intervallo $[0, 1]$ discusse in (A), in cui *tutte* le successioni sono compatibili,⁸ banalmente (e la matrice di compatibilità è $M_{\sigma\sigma'} \equiv 1$).

(D) La trasformazione del gatto come paradigma per le proprietà dei pavimenti markoviani.

Un esempio più interessante è fornito dal pavimento appena costruito sul toro in relazione alla trasformazione S generata dalla matrice g .

(1) La proprietà che è importante riconoscere al fine della verifica di questa affermazione è che se si applica S ad uno dei rettangoli Q_σ costruiti in (C), c.f.r. Fig.4, allora questo rettangolo viene deformato lungo le direzioni degli autovettori della matrice g : dilatato nella direzione \underline{v}_+ e compresso nella direzione \underline{v}_- e, naturalmente, spostato “altrove”.

Consideriamo i lati che si accorciano: devono *necessariamente* essere contenuti nella unione dei lati paralleli a \underline{v}_- dei rettangoli della pavimentazione: perchè l' unione di tutti i lati paralleli a \underline{v}_- è *per costruzione* un tratto di lunghezza L (circa)⁹, *connesso*, della varietà stabile dell' origine. Che, quindi, sotto azione di S deve contrarsi (perchè l' origine è un punto fisso) di un fattore $e^{-|\lambda_-|}$, divenendo un sottoinsieme di se stessa. E questo appunto significa che “non si creano nuove frontiere parallele a \underline{v}_- ”: l' unione delle frontiere di $S\mathcal{P}$ parallele a \underline{v}_- è *interamente* contenuta nell' unione delle frontiere di \mathcal{P} .

Allora, se $M_{\sigma\sigma'} = 1$, l' immagine di P_σ^0 non solo interseca $P_{\sigma'}^0$, ma SP_σ attraversa *interamente* $P_{\sigma'}^0$, nel senso che l' immagine di ogni segmento di P_σ parallelo al lato espansivo e con estremi sulle “basi contrattive” (ossia parallele a \underline{v}_-) viene trasformato da S in un segmento più lungo che taglia *entrambe le basi* di $P_{\sigma'}$ o *nessuna* (se è esterno a $P_{\sigma'}$).

Se così non fosse la frontiera parallela a \underline{v}_- di SP_σ cadrebbe all' interno di $P_{\sigma'}$ e quindi non sarebbe contenuta nell' unione delle frontiere parallele a \underline{v}_- dei rettangoli della pavimentazione originale \mathcal{P} . Questo lo si vede bene disegnando quanto descritto, c.f.r. la Fig. 5 seguente.

⁷ c.f.r. definizione 1 §26.

⁸ E ognuna determina univocamente un punto di $[0, 1]$ che a sua volta, tranne una famiglia numerabile di eccezioni, determina la successione.

⁹ Si rammenti che gli estremi hanno potuto subire un piccolo allungamento, nella costruzione iniziale, di al più δ come rappresentato in Fig. 4 dalle linee tratteggiate.

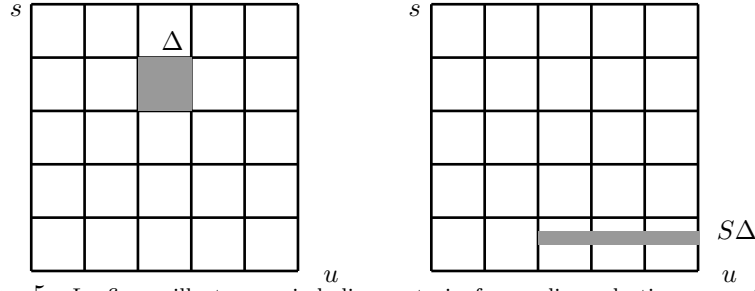


Fig. 5: Le figure illustrano, simbolicamente in forma di quadrati, una parte degli elementi di un pavimento markoviano. Un elemento Δ di questo pavimento è trasformato da S in $S\Delta$ in modo che la parte della frontiera che si contrae finisce esattamente sulle frontiere di alcuni elementi di \mathcal{P} .

Analoga proprietà geometrica vale per S^{-1} , scambiando il ruolo di \underline{v}_+ e \underline{v}_- .

(2) Ora basta un momento di riflessione per evincere che questo significa che, se una successione verifica la proprietà di compatibilità per primi vicini, allora è *effettivamente* una storia possibile (nel senso della definizione 1) di un punto x e di uno solo. Inoltre supponendo che $S^k x$ visiti, per almeno un valore di k , le frontiere delle tessere del pavimento allora solo un numero finito di storie possibili compatibili per primi vicini possono essere associate ad uno stesso punto. Nell'esempio considerato (gatto) si vede facilmente che ci sono al più 4 storie possibili compatibili per primi vicini, e si può inoltre mostrare che tali punti sono rappresentabili simbolicamente a mezzo di successioni in cui ogni elemento è costituito da 2, 3 o 4 simboli σ , (*teorema di Manning*) soggetti ad un vincolo di compatibilità descritto da una opportuna matrice di compatibilità. Tuttavia la corrispondenza fra punto e storia sarà biunivoca fatta eccezione per i punti di un insieme di area nulla.

(3) L'osservazione (1) significa anche che l'insieme dei punti la cui storia (o storia possibile) fra $-M$ ed N coincide è un rettangolino. Inoltre se $\sigma_{-M}, \dots, \sigma_N$ è la storia in questione e se δ_σ^s denota il lato parallelo a \underline{v}_- di P_σ e δ_σ^e il lato parallelo a \underline{v}_+ , allora il lato parallelo a \underline{v}_- di questo rettangolino è $\delta_{\sigma_{-M}}^s e^{-M\lambda}$ e quello parallelo a \underline{v}_+ è $\delta_{\sigma_N}^e e^{-N\lambda}$ ove si è posto $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_+ = -\lambda_-$ sono gli esponenti di espansione e contrazione della trasformazione S (opposti perchè S conserva l'area essendo il determinante di g uguale a 1).

(4) Quindi il rettangolino $\cap_{k=-M}^N S^{-k} P_{\sigma_k}$ coincide con l'insieme dei punti la cui storia fra $-M$ e N è $\sigma_{-M}, \dots, \sigma_N$; ed ha area:

$$27.1 \quad \delta_{\sigma_{-M}}^s \delta_{\sigma_N}^e e^{-(N+M)\lambda} \prod_{i=-m}^{N-1} M_{\sigma_i \sigma_{i+1}} \quad (27.1)$$

che vale automaticamente zero nel caso di incompatibilità.

Poichè eseguendo l' unione sui valori di σ_N (o di σ_{-M}) degli insiemi $\cap_{k=-M}^N S^{-k} P_{\sigma_k}$, si ottiene l' insieme $\cap_{k=-M}^{N-1} S^{-k} P_{\sigma_k}$ (oppure, rispettivamente, l' insieme $\cap_{k=-M+1}^N S^{-k} P_{\sigma_k}$) deve essere:

$$27.2 \quad e^{-\lambda} \sum_{\sigma} M_{\sigma\sigma'} \delta_{\sigma'}^e \equiv \delta_{\sigma}^e, \quad e^{-\lambda} \sum_{\sigma'} \delta_{\sigma'}^s M_{\sigma'\sigma} \equiv \delta_{\sigma}^s \quad (27.2)$$

cioè i lati δ_{σ}^e e δ_{σ}^s paralleli a \underline{v}_+ e \underline{v}_- dei rettangoli di \mathcal{P} si possono interpretare come componenti dell' autovettore, rispettivamente, destro o sinistro della matrice M con autovalore e^{λ} .

(5) La densità delle varietà stabili ed instabili dell' origine implica immediatamente l' esistenza di una potenza k tale che M^k ha tutti gli elementi di matrice positivi. E questo significa semplicemente che ogni quadratino viene talmente stirato dall' azione ripetuta di S , nella direzione espansiva, da finire con l' intersecare le parti interne di *tutti* gli altri quadratini del pavimento iniziale \mathcal{P} . Quindi, dalla teoria elementare delle matrici, si deduce (*teorema di Perron–Frobenius*) che l' autovalore 1 di $e^{-\lambda} M$ è semplice (e cioè gli autovettori destro e sinistro sono unici).

(6) Poichè l' unione di tutti i rettangoli di \mathcal{P} è l' intero toro, segue che $\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma} \delta_{\sigma}^e \delta_{\sigma}^s = 1$. Possiamo quindi immaginare di definire una matrice quadrata, i cui indici sono le cifre σ che contraddistinguono gli elementi di \mathcal{P} , ponendo: $\pi_{\sigma\sigma'} = e^{-\lambda} (\delta_{\sigma}^e)^{-1} M_{\sigma\sigma'} \delta_{\sigma'}^e$, e $p_{\sigma} = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta_{\sigma}^s \delta_{\sigma}^e$ e allora la (27.1) diventa:

$$27.3 \quad \mu(\cap_{k=-M}^N S^{-k} P_{\sigma_k}) = p_{\sigma_{-M}} \prod_{k=-M}^{N-1} \pi_{\sigma_k \sigma_{k+1}} \quad (27.3)$$

che ci fa vedere che *la distribuzione uniforme sul toro viene codificata in un processo di Markov* con spazio degli stati con stati in numero uguale a quello dei rettangoli costituenti la pavimentazione \mathcal{P} di T^2 e con probabilità di transizione π .¹⁰

(7) Dunque le storie su \mathcal{P} dei punti scelti a caso con distribuzione uniforme hanno frequenze che possono essere interpretate come le frequenze sei simboli di un *processo di Markov*. Applicando la formula (26.14) si vede che la complessità s delle storie è λ (ove e^{λ} è l' espansione della direzione instabile: $\lambda \equiv \log[(3 + \sqrt{5})/2]$).

Abbiamo già visto (*c.f.r.* §26, problema [2]) che, con probabilità 1 rispetto alla scelta dei dati iniziali con la distribuzione uniforme (*c.f.r.* §22), una successione creata da un moto ha uno spettro continuo.

Ora vediamo che il moto è *caotico* anche nel senso che non è distinguibile da un processo di Markov (per moti con dati iniziali scelti con probabilità 1 rispetto alla distribuzione uniforme). In altre parole il moto non è distinguibile da una successione di lanci di un numero finito di dadi diversi (ma con uguale numero di facce e distinti dall' apposizione di un' etichetta

¹⁰ si veda l' equazione (26.13), e si noti che per definizione $\sum_{\sigma'} \pi_{\sigma\sigma'} = 1$ e p è un autovettore di π , con autovalore 1, normalizzato a $\sum_{\sigma} p_{\sigma} = 1$.

di riconoscimento σ), ottenuta scegliendo per il lancio successivo il dado σ , se σ è stato il risultato ottenuto dall'ultimo lancio, e la prima estrazione viene invece eseguita con la distribuzione di probabilità che attribuisce a ciascuna faccia la sua frequenza su un gran numero di estrazioni.¹¹

(8) Ovviamente possiamo definire moltissimi altri processi di Markov con lo stesso spazio degli stati e la stessa matrice di compatibilità. Questi, interpretati come distribuzioni di probabilità su T^2 via il *codice punto-storia*, saranno distribuzioni invarianti ma saranno *diverse* dalla distribuzione uniforme e non esprimibili via una funzione densità. Utilizzando processi di Markov che danno probabilità nulla a qualche simbolo si otterranno distribuzioni concentrate su insiemi frattali a dimensione inferiore a 2 (cioè a quella del toro).

È questa un'importante caratteristica dei sistemi "caotici": esistono molte distribuzioni invarianti non equivalenti e interessanti. Il che è un pó lo stesso che dire che esistono moltissimi moti realmente diversi.

(E) *Trasformazioni iperboliche piú generali e i loro pavimenti markoviani.*

La costruzione e le osservazioni in (D) si estendono senza grandi difficoltà al caso di sistemi che verificano l'assioma A, che ammettono un punto fisso, o un moto periodico, con varietà stabile ed instabile dense sullo spazio delle fasi (sistema di Anosov mescolante) o su un insieme attraente (insieme attraente mescolante che verifica l'assioma A).¹² Si veda la definizione 2 del §24.

Tutti questi sistemi ammettono pavimenti di Markov \mathcal{P} , c.f.r. definizione 2, con elementi P_σ di diametro piú piccolo di una quantità a piacere. E quindi sono caotici in un senso molto forte: è questo un importante teorema di Sinai.

La sua dimostrazione nel caso 2-dimensionale è una ripetizione, con ovvie modifiche, della costruzione appena discussa nel caso del gatto arnoldiano. Si sceglie un punto fisso (o in sua mancanza un punto periodico) e si traccia una lunga porzione della sua varietà stabile e della sua varietà instabile, completando i "rettangoli" analogamente a quanto illustrato nella Fig.4. Per la dimostrazione generale in dimensione arbitraria c.f.r. [S], [Bo70], e per una che estenda l'idea della dimostrazione qui presentata nel caso $d = 2$ c.f.r. [G6].

Vista l'ubiquità dei sistemi caotici ci si domanda allora se esista una distribuzione invariante naturale, fra le tante che essi posseggono (costruibili via la dinamica simbolica come discusso). Nel caso semplice degli insiemi attraenti topologicamente mescolanti in sistemi verificanti l'assioma A questa domanda, propriamente, dovrebbe essere posta al modo seguente.

Rispondere a questa domanda in sistemi piú generali del gatto arnoldiano

¹¹ Che può essere definita iniziando le estrazioni con un dado qualunque, e non dipende da quale dado si inizi.

¹² Il caso di un moto periodico di periodo k si riduce facilmente al caso del punto fisso studiando la trasformazione S^k invece che la S stessa.

chiarifica di molto la natura del problema perché nel caso semplice della trasformazione del gatto il volume dello spazio delle fasi è invariante ed ergodico, quindi è la propria statistica. Questo non è più così semplice on sistemi più generali perché non solo il volume non è più invariante ma in generale non esiste alcuna distribuzione invariante μ che sia assolutamente continua rispetto al volume μ_0 : pertanto la stessa esistenza di una distribuzione SRB, cioè una distribuzione che è la statistica di tutti i dati tranne un insieme di volume nullo (nel bacino dell'insieme attraente), è lungi dall'essere *a priori* evidente.

Si consideri un sistema dinamico (M, S) con un *insieme attraente* A che verifica l'assioma A e sul quale S agisce in modo topologicamente mescolante. Immaginiamo di estrarre dati iniziali a caso rispetto ad una distribuzione μ_0 che *non è necessariamente invariante* rispetto alla trasformazione S e che è concentrata nel bacino d'attrazione dell'insieme attraente A .

Allora ci domandiamo se μ_0 ha una statistica su A , ossia se A è un *insieme attraente normale* per μ_0 nel senso della definizione 1 del §24:

I Teorema (principio variazionale per distribuzioni SRB): Si supponga che (M, S) verifichi l'assioma A e A sia un insieme attraente su cui S è topologicamente mescolante. Si supponga che la misura μ_0 abbia una densità¹³ rispetto alla misura di volume sul bacino di attrazione di A .

(1) Esiste una statistica μ per μ_0 -quasi tutti i punti di A ; ed è una statistica indipendente dai punti iniziali (con μ_0 -probabilità 1). Tale statistica, che abbiamo chiamato SRB nel §25, genera un sistema dinamico (A, S, μ) ergodico, mescolante, a spettro continuo, e isomorfo a un processo di Bernoulli e:

(2) La distribuzione μ verifica un principio variazionale (principio di Ruelle) quale unica distribuzione di probabilità S -invariante che rende massima la seguente funzione definita sull'insieme \mathcal{M} delle distribuzioni di probabilità S -invarianti ν (su A):

$$s(\nu) - \int_A \nu(dx) \Lambda_e(x) \quad (27.4)$$

ove $s(\nu)$ è l'entropia media della distribuzione ν rispetto a S (c.f.r. (26.10)) e $\Lambda_e(x) = \log |\det(\underline{\partial} S)_e|$ è il logaritmo del determinante della matrice jacobiana della trasformazione S ristretta alla varietà instabile (è a volte chiamato la "somma degli esponenti di Lyapunov instabili locali").

Osservazioni:

(1) Questo teorema, o meglio l'esistenza delle pavimentazioni markoviane nei sistemi considerati nelle sue ipotesi, è alla base della dimostrazione del teorema II del §25. Ed è alla base della congettura che, *salvo casi eccezionali*, i dati iniziali scelti a caso con distribuzione assolutamente continua nel bacino di un insieme attraente, anche se non iperbolico, ammettono una statistica che è data dalla soluzione del problema variazionale del principio di Ruelle, [R6].

¹³ Si dice anche "se μ_0 è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue."

(2) La congettura è di difficile applicabilità: ma se la si accoppia con la sua conseguenza naturale data dal teorema II descritto nel seguente punto (D), ha un valore applicativo che in alcuni casi è notevole, [GC1],[GC2], e in futuro si potrebbe rivelare assai importante, e addirittura emergere come un nuovo principio universale del tipo del *principio di Gibbs* che postula la statistica di Boltzmann–Gibbs come statistica per il calcolo delle proprietà di equilibrio dei sistemi della Meccanica Statistica.

Ne descriveremo alcune applicazioni nei §31÷34. Ora ci limitiamo a discutere il teorema fondamentale sulla struttura delle distribuzioni SRB.

(F) *Rappresentazione della distribuzione SRB via pavimenti markoviani.*

La dimostrazione del teorema I del punto (C) è fondata sull' esistenza di pavimenti markoviani, ossia sulla dinamica simbolica; su di essa è anche fondata l' *espansione in orbite periodiche* (25.8) della distribuzione SRB.

Se \mathcal{E} è un pavimento di Markov generante per (M, S) si può definire il pavimento più fine $\mathcal{E}_T = \cap_{k=-T/2}^{T/2} S^{-k} \mathcal{E}$. I suoi elementi possono essere denotati E_j se $j = (\sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2})$ e:

$$27.5 \quad E_j \stackrel{\text{def}}{=} E_{\sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2}} = \cap_{k=-T/2}^{T/2} S^{-k} E_{\sigma_k} \quad (27.5)$$

e $(\sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2})$ è una stringa compatibile per primi vicini (*c.f.r.* definizione 1) di cifre (cioè se M è la matrice di compatibilità del pavimento \mathcal{E} si ha $M_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} = 1$ per $i = -T/2, \dots, T/2 - 1$).

In ognuno di questi insiemi E_j , $j = (\sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2})$, possiamo selezionare un punto $x_j \in E_j$ continuando la stringa j in una successione infinita bilatera che è una storia possibile di un punto x_j . Si assegni per ogni cifra σ una successione $\sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots$ infinita e tale che $\sigma, \sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots$ sia compatibile per primi vicini e un' altra successione $\dots, \sigma_{-2}^-, \sigma_{-1}^-$ tale che $\dots, \sigma_{-2}^-, \sigma_{-1}^-, \sigma$ sia anche una successione compatibile per primi vicini. Diremo che $\dots, \sigma_{-2}^-, \sigma_{-1}^-$ è un' "estensione a sinistra" di σ e $\sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots$ ne è un' "estensione a destra".

Un' estensione *standard* è una siffatta coppia di funzioni $\sigma \rightarrow (\sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots)$ e $\sigma \rightarrow (\dots, \sigma_{-2}^-, \sigma_{-1}^-)$.

Data un' estensione standard siano, al variare di j , $\underline{\sigma}_j$, le successioni bilatere:

$$27.6 \quad \underline{\sigma}_j \equiv \dots, \sigma_{-2}^-, \sigma_{-1}^-, \sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2}, \sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots \quad (27.6)$$

ove $\sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots$ è l' estensione destra di $\sigma_{T/2}$ e $\dots, \sigma_{-2}^-, \sigma_{-1}^-$ quella sinistra di $\sigma_{-T/2}$. I punti x_j che hanno $\underline{\sigma}_j$ per storia sono i *centri* di E_j .

Evidentemente esistono molti centri di E_j : uno per ogni estensione standard nel senso appena definito. L' insieme dei punti che possono essere centri di E_j è addirittura denso in E_j (si noti che esistono infinite estensioni standard possibili e quindi, per ogni j , infiniti centri).

Le estensioni *non standard* di $\sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2}$ sono dunque, ad esempio, successioni compatibili per primi vicini i cui simboli che portano indici

esterni a $[-T/2, T/2]$ dipendono *oltre* che da $\sigma_{-T/2}$ e $\sigma_{T/2}$ (come nelle estensioni standard) *anche* dai valori σ_j con $|j| < T/2$.

Fissato T e un' estensione standard, e quindi la famiglia dei centri degli insiemi E_j per ogni j , consideriamo ora le seguenti distribuzioni di probabilità $\mu_T^+, \mu_T^-, \mu_T^0$ che si definiscono su M assegnando a ciascun insieme E_j un peso dato da:

$$\begin{cases} Z_T^+(x_j) \equiv \Lambda_{e,T}^{-1}(x_j) = \exp - \sum_{k=-T/2}^{T/2-1} \lambda_e(S^k \underline{\sigma}_j) & \text{per } \mu_T^+ \\ Z_T^-(x_j) \equiv \Lambda_{s,T}(x_j) = \exp \sum_{k=-T/2}^{T/2-1} \lambda_s(S^k \underline{\sigma}_j) & \text{per } \mu_T^- \\ Z_T^0(x_j) \equiv \exp(\sum_{k=-T/2}^{-1} \lambda_s(S^k \underline{\sigma}_j) - \sum_{k=1}^{T/2-1} \lambda_e(S^k \underline{\sigma}_j)) & \text{per } \mu_T^0 \end{cases} \quad (27.7)$$

In tal modo per $\alpha = \pm, 0$ si pone:

$$\mu_T^\alpha(F) \stackrel{def}{=} \frac{\sum_{\sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2}} F(x_j) Z_T^\alpha(x_j)}{\sum_{\sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2}} Z_T^\alpha(x_j)} \quad (27.8)$$

per definizione.

Il teorema fondamentale, del quale il teorema I del punto (C) e la (25.8) sono facili corollari, è (Sinai):

II Teorema (esistenza della distribuzione SRB): I limiti per $T \rightarrow \infty$ di $\mu_T^\pm(F)$ e $\mu_T^0(F)$ esistono per ogni funzione regolare F e sono indipendenti dalla scelta dei centri x_j . Se si denotano μ^\pm, μ^0 , rispettivamente, le distribuzioni limite per $T \rightarrow \infty$ si trova che μ^\pm sono le distribuzioni SRB per S e S^{-1} rispettivamente, mentre la μ^0 è proporzionale alla misura di volume su M .

Per la dimostrazione di questo teorema, e quindi del teorema I e della (25.8) ([S]) si veda [G2],[G7]. Il teorema II non solo implica l' esistenza della distribuzione SRB, cioè la normalità degli insiemi attraenti mescolanti che verificano l' assioma A, ma *fornisce un' utile espressione* per la stesse distribuzioni SRB μ^-, μ^+ ("per il passato" e "per il futuro") e per una distribuzione (non invariante in generale) assolutamente continua rispetto al volume (*c.f.r.* nota ¹³).

Questo è il punto d' arrivo della discussione sulla *cinematica* (o "struttura") dei moti caotici. Nel successivo Capitolo IV illustreremo alcune applicazioni generali, ma concrete, di questa concezione qualitativa dei moti.

Problemi

[1] Sia S è una trasformazione continua espansiva di $[0, 1]$, definita da s trasformazioni $f_i : [a_i, a_{i+1}] \leftrightarrow [0, 1]$ di classe C^∞ e derivate $|f'_i| \geq \lambda > 1$, *c.f.r.* (A): $S(x) = f_i(x)$ per $x \in [a_{\sigma_i}, a_{\sigma_i+1}]$. Se $\underline{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$ è un' arbitraria successione di cifre a s valori esiste un punto $x = x(\underline{\sigma}) \in [0, 1]$ tale che $S^j x \in [a_{\sigma_j}, a_{\sigma_j+1}]$. La corrispondenza $x \leftrightarrow \underline{\sigma}$ fra lo spazio $[0, 1]$ e lo spazio \mathcal{S} di tutte le successioni di cifre a s simboli è biunivoca tranne che per una infinità numerabile di punti x cui corrispondono 2 successioni. Lo stesso avviene se S è discontinua su alcuni punti fra gli a_i , $0 < i < s$ e il valore in tali punti è fissato arbitrariamente in a_i come limite destro di f_i o sinistro di. (*Idea*: Può

esistere un solo istante k tale che $S^k x = a_i$ per qualche $0 < i < s$; e questo può solo avvenire per una infinità numerabile di punti distinti x .)

[2] Nel contesto del problema [1] sia $\lambda(\underline{x}) = \log |S'(x(\underline{x}))|$; allora $\lambda(\underline{x})$ è tale che $|\lambda(\underline{x}) - \lambda(\underline{x}')| < Ce^{-\ln}$ se $\sigma_j = \sigma'_j$ per $j = 0, \dots, n-1$ e $\lambda = \min |\lambda(\underline{x})|$, $C = \max_x \frac{|S''(x)|}{|S'(x)|}$. Posto $d(\underline{x}, \underline{x}') = e^{-n}$ se $\sigma_j = \sigma'_j$, $j = 1, \dots, n-1$ ma $\sigma_n \neq \sigma'_n$ si ha: $|\lambda(\underline{x}) - \lambda(\underline{x}')| < Cd(\underline{x}, \underline{x}')^\lambda$ (laonde si dice che $\lambda(\underline{x})$ è Hölder continua).

[3] Nel contesto del problema [1] si supponga che $\rho(x)dx$ sia una distribuzione di probabilità invariante, allora

$$\rho(x) = \sum_{Sy=x} |S'(y)|^{-1} \rho(y) \stackrel{def}{=} L\rho(x)$$

[4] Sia $\alpha \underline{x} \stackrel{def}{=} (\alpha, \sigma_0, \sigma_1, \dots)$; si scriva l'equazione n [3] per la densità $h(\underline{x}) = \rho(x(\underline{x}))$ e si verifichi che, se si definisce $\alpha \underline{x}$ la successione $\alpha \underline{x} = (\alpha, \sigma_0, \sigma_1, \dots)$, l'equazione diventa:

$$h(\underline{x}) = \sum_{\alpha} e^{-\lambda(\alpha \underline{x})} h(\sigma' \underline{x}) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}h(\underline{x})$$

ove l'operatore \mathcal{L} è definito da questa relazione.

[5] Si mostri che se $1(\underline{x}) \stackrel{def}{=} 1$ è la funzione identicamente 1 sulle successioni \underline{x} allora l'operatore \mathcal{L} definito in [4] verifica

$$B^{-1} < \frac{(\mathcal{L}^n 1)(\underline{x})}{(\mathcal{L}^n 1)(\underline{x}')} < B$$

per $B = Ce^{-\lambda}/(1 - e^{-\lambda})$. (Idea: si noti che:

$$\frac{\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} e^{-\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \sigma_1, \dots) - \lambda(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \sigma_1, \dots) - \dots - \lambda(\alpha_n, \sigma_1, \dots)}}{\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} e^{-\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \sigma'_1, \dots) - \lambda(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \sigma'_1, \dots) - \dots - \lambda(\alpha_n, \sigma'_1, \dots)}}$$

e si maggiori questo rapporto con il max dei rapporti dei termini corrispondenti, usando [2].)

[6] Se n è la misura $n(dx) = \rho(x) dx$ con $\rho = L\rho$, c.f.r. [1], allora per ogni $f \in L_1(n)$ si ha, se L è l'operatore definito in [3], $n(Lf) \equiv n(f)$. Se ν è la corrispondente distribuzione di probabilità sulle successioni $\underline{x} \in \mathcal{S}$ indotta dal codice $\underline{x} \mapsto x(\underline{x})$ come immagine di n allora: $\nu(\mathcal{L}F) \equiv \nu(F)$ per ogni funzione continua F (rispetto alla distanza $d(\underline{x}, \underline{x}')$ in [2]) su \mathcal{S} .

[7] Si faccia vedere che se \mathcal{L} è definito come in [4] e $d(\underline{x}, \underline{x}')$ è definito come in [2] allora:

$$|(\mathcal{L}^n 1)(\underline{x}) - (\mathcal{L}^n 1)(\underline{x}')| < Dd(\underline{x}, \underline{x}')^\lambda$$

(Idea: si elabori l'idea di [5]).

[8] Si noti che [5] e [7] implicano che la successione $n \rightarrow \mathcal{L}^n 1$ ed è una successione equicontinua ed equilimitata su \mathcal{S} e si mostri che, quindi, tale è anche la successione delle medie di Cesaro $n \rightarrow n^{-1}(1 + \mathcal{L}1 + \dots + \mathcal{L}^{n-1}1)$. Si mostri che ogni punto di accumulazione h di quest'ultima successione è un punto fisso per \mathcal{L} . Si mostri che questo significa che la distribuzione $h\nu$ prodotto di $h(\underline{x})$ per la distribuzione ν è una distribuzione invariante per traslazione $\tau: (\sigma_0, \sigma_1, \dots) \rightarrow (\sigma_1, \dots)$ e se ne deduca che la sua immagine come misura su $[0, 1]$ via il codice $\underline{x} \mapsto x(\underline{x})$ è una distribuzione $\rho(x) dx$, con $\rho(x)$ opportuna, invariante per S . La dimostrazione ora data dell'esistenza della

distribuzione invariante *non* è costruttiva: la si può migliorare rendendola costruttiva? (c.f.r. problemi seguenti). (*Idea*: Invero si è fatto uso del teorema di Ascoli–Arzelà.)

[9] Se f è una funzione continua su \mathcal{S} e $f \in \Gamma^k = (\text{spazio delle funzioni } f(\underline{\sigma}) \text{ che dipendono solo da } \sigma_0, \dots, \sigma_{k-1})$, detto anche spazio delle *funzioni cilindriche* o *locali* su \mathcal{S} , allora $f \geq 0$ implica che $\mathcal{L}^k f > 0$ e, se $\|f\|$ denota il massimo di f , $\|\mathcal{L}^k f\| \leq B^{-1} \nu(\mathcal{L}^k f) = B^{-1} \nu(f)$ ove ν è la distribuzione definita in [6]. (*Idea*: procedendo come in [5] si mostri che $\mathcal{L}^p f(\underline{\sigma}) \geq B^{-1} \mathcal{L}^p(\underline{\sigma}')$ per $p \geq k$ e quindi si integri membro a membro rispetto a $\nu(d\underline{\sigma})$.)

[10] Si consideri la funzione $g = 1 - h$, c.f.r. [8]: allora $\nu(g) = 0$. Sia $g_k = 1 - h_k$ con $h_k = h_k^0 - \nu(h_k^0)$ e $h_k^0(\underline{\sigma}) = h(\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, 0, 0, \dots)$. Si mostri che $\|h - h_k\| < E e^{-\lambda k}$ e $\|g_k\| < E$, per un' opportuna $E > 0$ e per $k, n \geq 0$. (*Idea*: Si usi [2].)

[11] Se $f \in C(\mathcal{S})$ e $f_{\pm} = (|f| \pm f)/2$ si constati, nel contesto di [10], la validità delle seguenti relazioni per $n \geq k$, quali conseguenze della disuguaglianza in [9]:

$$\begin{aligned} \nu(|\mathcal{L}^n g_k|) &= \nu(|\mathcal{L}^k \mathcal{L}^{n-k} g_k|) = \nu(|\mathcal{L}^k ((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_+ - (\mathcal{L}^{n-k} g_k)_-)|) = \\ &= \nu(|\mathcal{L}^k ((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_+ + \frac{1}{B} \nu((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_+)) - ((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_- - \frac{1}{B} \nu((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_-))|) \leq \\ &= \nu(\mathcal{L}^k ((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_+ + \frac{1}{B} \nu((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_+)) + ((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_- - \frac{1}{B} \nu((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_-))) = \\ &= (1 - B^{-1}) \nu(|\mathcal{L}^{n-k} g_k|) \end{aligned}$$

(*Idea*: $\nu((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_+) \equiv \nu((\mathcal{L}^{n-k} g_k)_-)$ perchè $\nu(\mathcal{L}^{n-k} g_k) = 0$.)

[12] Si evinca da [11] che $\nu(|\mathcal{L}^n g_k|) \leq (1 - B^{-1})^{n/k} \nu(|g_k|)$ per n multiplo di k .

[13] Si mostri che [12] e [10] implicano che $\nu(|\mathcal{L}^n(1-h)|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ maggiorato da $a e^{-b\sqrt{n}}$. (*Idea*: Si noti che $g - g_k$ è stimato proporzionalmente a $e^{-\lambda k}$ e si scelga $k = \sqrt{n}$ in [12].)

[14] Si constati che [13] implica che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n 1 = h$ con errore stimabile con $a e^{-b\sqrt{n}}$ e a, b costanti calcolabili. Dunque ora la dimostrazione dell' esistenza della distribuzione invariante per S e assolutamente continua è stata resa costruttiva.

[15] Si consideri un sistema di Anosov transitivo bidimensionale (M, S) dotato di un punto fisso. Si costruisca una pavimentazione di Markov \mathcal{E} con il metodo del punto (C) a partire dalle varietà stabile e instabile del punto fisso. (*Idea*: La costruzione in (C) non ha mai veramente fatto uso della speciale forma delle varietà stabile e instabile dell' origine).

[16] Si perturbi in classe C^∞ il sistema in [15] ottenendo il sistema dinamico (M, S_ε) . Si mostri che se la perturbazione è abbastanza piccola, ove ε è una misura della sua grandezza, il nuovo sistema ammette una pavimentazione markoviana \mathcal{E}_ε i cui elementi sono in ugual numero e assai vicini a quelli della \mathcal{E} ed hanno la *stessa matrice di compatibilità*. (*Idea*: Si noti che per la costruzione della pavimentazione \mathcal{E} si usano solo *tratti finiti* delle varietà stabile e instabile del punto fisso. Il punto fisso “sopravvive alla perturbazione” se ε è abbastanza piccolo, per il teorema delle funzioni implicite (essendo iperbolico il suo jacobiano è non nullo).)

[17] Si stabilisca una corrispondenza biunivoca fra i punti di M definendo $C_\varepsilon x$ come il punto che, sulla nuova pavimentazione \mathcal{E}_ε ha rispetto alla nuova dinamica S_ε la stessa storia di x rispetto alla dinamica imperturbata S . Si mostri che questa corrispondenza è continua, anzi Hölder continua. (*Idea*: i punti sono determinati con precisione esponenziale in funzione del numero di cifre specificato della loro storia.)

[18] Si constati (*teorema di stabilità strutturale*) che la corrispondenza C_ε verifica $S_\varepsilon C_\varepsilon \equiv C_\varepsilon S$. Inoltre se x e x' hanno S_ε -storie definitivamente uguali nel futuro si ha $d(S_\varepsilon^n x, S_\varepsilon^n x') \leq C e^{-\lambda' n}$ con $\lambda' < \lambda$ e C opportuno. Così se x e x' hanno storie definitivamente uguali nel passato $d(S_\varepsilon^n x, S_\varepsilon^n x') \leq C e^{-\lambda' n}$. Se ne deduca che per ogni

punto x passano due superfici $W_x^{\varepsilon,s}, W_x^{\varepsilon,u}$ che variano con continuità Hölderiana al variare di x . (*Idea*: Si ha $W_x^{\varepsilon,\alpha} = C_\varepsilon W_x^\alpha$ per $\alpha = u, s$.)

[19] Si consideri un sistema dinamico (M, S) di classe C^∞ con S un diffeomorfismo di Anosov mescolante e M una superficie 2-dimensionale. Se \mathcal{P} è un pavimento di Markov generante si consideri il pavimento $\cap_{-n-}^{n+} S^{-j} \mathcal{P}$ con $n_+ \lambda_+ = n_- |\lambda_-|$ e λ_\pm gli esponenti di Lyapunov della distribuzione ergodica invariante μ (non necessariamente la distribuzione SRB di (M, S)). Allora il (cioè ogni) supporto A della distribuzione μ è ricoperto dagli elementi di $\cap_{-n-}^{n+} S^{-j} \mathcal{P}$: si dia un argomento euristico per inferire che in realtà sono sufficienti “solo” $\sim e^{(n_++n_-)s}$ tali elementi a ricoprire A , per n grande. (*Idea*: il teorema di Shannon–McMillan del §26.)

[20] Sulla base di [9] e osservando che gli elementi di $\cap_{-n-}^{n+} S^{-j} \mathcal{P}$ sono rettangolini di dimensioni quasi uguali nelle direzioni stabile e instabile (per la scelta di n_\pm inferire, (sempre euristicamente), che la minima dimensione di Hausdorff di A è $d_A(\mu) = (1/\lambda_+ + 1/|\lambda_-|)s$. (*Idea*: si ha $n_+ + n_- = n_+(1 + \lambda_+/|\lambda_-|)$ mentre la dimensione lineare degli elementi “importanti” (cioè quelli $P_{\sigma_{-n_-}, \dots, \sigma_{n_+}} = \cap_{-n-}^{n+} S^{-j} P_{\sigma_j}$ definiti da stringhe $\sigma_{-n_-}, \dots, \sigma_{n_+}$ di cifre “frequenti” nel senso del teorema di Shannon–McMillan) è $e^{-n_+ \lambda_+}$. Quindi per (26.8) e (26.9) si deve avere:

$$e^{n_+(1+\lambda_+/|\lambda_-|)s} = e^{-n_+ \lambda_+ \alpha}$$

se α è la dimensione di Hausdorff di A .)

[21] Se μ è la distribuzione SRB per il sistema considerato in [9],[10] allora $s = \log \lambda_+$: se ne dia un argomento euristico. Si deduca, per [20], che nel sistema in questione le dimensioni di informazione e di Lyapunov relative alla distribuzione invariante μ sono uguali. La discussione è in realtà più generale e le conclusioni di [20] valgono nella sola ipotesi che (M, S) siano di classe C^2 e che μ sia una distribuzione ergodica. E l'identità fra $d_L(\mu)$ e $d_I(\mu)$ vale sotto la sola ipotesi che μ sia una distribuzione SRB nel senso (più debole di quello che usiamo in questo volume) della osservazione (3) alla congettura in (B), §26: *teorema di Young, c.f.r.* [Y].

[22] Si faccia vedere, almeno euristicamente, che se (M, S) è un sistema di Anosov mescolante e se μ è la distribuzione SRB allora la sua entropia s è data dalla somma dei logaritmi degli esponenti di Lyapunov positivi di (M, S, μ) (*formula di Pesin*). È questo un caso particolare di un teorema di Ledrappier–Young, *c.f.r.* [ER], p. 639, che richiede solo che (M, S) sia un sistema dinamico con M, S di classe C^2 e che ρ sia una distribuzione ergodica e SRB nel senso debole dell'osservazione (3) alla congettura del §25. (*Idea*: Si usi la terza delle (27.7) e la (26.10) per inferire che, se $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_N)$ è un pavimento di Markov e C denota la somma $C = \sum_{\sigma_0, \dots, \sigma_p} e^{-\sum_{j=0}^p \lambda_e(S^j \underline{\sigma})}$, con $\underline{\sigma}$ una estensione destra standard della stringa $\sigma_0, \dots, \sigma_p$ nel senso del punto (D): $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log C = 0$; e si usi la prima delle (27.7) per dedurre:

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} -p^{-1} \sum_{\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_p} \mu \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} S^{-j} P_{\hat{\sigma}_j} \right) \log \mu \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} S^{-j} P_{\hat{\sigma}_j} \right) = \\ & = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[+p^{-1} \log C - p^{-1} \sum_{\sigma_0, \dots, \sigma_p} C^{-1} e^{-\sum_{k=0}^p \lambda_e(S^k \underline{\sigma})} \left(-\sum_{k=0}^p \lambda_e(S^k \underline{\sigma}) \right) \right] = \\ & = \int \lambda_e(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

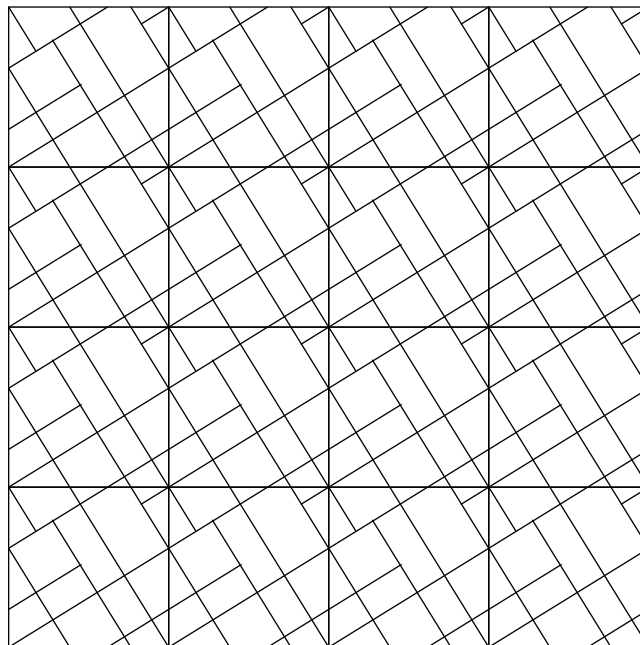
che appunto mostra quanto desiderato. Per il controllo rigoroso degli errori si dovrebbe far uso della teoria svolta nei problemi [1]÷[14].)

Bibliografia: [AA], [G2], [G7], [ER]. La dimostrazione costruttiva dell' esistenza della distribuzione invariante è tratta da Ruelle, *c.f.r.* [G2], ed è adattabile a fornire dimostrazioni di esistenza costruttive di varie equazioni (*c.f.r.* ad esempio: [G4], quali vari problemi sulle equazioni ellittiche di solito affrontati con metodi variazionali (non costruttivi, dunque) *c.f.r.* problemi del §9). Come notato da Ruelle si tratta di una generalizzazione notevole di un ben noto teorema sulle matrici con elementi di matrice tutti > 0 (è il *teorema di Perron–Frobenius* secondo cui una matrice M a elementi di matrice positivi ha un autovalore di massimo modulo che è positivo e semplice e con autovettore a componenti positive): qui il ruolo della matrice è giocato dall' operatore \mathcal{L} .

Una dimostrazione più elementare e soprattutto *notevolmente* più generale dell' esistenza di una distribuzione di probabilità invariante per una trasformazione espansiva si trova in [LY] (*teorema di Lasota–Yorke*).

La costruzione in (C) e la sua estensione in [16] sono basate su un' idea illustratami da M. Campanino. La dimostrazione della stabilità strutturale (parziale perchè non si è mostrata la regolarità delle varietà, ossia l' esistenza del piano tangente in ogni loro punto) è più complessa a dimensione > 2 , *c.f.r.* [G7] per un tentativo di estensione lungo le linee di [15]÷[18], e l' appendice di [Sm] per una dimostrazione generale dovuta a Mather.

La dinamica simbolica per il flusso geodetico sulle superfici a curvatura negativa costante, quale quello relativo al gruppo dell' ottagono, è possibile anche se molto più complicata di quella relativa al gatto arnoldiano: non trova posto in questo volume, *c.f.r.* [AF].



Pavimento markoviano. È colorato: blu, verde, grigio e giallo secondo il teorema dei quattro colori.

CAPITOLO IV

Alta turbolenza

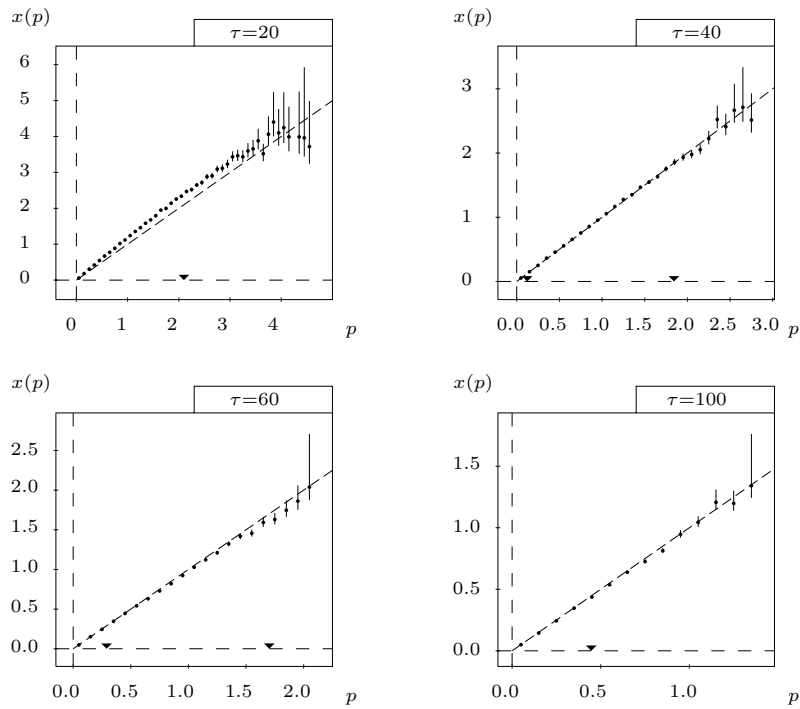


Illustrazione del teorema di fluttuazione del §33 secondo cui $x(p) = \frac{\zeta(-p) - \zeta(p)}{\langle \sigma \rangle_+} = p$ nel limite in cui $\tau \rightarrow \infty$, in un modello di conduzione elettrica in un campo elettromotore assai elevato tratto dall' esperimento in [BGG]. Il grafico tratteggiato è $x(p) = p$ mentre i quattro grafici corrispondono a scelte $\tau = 20, 40, 80, 100$.

§28 *Turbolenza sviluppata. Integrazione funzionale.*

Da un punto di vista qualitativo l' inizio della turbolenza, cioè la nascita del caos, è piuttosto ben capita, come analizzato nel capitolo III, §17%§21.

Si pone ora il problema di come si possa capire e organizzare lo studio della turbolenza sviluppata, "a grande numero di Reynolds".

Si può pensare che l' unica differenza sia la grande dimensione dell' insieme attraente A (o degli insiemi attraenti, nel caso di isteresi), e che la statistica che ne descrive i moti, seguenti scelte casuali del dato iniziale sia descritta dal principio di Ruelle, *c.f.r.* §27, almeno nei casi in cui i dati sono scelti con una distribuzione assolutamente continua rispetto alla misura di volume nel bacino dell' insieme attraente).

La difficoltà più grande a considerare anche solo approssimativamente soddisfacente un tal punto di vista è che, di solito, non si ha idea veruna della natura e posizione nello spazio delle fasi dell' insieme attraente. E quindi è difficile, o impossibile, applicare il principio, mancando in un certo senso la "materia prima".

Si può iniziare lo studio cercando distribuzioni di probabilità, definite sullo spazio dei campi di velocità, invarianti rispetto all' evoluzione definita dall' equazione di NS, incomprimibile (per fissare le idee). Tali distribuzioni possono essere candidate a descrivere la statistica dei moti che si svolgono su un qualche insieme attraente.

Questo procedimento è suggerito e giustificato dal successo ottenuto nella Meccanica Statistica dell' equilibrio ove esiste una distribuzione invariante naturale, proporzionale alla misura di Liouville, che di fatto descrive le proprietà termodinamiche di gran parte dei sistemi.

Per l' equazione di NS il problema è però difficile perchè non esistono distribuzioni invarianti ovvie, quando la forza esterna che tiene in moto il fluido è costante.

Un maggior successo si incontra, invece, nei casi in cui la forza esterna è aleatoria; ed è utile riportare brevemente i risultati formali fondamentali, avvertendo subito che non si riesce (ancora) ad andare molto più in là di discussioni formali.

Si consideri l' equazione su $\Omega = [0, L]^3$ con condizioni periodiche:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= \nu \Delta \underline{u} - \underline{\partial} p + \underline{f}(t) \\ \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0, \quad \int_{\Omega} \underline{u} d\underline{x} = \underline{0} \end{aligned} \tag{28.1}$$

ove $t \rightarrow \underline{f}(t)$ è una forza aleatoria di volume scelta a caso.

Supporremo che la forza \underline{f} abbia una distribuzione gaussiana, individuata

quindi dalla sua *covarianza*.¹ Ad esempio se si pone:

$$28.4 \quad \underline{f}(\underline{x}, t) = \sum_{\underline{k} \neq 0} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \underline{f}_{\underline{k}}(t) = \sum_{\underline{k} \neq 0} \int dk_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} + k_0 t)} \underline{f}_{\underline{k}} \quad (28.4)$$

una covarianza per le variabili $f_{\underline{k}, \alpha}$, componente di modo \underline{k} e indice $\alpha = 1, 2, 3$ della forzante, che è interessante perché è l'ipotesi più "più semplice", può essere:

$$28.5 \quad \langle \overline{f_{\underline{k}, \alpha}(t)} f_{\underline{h}, \beta}(t') \rangle = \delta_{\underline{h} \underline{k}} g_{\underline{k}, \alpha, \beta}(t - t') \quad (28.5)$$

con $g_{\underline{k}}$ proporzionale alla $\gamma \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t')$ e, ad esempio, dato da:

$$28.6 \quad g_{\underline{k}, \alpha, \beta}(t - t') = \gamma \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_0(t-t')}}{|\underline{k}|^a} dk_0 \quad (28.6)$$

ove $\gamma > 0, a$ sono costanti chiamate l'*intensità* e il *colore* della forzante aleatoria \underline{f} . La costante a sarà qui presa ≥ 0 ma potrebbe anche essere < 0 . Invero il caso $a = -2$ è particolarmente interessante: come argomentato in [YO86] dorrisponderebbe allo studio delle proprietà statistiche di un fluido in equilibrio termico a temperatura T se $\gamma = 2\nu k_B T / \rho$ con k_B uguale alla costante di Boltzmann e ρ uguale alla densità del fluido. Sembra che il caso più rilevante per lo studio della turbolenza sia invece $a = 3$, *c.f.r.* [YO86].

¹ Un *processo gaussiano* è una distribuzione di probabilità \overline{P} per le funzioni $\xi \rightarrow f_\xi$, definite su uno spazio di N indici ξ , *finito*, tale che ogni funzionale lineare avente la forma $\sum_\xi c_\xi f_\xi$ con c_ξ costanti arbitrarie è una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana. Questo significa semplicemente che deve esistere una matrice simmetrica A definita positiva tale che la probabilità dell'elemento di volume infinitesimo $df = \prod df_\xi$ sia:

$$28.2 \quad \overline{P}(df) \equiv e^{-\frac{1}{2}(A f, f)} \frac{\prod_\xi df_\xi}{(\pi^N \det A^{-1})^{1/2}} \quad (28.2)$$

La distribuzione \overline{P} è dunque definita univocamente dalla matrice A o, ciò che è lo stesso, dalla A^{-1} . Poiché si vede subito che $\langle f_\xi f_\eta \rangle \stackrel{def}{=} \int \overline{P}(df) f_\xi f_\eta \equiv (A^{-1})_{\xi\eta}$ conviene dire che il processo stocastico è definito dalla *matrice di covarianza* A^{-1} , detta semplicemente *covarianza*. Si noti che i valori medi dei prodotti $\prod_{i=1}^{2n} f_{\xi_i}$ sono facilmente esprimibili in termini della covarianza ("teorema di Wick"). Questo segue differenziando membro a membro l'identità:

$$28.3 \quad \int \overline{P}(df) e^{\sum c_\xi f_\xi} = e^{\frac{1}{2}(A^{-1} c, c)} \quad (28.3)$$

rispetto ai parametri c_ξ e ponendoli poi uguali a zero.

Se lo spazio degli indici non è finito, allora un processo gaussiano può essere definito allo stesso modo in termini della covarianza. Cioè si assegna una forma quadratica definita positiva e denotata $(A^{-1} f, f)$ e si definiscono gli integrali dei prodotti $\prod_{i=1}^{2n} f_{\xi_i}$ via la (28.3).

Si noti che se \overline{P} è un processo gaussiano allora ogni operatore lineare $f \rightarrow O(f)$ definisce una variabile aleatoria gaussiana.

Immaginando, per semplicità, che il fluido sia inizialmente in quiete all'istante $-\Theta$ (e pertanto $\underline{u}(-\Theta) = \underline{0}$), si avrà:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{\underline{k}}(t) = \\ 28.7 \quad = \int_{-\Theta}^t e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \left(\Pi_{\underline{k}} \underline{f}_{\underline{k}}(\tau) - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_1}(\tau) \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_2}(\tau) \right) d\tau \end{aligned} \quad (28.7)$$

ricordando (*c.f.r.* (9.7)) che $\Pi_{\underline{k}} \equiv \Pi_{\text{rot}}$ denota la proiezione sul piano ortogonale a \underline{k} e *ignorando* le questioni (che però sappiamo di non saper risolvere) di non unicità delle soluzioni della (28.7). Procediamo euristicamente domandandoci quale sia la distribuzione di probabilità del campo $\underline{u}(t)$ per t grande.

Scriviamo simbolicamente la equazione (28.7) come:

$$28.8 \quad u = v + Tu \quad (28.8)$$

ove v dipende *solo dalla forza esterna* \underline{f} e $Tu \equiv Q(u, u)$ è il termine non lineare in (28.7) pensato come una funzione definita sui campi a divergenza nulla $u = \underline{u}(\underline{x}, t)$. E quindi, sempre formalmente:

$$28.9 \quad v = (1 - T)u, \quad u = (1 - T)^{-1}v \quad (28.9)$$

La distribuzione di probabilità di u è allora una distribuzione μ tale che la probabilità secondo μ che u sia in “un elemento di volume infinitesimo du ” è:

$$28.10 \quad \mu(du) = P_0(dv) \quad (28.10)$$

ove P_0 è la distribuzione di probabilità di v (ereditata direttamente da quella di \underline{f} , supposta nota *c.f.r.* (28.6)) e dv è l'immagine dell'elemento di volume du per la trasformazione $(1 - T)$: simbolicamente $dv = (1 - T)du$.

Si noti che nel caso dell'esempio (28.5) la distribuzione $P_0(dv)$ è una distribuzione gaussiana, quale distribuzione di $v = \int_{-\Theta}^t \Gamma_{t-\tau} * \Pi_{\text{rot}} \underline{f}(\tau) d\tau$ (relazione che segue dal primo termine del membro di destra della (28.7) con Γ funzione di Green secondo le notazioni della (14.17)). Quindi se scriviamo, al fine di un'analisi formale, $P_0(dv) = G(v)dv$ troviamo:

$$28.11 \quad \mu(du) = G(v) \frac{dv}{du} du = G((1 - T)u) \det \frac{\partial(1 - T)u}{\partial u} du \quad (28.11)$$

Ovviamente questo calcolo formale va interpretato. Un modo è di discretizzare “tutto”: ossia di fissare un intervallo di tempo t_0 , porre $\tau = kt_0$ e scrivere l'integrale in (28.7) come una somma finita $t_0 \sum_{k=0}^{t/t_0-1}$, e inoltre troncare anche la somma su $\underline{k}_1, \underline{k}_2$ a $|\underline{k}| < N$. Qui t_0, N sono parametri di regolarizzazione da far tendere a 0 e ∞ , rispettivamente, alla fine dei calcoli.

Se ci si pone da questo punto di vista si vede che la matrice jacobiana $\frac{\partial(1-T)u}{\partial u}$ ha forma triangolare con 1 sulla diagonale, perchè i tempi nel

membro di sinistra della (28.7) discretizzata sono tutti $< t$ (perchè kt_0 arriva fino a $t - t_0$).²

Quindi: si ottiene dalla (28.11) la *formula di Ghirsanov*:

$$28.12 \quad \mu(du) = G((1 - T)u)du \quad (28.12)$$

ove $P_0(dv) \stackrel{def}{=} G(v)dv$ è la distribuzione di $v = \int_{-\Theta}^t \Gamma_{t-\tau} * \Pi_{\text{rot}} \underline{f}(\tau) d\tau$.

Con la notazione $(\underline{u}, \underline{v}) = \int \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \frac{d\underline{x} dt}{2\pi L^3}$ che definisce un prodotto scalare fra campi $\underline{u}, \underline{v}$ a *divergenza nulla* supponiamo che \underline{f} sia una forza casuale con distribuzione gaussiana.

Pertanto la variabile v , essendo una funzione lineare di \underline{f} , cioè $v = \int_{-\Theta}^t \Gamma_{t-\tau} * \Pi_{\text{rot}} \underline{f}(\tau) d\tau$, avrà anch'essa distribuzione gaussiana e sarà possibile scrivere (formalmente) la sua distribuzione come $P_0(dv) = G(v) dv = \mathcal{N} \exp - (Av, v)/2$ ove \mathcal{N} è una costante di normalizzazione e (Av, v) è una opportuna forma quadratica. Scriveremo anche $Tu \equiv Q(u, u)$, per ricordare che T è un operatore non lineare quadratico in u (c.f.r. (28.7)). Con queste notazioni vediamo che::

$$28.13 \quad \begin{aligned} \mu(du) &= \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2}(Au, u)} e^{-\frac{1}{2}(AQ(u, u), Q(u, u)) - (AQ(u, u), u)} du \equiv \\ &\equiv P_0(du) e^{-\frac{1}{2}(AQ(u, u), Q(u, u)) - (AQ(u, u), u)} \end{aligned} \quad (28.13)$$

e il processo gaussiano $P_0(dv) \stackrel{def}{=} G(v)dv$ ha covarianza, c.f.r. il *primo* termine del membro di destra di (28.7):

$$28.14 \quad \begin{aligned} \int \bar{u}_{\underline{k}, \alpha}(t) u_{\underline{h}, \beta}(\tau) dP &= \int_{-\Theta}^t d\vartheta \int_{-\Theta}^{\tau} d\vartheta' e^{-\nu \underline{k}^2(t-\vartheta)} e^{-\nu \underline{h}^2(\tau-\vartheta')}. \\ &\cdot \int dP \delta_{\underline{h}, \underline{k}}(\Pi_{\underline{k}, \alpha \alpha'} \bar{f}_{\underline{k} \alpha'}(\vartheta))(\Pi_{\underline{h}, \beta \beta'} f_{\underline{h} \beta'}(\vartheta')) = \\ &= \delta_{\underline{h}, \underline{k}} \int_{-\Theta}^t \int_{-\Theta}^{\tau} d\vartheta d\vartheta' e^{-\nu \underline{k}^2(t+\tau-2\vartheta)} \Pi_{\underline{k}, \alpha \alpha'} \Pi_{\underline{h}, \beta \beta'} \delta_{\alpha' \beta'} \frac{\gamma}{|\underline{k}|^a} \delta(\vartheta - \vartheta') = \\ &= \frac{\gamma}{|\underline{k}|^a} \delta_{\underline{h}, \underline{k}} \Pi_{\underline{k} \alpha \beta} \int_{-\Theta}^{\min(t, \tau)} d\vartheta e^{-\nu \underline{k}^2(t+\tau-2\vartheta)} \equiv \\ &\equiv \frac{\gamma}{|\underline{k}|^a} \delta_{\underline{h}, \underline{k}} (\delta_{\alpha \beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{|\underline{k}|^2}) \frac{e^{-\nu \underline{k}^2|t-\tau|} - e^{-\nu \underline{k}^2(t+\tau+2\Theta)}}{\nu \underline{k}^2} \end{aligned} \quad (28.14)$$

intendendo sottintesa la somma su indici ripetuti.

² Si potrebbe obiettare che tutto questo ignora che nella discretizzazione dell'integrale lo abbiamo scritto come somma fino a $t/t_0 - 1$: ma avremmo potuto ugualmente scriverlo come somma fino a t/t_0 . E in questo secondo modo gli elementi sulla diagonale *non sarebbero stati tutti* uguali a 1. Però avrebbero differito da 1 per una quantità proporzionale a t_0 che, formalmente, nel limite $t_0 \rightarrow 0$ si annullerebbe, salvo eventualmente il termine lineare, se il determinante venisse calcolato come serie in t_0 . Il termine lineare in t_0 però è *nullo* perchè la somma su \underline{k}_1 e \underline{k}_2 esclude sempre che $\underline{k}_1 = \underline{k}$ o $\underline{k}_2 = \underline{k}$. Sono questi ultimi termini quelli che contribuirebbero al valore del determinante al primo ordine in t_0 .

La distribuzione gaussiana P_0 dipende da Θ e considereremo illimita P_∞ per $\Theta \rightarrow \infty$ di P_0 : sarà una distribuzione gaussiana stazionaria che non deve essere confusa con il limite per $\Theta \rightarrow \infty$ della distribuzione non gaussiana μ in (28.10) o (28.13).

Interessa ora studiare il processo P cui *tende asintoticamente* il processo P_0 , al crescere del tempo Θ : più precisamente consideriamo il processo $\underline{u}(\underline{x}, t)$ per $\Theta \rightarrow \infty$.

Tale processo è definito dalla sua covarianza:

$$28.15 \quad \int \bar{u}_{\underline{k},\alpha}(t) u_{\underline{h},\beta}(\tau) dP \stackrel{def}{=} \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \int \bar{u}_{\underline{k},\alpha}(t) u_{\underline{h},\beta}(\tau) dP_0 \quad (28.15)$$

e vediamo che per $\Theta \rightarrow \infty$ la distribuzione converge, nel senso che la sua covarianza $\langle \bar{u}_{\underline{k},\alpha}(t) u_{\underline{h},\beta}(\tau) \rangle$ tende ad un limite che viene interpretato come covarianza del processo gaussiano (invariante per traslazione del tempo, ovviamente) con covarianza, *c.f.r.* (28.14):

$$28.16 \quad \begin{aligned} \langle \bar{u}_{\underline{k},\alpha}(t) u_{\underline{h},\beta}(\tau) \rangle &= \frac{\gamma}{|\underline{k}|^a} \delta_{\underline{k}\underline{h}} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{|\underline{k}|^2} \right) \frac{e^{-\nu \underline{k}^2 |t-\tau|}}{\nu \underline{k}^2} \equiv \\ &\equiv \frac{2\gamma}{|\underline{k}|^a} \delta_{\underline{k}\underline{h}} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{|\underline{k}|^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0(t-\tau)}}{k_0^2 + (\nu \underline{k}^2)^2} \end{aligned} \quad (28.16)$$

come si deduce semplicemente calcolando l'integrale con il metodo dei residui. Introducendo la trasformata di Fourier $u_{\underline{k},\alpha,k_0}$ rispetto al tempo di $u_{\underline{k},\alpha}(t)$ definita ponendo $u_{\underline{k},\alpha}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 u_{\underline{k},\alpha,k_0} e^{-ik_0 t}$ la (28.16) si può scrivere anche come uguaglianza fra la covarianza $\langle \bar{u}_{\underline{k},\alpha,k_0} u_{\underline{h},\beta,h_0} \rangle$ e $\frac{2}{\pi} \delta_{\underline{k}\underline{h}} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{\underline{k}^2} \right) \frac{\delta(k_0 - h_0)}{k_0^2 + (\nu \underline{k}^2)^2}$.

Se dunque A è la matrice della forma quadratica (Au, u) definita da:

$$28.17 \quad \frac{2\pi}{2\gamma} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\underline{x} dt}{2\pi L^3} (-\Delta)^{a/2} (\partial_t^2 + \nu^2 \Delta^2) \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) = (Au, u) \quad (28.17)$$

ossia:

$$28.18 \quad A = \frac{\pi}{\gamma} (-\Delta)^{a/2} (\partial_t^2 + \nu^2 \Delta^2) \equiv \frac{\pi}{\gamma} (-\Delta)^{a/2} (\partial_t - \nu \Delta) (-\partial_t - \nu \Delta) \quad (28.18)$$

Vediamo che $P_\infty(du)$ è un processo gaussiano definito dall'operatore A sullo spazio dei campi di velocità a *divergenza nulla*.

Volgendo ora l'attenzione al campo di velocità del fluido, che abbiamo denotato con lo stesso simbolo u , *c.f.r.* (28.13), segue che la distribuzione asintotica del campo u è, *c.f.r.* (28.13):

$$28.19 \quad \mu(du) = P_\infty(du) e^{-\frac{1}{2}(AQ(u,u), Q(u,u)) - (AQ(u,u), u)} \quad (28.19)$$

che fornisce una *prima espressione formale* per la μ .

La $Q(u, u)$ può essere espressa, per $\Theta \rightarrow \infty$, da:

$$\begin{aligned}
 Q(\underline{u}, \underline{u})_{\underline{k}}(t) &= \int_{-\infty}^t d\tau e^{-\nu \underline{k}^2 (t-\tau)} \Pi_{\text{rot}} (\underline{u}(\tau) \cdot \underline{\partial} \underline{u}(\tau))_{\underline{k}} \equiv \\
 28.20 \quad &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{\pi} \frac{e^{ik_0(t-\tau)}}{ik_0 + \nu \underline{k}^2} \Pi_{\text{rot}} (\underline{u}(\tau) \cdot \underline{\partial} \underline{u}(\tau))_{\underline{k}} = \\
 &= \left(\frac{1}{(\partial_t - \nu \Delta)} \Pi_{\text{rot}} \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} \right)_{\underline{k}}
 \end{aligned} \tag{28.20}$$

perchè se $\tau > t$ l'integrale su k_0 nel termine intermedio di (28.20) si annulla (integrando su k_0 con il metodo dei residui) e quindi:

$$\begin{aligned}
 (AQ(u, u), Q(u, u)) &= \frac{\pi}{\gamma} \left((-\Delta)^{a/2} (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}), \Pi_{\text{rot}} (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) \right) \\
 28.21 \quad (AQ(u, u), u) &= \frac{\pi}{\gamma} \left((-\Delta)^{a/2} (\partial_t - \nu \Delta) (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}), \underline{u} \right)
 \end{aligned} \tag{28.21}$$

intendendo che questa è una funzione sui campi $\underline{u}(\underline{x}, t)$ a divergenza nulla su \underline{x} e definiti per $\underline{x} \in \Omega$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

La conclusione è che la misura sullo spazio dei campi di velocità a divergenza nulla:

$$\begin{aligned}
 28.22 \quad \mu(d\underline{u}) &= \mathcal{N} e^{-\frac{(2\pi L^3)^{-1}}{2\gamma/\pi} \int d\underline{x} dt (-\Delta)^{a/2} (\partial_t^2 + \nu^2 \Delta^2) \underline{u}, \underline{u}} \cdot d\underline{u}. \\
 &\cdot e^{-\frac{(2\pi L^3)^{-1}}{\gamma/\pi} \int d\underline{x} dt \left[\left(\frac{1}{2} (-\Delta)^{a/2} \Pi_{\text{rot}} (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}), (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) \right) - \left((-\Delta)^{a/2} (-\partial_t - \nu \Delta) (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}), \underline{u} \right) \right]}
 \end{aligned} \tag{28.22}$$

è una misura formalmente invariante per l'equazione di NS soggetta ad una forza aleatoria, con covarianza nello spazio tempo:

$$28.23 \quad \frac{\gamma/\pi}{(-\Delta)^{a/2} (k_0^2 + \nu^2 \Delta^2)} \delta_{\underline{k} \underline{k}'} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{|\underline{k}|^2} \right) \delta(k_0 - k_0') \tag{28.23}$$

e il caso $a = 0$ corrisponde ad un *rumore bianco*, mentre i casi $a \neq 0$ si diranno *rumori colorati* di colore $\frac{a}{2}$.

Se a è *pari positivo* si ha un caso molto interessante in quanto l'integrale funzionale (28.23) è da un punto di vista formale una *teoria di campo locale*: le forme quadratiche in (28.22) infatti si esprimono come integrali di prodotti di campi di velocità e loro derivate tutti calcolati sullo *stesso punto* dello spazio tempo.³ Questo non è più vero se $a/2$ non è un intero ≥ 1 (perchè $(-\Delta)^{a/2-1}$ non è un operatore locale). Qui si deve tener presente che argomenti euristici suggeriscono che uno dei casi di maggiore interesse sia il caso di colore semintero $a = 3$.

Come in tutte le teorie di campo formali è necessario chiarire che cosa si debba esattamente intendere quando si considera l'integrale funzionale

³ Si noti che $(-\Delta)^a \Pi_{\text{rot}}$ è un ordinario operatore differenziale se a è pari ≥ 2 perchè la sua trasformata di Fourier è la matrice $|\underline{k}|^a \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta |\underline{k}|^{a-2}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

(28.22). E questo anche se si vuol prescindere dalla verifica matematica che esso definisca *davvero* una distribuzione invariante per l'evoluzione generata dall'equazione di NS (con rumore).⁴

Ma prima di lanciarsi nell'impostazione di questo problema ("sovrumano"), è bene fermarsi per fare il punto sulla situazione. Precisamente ci dobbiamo chiedere quale possa essere l'interesse di quanto andiamo dicendo e scrivendo (e forse leggendo).

Perchè modificare e ampliare il problema considerando forze aleatorie di volume, quando quel che ci interessa è il caso di forze di volume costanti?

Anzitutto è facile aggiungere a quanto detto una forza costante \underline{g} che supporremo a divergenza nulla (senza ledere la generalità). Basta infatti sostituire in (28.7) \underline{f}_k con $\underline{f}_k + \underline{g}_k$ e procedere senza batter ciglio allo stesso modo. Si vede subito che in tal caso la distribuzione formalmente invariante, che denotiamo $\mu_{\underline{g}}(du)$ si scrive:

$$\mu_{\underline{g}}(du) = \mu(du) e^{-\nu^{-1}(\Delta^{-1}A\underline{g}, u - Q(u, u))} \quad (28.24)$$

ove $\mu(du)$ è la (28.22): $\mu \equiv \mu_0$.

Quindi una distribuzione invariante in presenza di forza esterna \underline{g} e assenza di rumore può essere ottenuta come *limite* ($\gamma \rightarrow 0$) delle teorie di campo con lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{u})$:

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma}{\pi} \mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\dot{u}}) = & \int \frac{d\underline{x} dt}{2\pi L^3} \left(-\frac{1}{2} |(-\Delta)^{a/4} (\partial_t + \nu \Delta) \underline{u}|^2 - \right. \\ & -\frac{1}{2} |(-\Delta)^{a/4} \Pi_{\text{rot}} \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}|^2 - ((-\Delta)^{a/2} (\partial_t - \nu \Delta) (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u}) \cdot \underline{u}) + \\ & + \nu^{-1} ([(-\Delta)^{-1+a/2} (-\partial_t^2 + (\nu \Delta)^2) \underline{g}], \underline{u}) - \\ & \left. - \nu^{-1} ([(-\Delta)^{a/2} (\partial_t - \nu \Delta) \underline{g}], (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u})) \right) \end{aligned} \quad (28.25)$$

Questo limite potrebbe essere interpretato come una distribuzione di probabilità concentrata sui campi che rendono minima la \mathcal{L} in (28.25). Questi sono soluzioni delle equazioni differenziali che si ottengono imponendo a condizione di stazionarietà del funzionale (28.25). *Il parametro di colore può essere scelto ad arbitrio nel senso che ogni limite, qualunque sia a potrà essere interpretato come una distribuzione invariante per la evoluzione di NS.*

Mal si vede cosa si sia guadagnato.

Gli estremi dell'azione costruita con la lagrangiana \mathcal{L} sono formalmente misure invarianti ma obbediscono a equazioni differenziali (se a è pari, almeno) che devono essere equivalenti alla equazione di NS iniziale, o meglio alla sua versione "duale" come equazione di evoluzione di distribuzioni di probabilità sullo spazio dei campi di velocità. Non le scriveremo, ma è noto

⁴ Il che ci riporterebbe alla teoria dell'esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni NS che, come abbiamo già visto, necessita di nuove idee.

che la ricerca di soluzioni di questo tipo non si è rivelata più fruttuosa di quella, inconcludente, della ricerca di soluzioni della equazione di NS stessa.

In realtà l'interesse di quest'analisi sta, piuttosto, nella possibilità di utilizzare quanto si è appreso recentemente nella teoria dei campi, dopo lo sviluppo dei metodi di studio basati sul *gruppo di rinormalizzazione*, riguardo al caso $\gamma > 0$, *c.f.r.* [BG].

Si intravede la possibilità che per $\nu \rightarrow 0$ e \underline{g} fisso, ossia al tendere all'infinito del numero di Reynolds, i risultati possano risultare *indipendenti* dal valore di γ , almeno alcuni di essi fra quelli di interesse fisico e almeno per quel che concerne la distribuzione delle componenti $\underline{u}_{\underline{k}}$ con \underline{k} non troppo grande.

A \underline{g} fisso $\nu \rightarrow 0$ e γ piccolo, studiamo il problema di cosa accada ad alto numero di Reynolds in presenza di un piccolo rumore. In un certo senso dunque studiamo *proprietà degli attrattori stabili rispetto a (certe) perturbazioni aleatorie*. E cioè si evince che, ove si riuscisse a dare qualche risposta alla questione dell'esistenza e delle proprietà delle distribuzioni (28.24) si otterrebbe la risposta ad un problema che forse è addirittura il più interessante fra quelli che si possono porre.

Finora le molte ricerche nella direzione dello studio dell'integrale (28.24) non hanno dato frutti rilevanti o *non ambigui*. Ma il problema continua ad attrarre l'attenzione di molti ricercatori. Quindi è importante cercare di trovare su basi euristiche cosa potremmo "ragionevolmente" attenderci da una teoria futura.

Tra i tentativi di studio cito qui [YO86] ove l'integrazione funzionale non è esplicitamente usata perché il lavoro si basa sul metodo equivalente degli sviluppi perturbativi (in termini del calcolo esplicito dei termini di ordine più basso senza menzione dei diagrammi di Feynman, che pure qui sarebbero utili): finora non è chiaro come si possano stimare i termini "marginali" trascurati, *c.f.r.* p. 48 in [YO86]. Non ci resta che sperare che una migliore comprensione si sviluppi in un futuro non troppo distante.

Rinviamo ai problemi la trattazione di quanto discusso nel caso assai più semplice dell'*equazione di Stokes*:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}} &= \nu \Delta \underline{u} + \underline{g} + \underline{f}(t) \\ \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0, \quad \int \underline{u} = \underline{0} \end{aligned} \tag{28.26}$$

È questo un caso facile ma molto interessante ed istruttivo: ma la sua semplicità ne rende inutile una discussione formale.

Problemi,

[1] Si studino le distribuzioni invarianti dell'evoluzione definita dall'equazione, definita sul cerchio $x \in [0, 2\pi]$, $\dot{u} = \partial_x^2 u + f(t)$ con $f(t)$ un rumore di colore $c = a/2$ a media nulla e con dati iniziali a media nulla, lungo le linee di quanto discusso sopra e si noti che la teoria è puramente gaussiana. Se ne calcoli la covarianza.

[2] Si studi formalmente, lungo le linee discusse per l'equazione NS con rumore stocastico le distribuzioni invarianti per l'evoluzione definita dall'equazione di evoluzione sulla retta $\dot{u} = -u + \partial_x^2 u - u^3 + f(t)$ con $f(t)$ un rumore di colore $a/2$. Si deduca la

lagrangiana della teoria di campo generata dall' applicazione della formula di Ghirsanov ((28.12)) e la lagrangiana corrispondente all' equazione (28.15).

[3] Si formuli la teoria delle distribuzioni invarianti per la equazione di Stokes (28.26) lungo le linee di quanto discusso sopra. (*Idea*: Si noti che la teoria è puramente gaussiana e se ne calcoli la covarianza.)

[4] Si calcoli, nel caso del problema [1], il comportamento della funzione di $\underline{x}, \underline{y}$ definita da $\langle (\underline{u}(\underline{x}, t) - \underline{u}(\underline{y}, t))^2 \rangle$ quando $|\underline{x} - \underline{y}| \rightarrow 0$, in funzione del colore del rumore: la media è intesa sulla distribuzione stazionaria per le equazioni (28.26) costruita nel problema [1]. (*Idea*: Si studi la covarianza della distribuzione gaussiana in [1].)

[5] Come nel problema [4] ma per la funzione $\langle |\underline{u}(\underline{x}, t) - \underline{u}(\underline{y}, t)|^3 \rangle$.

[6] A mezzo della tecnica del problema [7] in §11 (teorema di Wiener) si discuta la classe di regolarità in \underline{x} a t fisso dei campioni del processo gaussiano del problema [3] mostrando che sono campi Hölder continui con un esponente che può essere stimato inferiormente in termini del colore $a/2$ e che diviene positivo per a abbastanza grande. (*Idea*: Basta osservare che la covarianza diviene regolare se a è abbastanza grande e procedere come nella dimostrazione della regolarità, con probabilità 1, delle traiettorie del moto Browniano nel problema citato del §11.)

Bibliografia: L' analisi di questo paragrafo è classica, si veda ad esempio [An]. Per approfondimenti e successivi sviluppi si veda [YO86]. . Per sviluppare l' intuizione sulla filosofia che ispira i tentativi più recenti di applicazione dei metodi del gruppo di rinormalizzazione ("RNG") allo studio della statistica della turbolenza è interessante citare quest' ultimo articolo ove, a p. 47, si dice (si veda il §29 per la nozione di "dominio inerziale"): "The RNG method developed here [in [YO86]] is based on a number of ideas. First there is the correspondence principle, which can be stated as follows. A turbulent fluid characterized in the inertial range by scaling laws can be described in this inertial range by a corresponding Navier–Stokes equation in which a random force generates velocity fluctuations that obey the scaling of the inertial range of the original unforced system. Second" ... "We believe that the results of the RNG fixed–point calculations can be applied to any fluid that demonstrates Kolmogorov–like scale–invariant behavior in some range of wavevectors and frequencies. This situation resembles the theory of critical phenomena in the sense that the critical exponents computed at the fixed points are approximately valid in the vicinity of the critical point where $(T - T_c)/T_c \ll 1$."

§29 Fenomenologia della turbolenza sviluppata e leggi di Kolmogorov.

Consideriamo un fluido di Navier Stokes in un cubo $\Omega = [0, L]^d$, $d = 2, 3$, con condizioni al bordo periodiche e soggetto ad una forza costante \underline{g} regolare e quindi tale che le sole componenti di Fourier $\underline{g}_{\underline{k}}$ con $|\underline{k}| \cong 2\pi/L$ sono apprezzabilmente diverse da 0. Si dice che il sistema è “forzato sulla scala L del contenitore”, o che il fluido riceve energia dall’ esterno “su scala” L .

Si immagini ora che il fluido si trovi in uno stato stazionario e di diminuire il valore della viscosità ν .

(A): Dissipazione dell’ energia: scala inerziale e scala viscosa.

La forza esterna manterrà un moto in cui non solo cederà, in media, una energia ε_ν , per unità di tempo e di volume, ma anche farà sì che le componenti della velocità apprezzabilmente non nulle aumentino di numero, via via che ν diminuisce. Dunque le componenti di Fourier del campo di velocità apprezzabilmente non nulle saranno quelle con $|\underline{k}| < k'_\nu$ ove k'_ν è una opportuna scala di lunghezza inversa. La lunghezza $(k'_\nu)^{-1}$ sarà chiamata la *scala viscosa*. Ricordiamo che le nostre convenzioni sulla trasformata di Fourier sono tali che $\underline{u}(\underline{x})$ and its transform $\underline{u}_{\underline{k}}$ are related by $\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \underline{u}_{\underline{k}}$. Fissiamo anche la densità ρ a $\rho = 1$.

Nella equazione NS appaiono sia il termine di *trasporto*, detto anche *inerziale*, $\underline{u} \cdot \partial \underline{u}$ che il termine di attrito, detto *viscoso*: quest’ultimo contribuisce al modo \underline{k} di Fourier una quantità di ordine $\nu k^2 |\underline{u}_{\underline{k}}|$; mentre il termine inerziale contribuisce una quantità di ordine di grandezza almeno $|\underline{k}| |\underline{u}_{\underline{k}}|^2$. Allora i termini di attrito, nell’ equazione di NS, divengono dominanti su quelli inerziali per \underline{k} grande: lo scambio di rilevanza avviene a valori di \underline{k} per cui (in media sul tempo) $\nu |\underline{k}|^2 |\underline{u}_{\underline{k}}| \cong |\sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_2}|$, che è il criterio per determinare la scala viscosa k'_ν . La transizione non sarà netta, e quindi si introdurrà un’ altra scala $k_\nu < k'_\nu$ dello stesso ordine di grandezza tale che per \underline{k} nella regione cuscinetto tra k_ν e k'_ν i termini inerziale e viscoso saranno confrontabili (in media). Si supponrà che $\underline{u}_{\underline{k}} \equiv \underline{0}$ per $|\underline{k}| > k'_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \infty$. Porremo $g = \max_{\underline{k}} |\underline{g}_{\underline{k}}|$, tenendo presente che $\underline{g}_{\underline{k}}$ differisce da $\underline{0}$ in modo apprezzabile solo se $|\underline{k}|$ è vicino al suo valore minimo $|\underline{k}| \simeq 2\pi L^{-1} \equiv k_0$.

Se la forza esterna è fissa i modi con $|\underline{k}|$ piccolo (cioè prossimo a k_0) sono certamente non viscosi. Invero ci potremmo attendere che forza esterna sarà in grado di produrre, sulle componenti di Fourier della velocità sulle quali agisce direttamente, velocità di ordine $|\underline{g}_{\underline{k}}| L^2 / \nu$ (perchè $\nu k^2 \underline{u}_{\underline{k}} \cong \underline{g}_{\underline{k}}$ sarebbe la soluzione stazionaria in assenza di termini inerziali e $\underline{g}_{\underline{k}}$ è diverso

da $\underline{0}$, apprezzabilmente, solo se $|\underline{k}| \cong 2\pi/L$.

Ma la $gL^2\nu^{-1}$ non è la sola grandezza con le dimensioni di una velocità che può essere formata con i parametri del problema (g, L, ν): un'altra è \sqrt{gL} . Dai dati sperimentali sembra che al tendere a 0 di ν lo stato stazionario del fluido dissipi per unità di tempo e volume una quantità $\eta = \int \underline{g} \cdot \underline{u} d\underline{x} \simeq L^3 g \langle |\underline{u}_k| \rangle$ di energia che è proporzionale ad una potenza di ν , negativa o eventualmente nulla: quindi si deve pensare che anche la velocità media sulla scala macroscopica (cioè una quantità come la $\langle |\underline{u}_k| \rangle$ con $|\underline{k}| = k_0 = 2\pi L^{-1}$) si comporti come una potenza di ν . Se raggiungesse un valore limite (cioè l'esponente della potenza di ν fosse 0), *c.f.r.* [T], [Kr1], p. 306, allora questo dovrebbe essere di ordine \sqrt{gL} , che è la sola grandezza con dimensione di velocità che può essere ormata con i parametri disponibili.

Una conferma teorica dell'esistenza di un "valore di saturazione" (in questo caso indipendente da ν) della dissipazione per unità di tempo, al tendere a zero della viscosità, è stata ottenuta nel caso dell'equazione di Navier–Stokes per un fluido fra due piani paralleli in moto con velocità parallele (ma diverse): *c.f.r.* [DC]. Una semplice (non ottimale) tecnica per la stima della dissipazione per $\nu \rightarrow 0$, in un sistema forzato da una forza costante di volume ma ispirata dal [DC], è esposta nel caso di un fluido forzato da una forza costante nei problemi [1], [2].

(B): Digressione sul significato fisico di " $\nu \rightarrow 0$ ".

È opportuna una breve digressione sulla questione dell'indipendenza della dissipazione media dalla viscosità, nel limite in cui questa si annulla.

È chiaro che non è possibile in esperimenti, altri che numerici, far variare la viscosità in modo da farla tendere a 0. Ma esperimenti su fluidi di Navier–Stokes (ossia che rimangono ben descrivibili da equazioni NS al variare dei parametri sperimentali) possono essere usati per inferire cosa accadrebbe se ν fosse un parametro variabile a piacere. Esaminiamo due casi interessanti.

Si consideri un fluido in un contenitore cubico di lato L , con condizioni *periodiche in orizzontale* ma con condizioni di aderenza alle pareti superiore e inferiore. La prima si suppone che scivoli con velocità costante U e la seconda che sia fissa. È questo un modello ("*flusso di taglio*") più semplice di quello di un fluido fra due cilindri uno dei quali fisso e l'altro rotante ("*flusso di Couette*")

Allora il numero di Reynolds è $R = UL\nu^{-1}$. Posto $\underline{u}(\underline{x}, t) = \frac{\nu}{L} \underline{w}(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{\nu t}{L^2})$, *c.f.r.* §3, l'equazione per \underline{w} diventa quella di un fluido con $\nu = 1, L = 1$ e con velocità di taglio $U' = R$. Vediamo cioè come un esperimento reale su un fluido con $\nu = 1, L = 1$ e velocità di taglio $U' = R \rightarrow \infty$, concepibile in un laboratorio, fornisca informazioni sul fluido in cui U è fissa e $\nu \rightarrow 0$. La relazione fra la dissipazione per unità di tempo e volume dei due fluidi, legati dal riscaldamento di variabili descritto, è semplice e si ha $\eta = \nu L^{-3} \int |\underline{\partial} \underline{u}|^2 d\underline{x} = \nu (\nu L^{-1})^2 \eta_0(R)$, se $\eta_0(R)$ è la dissipazione del fluido "riscalato" (cioè a volume e viscosità unitari).

Pertanto se la dissipazione η è indipendente da ν nel limite $\nu \rightarrow 0$ questo significa che $\eta_0(R) \propto R^3$ per $R \rightarrow \infty$: in [DC] si ottiene una *stima superiore* della dissipazione indipendente da ν nel problema ora descritto di flusso di taglio.

Un secondo caso è un fluido in un contenitore cubico periodico di lato L soggetto a una forza $F\mathbf{g}(\mathbf{x}/L)$ con \mathbf{g} fissa (la dipendenza da \mathbf{x}/L significa che la forza agisce su “scala macroscopica”). Il riscaldamento delle variabili descritto nel caso precedente porta ora a dire che il fluido riscaldato si muove in un contenitore di lato $L = 1$, con viscosità $\nu = 1$ e soggetto a una forza $FL^3\nu^{-2}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv R^2\mathbf{g}(\mathbf{x})$, ove $R = \sqrt{FL^3\nu^{-2}}$. La relazione fra la dissipazione $\eta_0(R)$ nel fluido riscaldato e quella nel fluido originale è ancora $\eta = \nu^3 L^{-2} \eta_0(R)$, e quindi l'indipendenza da ν corrisponde ad una proporzionalità di $\eta_0(R)$ a R^3 .

La teoria che segue non sarà basata sull'ipotesi che la dissipazione (media) per unità di tempo e volume sia una costante per $\nu \rightarrow 0$: la validità di qualsiasi ipotesi su questa quantità non può essere presa per corretta e dovrebbe essere vagliata caso per caso, perché si è lungi da una piena comprensione della questione.

(C): *La teoria K41 tridimensionale.*

Tornando al tema di questo paragrafo notiamo che la presenza dei termini inerziali causa un' apprezzabile dispersione dell' energia che, in loro assenza, resterebbe confinata ai soli modi sui quali agisce la forza esterna: ma non c'è ragione per pensare che in regime stazionario l' ampiezza media (nel tempo) di $|\underline{u}_{\underline{k}}|$ per \underline{k} su scala $k_0 = 2\pi L^{-1}$ non sia, in regime stazionario, monotona crescente al decrescere di ν , e allo stesso tempo $\underline{u}_{\underline{k}}$ sia decrescente a 0 al crescere di \underline{k} (e ν fisso). E questo, solo, è già sufficiente ad affermare che le forze di attrito potranno essere trascurate fino ad una scala $k_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \infty$, con k_ν più piccolo del momento k'_ν della scala viscosa: $k_0 \ll k_\nu \ll k'_\nu$. Come già notato il rapporto fra i termini inerziali e viscosi è, dimensionalmente, $|\underline{u}_{\underline{k}}|/\nu |\underline{k}|$.

La scala k_ν sarà chiamata *scala di Kolmogorov*, la scala k'_ν sarà chiamata *scala viscosa*. Tuttavia quanto detto finora ancora *non consente* di determinare la grandezza delle scale k_ν, k'_ν . Queste saranno determinate dopo la discussione della ipotesi chiave della teoria, cioè l' *omogeneità della turbolenza*, c.f.r. (29.6).

Si perviene dunque a vedere il moto turbolento come ben descritto dall' equazione (se $k_0 \equiv 2\pi L^{-1}$):

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{u}}_{\underline{k}} &= -i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_2} + \underline{g}_{\underline{k}} & k_0 \leq |\underline{k}| \leq k_\nu \\
 \dot{\underline{u}}_{\underline{k}} &= -\nu \underline{k}^2 \underline{u}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_2} & k_\nu < |\underline{k}| < k'_\nu \\
 \dot{\underline{u}}_{\underline{k}} &= -\nu \underline{k}^2 \underline{u}_{\underline{k}} & |\underline{k}| > k'_\nu
 \end{aligned} \tag{29.1}$$

che si legge dicendo che il moto di un fluido ad alto numero di Reynolds,

cioè a piccola viscosità, è descritto dall'equazione di Eulero sulle scale di lunghezza più grandi della scala di Kolmogorov, ma è invece descritto dall'equazione di Stokes su scale più piccole di quella viscosa.

Si dice anche che

- (1) le scale di lunghezza sono *inerziali* per $k_0 \geq |\underline{k}| \geq k_\nu$ e *viscose* se $|\underline{k}| > k'_\nu$. I modi intermedi $k_\nu < |\underline{k}| < k'_\nu$ possono essere chiamati *modi dissipativi* perchè è in essi che avviene la dissipazione dell'energia introdotta dalla forzante nel fluido e
- (2) la “turbolenza” è dovuta ai modi inerziali, mentre il moto dei modi dissipativi e viscosi è sempre “laminare”. Il moto dei modi viscosi è banale e anzi si può porre $\underline{u}_{\underline{k}} = \underline{0}$ per le componenti viscose, *c.f.r.* (29.1).
- (3) La “funzione” dei modi dissipativi è di assorbire energia dai modi inerziali e dissiparla.

Il problema è ora quello di determinare k_ν, k'_ν . Si immagini di disegnare nello spazio dei modi¹ \underline{k} la sfera di raggio $\kappa < k_\nu$. Possiamo allora definire l'energia E^κ per unità di tempo che “esce dalla sfera” (di momenti) di raggio κ ponendo:

$$29.2 \quad E^\kappa \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} L^3 \sum_{|\underline{k}| < \kappa} |\underline{u}_{\underline{k}}|^2 = \mathcal{L} - \mathcal{E}_{\kappa, \kappa'} - \mathcal{E}_{\kappa, \kappa', \infty} \quad (29.2)$$

ove \mathcal{L} è il lavoro fatto dalla forza esterna \underline{g} per unità di tempo ($\mathcal{L} = L^3 \sum_{\underline{k}} \underline{g}_{\underline{k}} \cdot \underline{u}_{\underline{k}}$ uguale a $2L^3 \text{Re} \overline{\underline{g}_{\underline{k}_0}} \cdot \underline{u}_{\underline{k}_0}$ se \underline{g} ha solo la componente di \underline{k}_0 di Fourier), e:

$$29.3 \quad \mathcal{E}_{\kappa, \kappa'} = iL^3 \sum_{|\underline{k}_3| < \kappa} \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = \underline{0} \\ *}} \underline{u}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \underline{u}_{\underline{k}_2} \cdot \underline{u}_{\underline{k}_3} \quad (29.3)$$

e \sum^* significa che $|\underline{k}_2|$ è nell'intervallo $[\kappa, \kappa')$. Infine $\mathcal{E}_{\kappa, \kappa', \infty}$ è dato da un'espressione simile con $|\underline{k}_2|$ in $[\kappa', \infty)$, i termini apparentemente mancanti hanno somma nulla perchè $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = -\underline{k}_3$ è ortogonale a $\underline{u}_{\underline{k}_1}$, come già visto molte volte (*c.f.r.* (13.14), ad esempio).

Si può leggere la (29.2) dicendo che l'energia su scale $< \kappa$ varia per il lavoro “fatto dalla forza esterna” (espresso da \mathcal{L}), per il lavoro che “i modi con $|\underline{k}| < \kappa$ eseguono su quelli con $|\underline{k}| \in [\kappa, \kappa')$ direttamente” (espresso da $\mathcal{E}_{\kappa, \kappa'}$) e per il lavoro che “i modi con $|\underline{k}| < \kappa$ eseguono su quelli con $|\underline{k}| \in [\kappa', \infty)$ ” (espresso da $\mathcal{E}_{\kappa, \kappa', \infty}$).

Ipotesi (turbolenza omogenea): L' ipotesi fondamentale della teoria di Kolmogorov è che $\mathcal{E}_{\kappa, \kappa', \infty}$ sia, “in media”, nulla se κ e $\kappa' = 2\kappa$ sono $< k_\nu$,

¹ Si confondono spesso il “modo” \underline{k} , che è un indice con la dimensione di una lunghezza inversa, e la componente di Fourier $\underline{u}_{\underline{k}}$ che invece è una grandezza dinamica con le dimensioni di una velocità. Aderirò a questo modo di fare, perchè non è possibile (ragionevolmente) essere turbati dalla ambiguità che si potrebbe temere: “temer si dee di sole quelle cose c' hanno potenza di fare altrui male; dell' altre no, chè non son paurose” (II, 88, *Inferno*).

almeno per i moti in regime asintotico, che quindi si svolgono sull'insieme attraente.

Questo significa che ha realmente senso dire che l'energia viene dissipata solo su scala $|\underline{k}| > k_\nu$, scorrendo “in cascata” senza dissipazione apprezzabile dalle grandi scale di lunghezza alle piccole.

Quest'ipotesi, che deve essere intesa come un'a proprietà asintotica per $R \rightarrow \infty$, non ha altra giustificazione che la sua semplicità ed eleganza (oltre che, forse, naturalezza), e *a posteriori* la sua eventuale autoconsistenza e, meglio ancora, aderenza alle osservazioni sperimentali. Vedremo infatti che ha notevoli implicazioni che possono essere soggette a verifica sperimentale.

Ipotesi alternative, apparentemente ragionevoli sono possibili e conducono a risultati *qualitativamente diversi*, c.f.r. (4.1) e (4.3) in [Kr2], si veda anche §30. Si noti che non dipende dal comportamento a costante o a potenza di R o ν della dissipazione per $R \rightarrow \infty$.

Si noti che l'ipotesi è indipendente dall'essere o meno vero che la dissipazione per unità di tempo e volume tenda ad una costante per $R \rightarrow \infty$ ovvero si comporti come una potenza di ν o R .

Un modo di leggere l'ipotesi è il seguente: “nel regime inerziale ($|\underline{k}| < k_\nu$) si possono trascurare gli scambi di energia fra scale di momento *non contigue*” (*località della cascata di energia*), c.f.r. [Kr2]. Ovvero “i vortici più piccoli sono trasportati passivamente da quelli più grandi che li contengono”: detta così l'ipotesi non sembra ben accomodarsi con le esperienze visive, almeno, sui moti turbolenti in cui i vortici piccoli sono spesso tali solo su una o due dimensioni mentre nell'altra o nelle altre due hanno dimensioni di molti ordini di grandezza più grandi e quindi il loro moto è “distorto” da quello che si svolge su scale di lunghezza anche molto diverse (“non contigue”). Il fenomeno è a volte chiamato *intermittenza*. Pertanto ci sarà da attendersi che la teoria sviluppata sulla base dell'ipotesi di turbolenza omogenea necessiti di correzioni.

Sulla base di questa analisi euristica supporremo che $\varepsilon_\nu \equiv \varepsilon \equiv \rho^{-1} L^{-3} E^\kappa$ sia costante nella regione $k_0 \ll \kappa < k_\nu$. Si deve ora notare che, per quel che riguarda le proprietà medie delle componenti di Fourier del campo di velocità con modo \underline{k} di qualunque ordine κ con $\kappa \in (k_0, k_\nu)$, *deve essere equivalente* forzare il sistema su una scala di lunghezza L ovvero su un'altra scala inferiore ma $\gg \kappa^{-1} \gg k_\nu^{-1}$, purché la quantità di energia dissipata per unità di tempo e di massa sia sempre ε .

Ne segue che ε deve essere esprimibile, su ogni scala $\kappa < k_\nu$ in funzione di sole grandezze che riguardano la scala $l = \kappa^{-1}$ ma *non* la viscosità (che non entra nella prima delle (29.1) che descrivono il moto delle componenti sulle scale $\kappa < k_\nu$). Dunque se v_l è una variazione di velocità caratteristica della scala l si deve avere, per motivi dimensionali:

$$\varepsilon \simeq v_l^3 l^{-1} \quad (29.4)$$

(ossia perché questa è l'unica grandezza con le dimensioni di energia dissipata per unità di tempo e di volume che può essere formata con le

quantità caratteristiche della scala l) che deve valere, in particolare, su scala $\simeq L$.

Si definisca v_l in modo preciso con:

$$v_l^2 \stackrel{def}{=} \langle (|\Delta|^{-1} \int_{\Delta} (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{x}_0)) d\underline{x})^2 \rangle \quad (29.5)$$

ove Δ è un cubetto di centro arbitrario e lato $l \equiv \kappa^{-1}$ e la media è sul tempo; e (negli stati stazionari) si ammetta che:

- (1) le componenti di Fourier della velocità relative a diversi modi \underline{k} siano statisticamente indipendenti,
- (2) le variazioni di velocità in cubetti Δ disgiunti siano statisticamente indipendenti,
- (3) le variabili $\underline{u}_{\underline{k}}$, componenti di Fourier di \underline{u} , siano essenzialmente ugualmente

distribuite se $|\underline{k}| \stackrel{def}{=} k$ ha un dato ordine di grandezza $k_\nu \gg k \gg k_0$, ad esempio nel senso che $k < |\underline{k}| < 2k$.

Si vede allora che l'energia "contenuta nella scala k ", ossia l'energia dei modi \underline{k} tali che $k_0 \ll k < |\underline{k}| < 2k \ll k_\nu$ è circa $l^3 v_l^2$ per il numero dei cubetti di lato $l = k^{-1}$ che pavimentano Ω (numero che è di ordine $(kL)^3$, avendo fatto uso dell'ipotesi (2)).

D'altra parte per l'ipotesi (1), e con le normalizzazioni (9.2) sulle trasformate di Fourier, vediamo che $v_l^2 \simeq \langle (\sum_{k < |\underline{k}| < 2k} \underline{u}_{\underline{k}})^2 \rangle$ è proporzionale al numero di modi di Fourier fra k e $2k$ (ossia $\propto (kL)^3$), per il teorema del limite central e delle ipotesi (1) e (3). Quindi:

$$v_l^2 \sim (kL)^3 \langle |\underline{u}_{\underline{k}}|^2 \rangle \quad \text{e} \quad v_l^3 = \varepsilon l \quad l = |\underline{k}|^{-1} \quad (29.6)$$

se $\langle |\underline{u}_{\underline{k}}|^2 \rangle$ è il valore quadratico medio (rispetto alla statistica dell'insieme attraente che descrive il moto asintotico) di una singola componente di Fourier della velocità, (tale media essenzialmente non dipende da \underline{k} per $k < |\underline{k}| < 2k$, per l'ipotesi (3)).

Pertanto l'energia $L^3 K(k) dk$ compresa fra k e $k + dk$ è (se $l = k^{-1}$):

$$L^3 K(k) dk = L^3 \sum_{k < |\underline{k}| < k+dk} \langle |\underline{u}_{\underline{k}}|^2 \rangle = \sum_{k < |\underline{k}| < k+dk} \frac{v_l^2}{k^3} = \frac{4\pi}{k} \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{2/3} \frac{dk}{(2\pi/L)^3} \quad (29.7)$$

perchè $4\pi k^2 dk/k_0^3$, $k_0 = 2\pi/L$, è il numero di modi fra k e $k + dk$. Ne segue che:

$$K(k) = \text{cost } \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad k_0 \ll k \ll k_\nu \quad (29.8)$$

è la *densità di energia* per unità di $|\underline{k}|$ e per unità di massa ("legge 5/3 di Kolmogorov").²

² L'argomento secondo cui, per ragioni dimensionali, l'energia su scala k , compresa fra k e $2k$ è $v_l^2 L^3$ e quindi $L^3 K(k) k \sim v_l^2 L^3$ porta, combinato con la (29.4), direttamente alla

Si dice anche che lo spettro di energia (cioè $K(k)$) è concentrato a piccoli k , mentre quello di vorticità (cioè $K(k)k^2$) è concentrato a grandi k .³ Questo fu osservato da Taylor nel 1938, dando inizio alla catena che condusse Kolmogorov, nel 1941, a formulare la teoria che andiamo esplicitando (c.f.r. [Ba1], p. 112) detta anche *teoria K41*.

Il numero di Reynolds del fluido è $R = v_L L \nu^{-1}$: anzi si può introdurre la nozione più generale di *numero di Reynolds su scala l* come $R_l \equiv v_l l \nu^{-1}$. Può essere calcolato usando la $v_l^3/l = v_L^3/L$ (c.f.r. (29.4)), come: $R_l = v_L L \nu^{-1} (l/L)^{4/3} \equiv (l/L)^{4/3} R$.

In seguito alla discussione delle implicazioni dell' ipotesi di turbolenza omogenea *la scala di Kolmogorov può essere naturalmente definita come la sola scala di lunghezza che può essere formata con ε e ν* , oppure come la scala sulla quale il numero di Reynolds diventa di ordine $O(1)$ e cioè con la scala $l_\nu \equiv k_\nu^{-1}$ tale che:

$$29.9 \quad k_\nu = L^{-1} R^{3/4}, \quad \Rightarrow \quad k_\nu \equiv l_\nu^{-1} = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4} = L^{-1} R^{3/4} \quad (29.9)$$

ove l' ultima uguaglianza segue tenendo conto, ancora, della (29.4). Si vede che, effettivamente, k_ν tende all' ∞ per $\nu \rightarrow 0$ se ε resta fisso. o non tende a 0 troppo rapidamete (ad ogni modo *non è ragionevole* pensare che tenda a 0.)

Volendo esprimere tutto in funzione dell' intensità g (ad esempio $g = (L^{-3} \int \underline{g}(x)^2 dx)^{1/2}$) della forza agente e supponendo che al decrescere della viscosità l' energia dissipata per unità di tempo *raggiunga un valore di saturazione*, come si osserva in vari esperimenti su sistemi forzati da forze che agiscono sul bordo dei contenitori, si deve pensare nel caso che consideriamo e per motivi dimensionali che il valore asintotico (per $\nu \rightarrow 0$ della dissipazione ε sia proporzionale a $L^{1/2} g^{3/2}$. Menzioniamo qui che l' esistenza di un valore di saturazione del tasso di dissipazione condusse Onsager a pensare che anche le equazioni di Eulero ammettessero stati stazionari in cui l'energia resta costante a dispetto dell' azione di una forza esterna e della assenza dalle equazioni di un qualsiasi attrito, c.f.r. [O],[Ey],[CWT]).

Si noti che $v_L \sim (\varepsilon L)^{1/3}$ e $R = \nu^{-1}(\varepsilon L)^{1/3}$ (e se si accetta che la dissipazione asintotica sia $\propto L^{1/2} g^{3/2}$ anche $R = (g L)^{1/2} L \nu^{-1}$). Ne segue che il numero di componenti di Fourier con $k < k_\nu$ è di ordine:

$$29.10 \quad N_\nu \sim \frac{8\pi}{3} \frac{k_\nu^3}{(2\pi L^{-1})^3} = \text{cost } R^{9/4} \quad (29.10)$$

che fornisce l' ordine di grandezza del *numero di gradi di libertà apparenti*, probabilmente proporzionale alla *dimensione d di informazione* dell' attrattore.

(29.8), con meno ipotesi; permettendo solo di supporre l' indipendenza delle $\underline{u}_{\underline{k}}$ con i \underline{k} relativi a scale diverse. Però se si supponesse solo questo non si capirebbe come potrebbe essere che $(\sum_{k < |\underline{k}| < 2k} \underline{u}_{\underline{k}})^2$, quadrato della somma di $\sim (kL)^3$ variabili aleatorie, possa avere ordine $(kL)^3$, come invece segue dalla indipendenza delle $\underline{u}_{\underline{k}}$ con diversi \underline{k} .

³ Perchè $K(k)$ è sommabile per $k \rightarrow \infty$, ma $k^2 K(k)$ no.

Si veda il §30 per un modello più semplice dell' equazione di NS, ma simile, in cui la dimensione frattale dell' attrattore risulta la metà della dimensione apparente.

Ci si può domandare se la legge di Kolmogorov sia esattamente vera già per $k \sim k_0 = 2\pi/L$. In realtà ci si debbono attendere deviazioni almeno su scale confrontabili a quella sulla quale agisce la forza (cioè L) perchè su tale scala i dettagli della struttura della forza devono essere importanti. E quindi si deve pensare che quanto detto sulla legge $5/3$ sia vero in un intervallo di scale $k'_0 \ll k \ll k_\nu$ con $k_0 \ll k'_0$ e $k_\nu = k_0 R^{3/4}$. Questo intervallo di scale si dice *dominio inerziale*, o *campo inerziale*, e in esso si ha *turbolenza omogenea*, in cui valgono leggi omogenee universali per la distribuzione dell' energia (*c.f.r.* (29.8)) e di altre quantità (*c.f.r.* problemi).

Determiniamo ora la scala viscosa $k'_\nu > k_\nu$ che ci da il *taglio ultravioletto* naturale per l' equazione di Navier Stokes, (si ricordi quanto discusso al §9 ove il taglio ultravioletto fu introdotto senza discussione del significato fisico per formulare un algoritmo empirico di soluzione della equazione NS).

In base a quanto detto il valore di k'_ν deve essere determinato dalla condizione che i termini viscosi, che diventano confrontabili con quelli inerziali su scale $k \sim k_\nu$, dominino su quelli inerziali per $k > k'_\nu$.

Abbiamo visto che la condizione è che in media (sul tempo) si abbia $\nu |k|^2 \langle |u_k| \rangle \cong \langle |\sum_{k_1+k_2=k} u_{k_1} \cdot k_2 \Pi_k u_{k_2}| \rangle$, e la somma può essere valutata come $|k| \langle |u_k| \rangle^2 (|k|L)^{3/2}$ usando l' ipotesi (1) e $\langle |u_k| \rangle$ può essere valutato $v_l (|k|L)^{-\frac{3}{2}}$ usando la (29.6) (con $l = k^{-1}$); e quindi si vede che questa condizione conduce a $k'_\nu \sim (\varepsilon \nu^{-3})^{1/4} = k_\nu$. Qui è utile tener presente che k_ν fu definito, euristicamente e indipendentemente, su basi puramente dimensionali, *c.f.r.* (29.9).

Quindi le scale k'_ν e k_ν hanno lo stesso ordine di grandezza, una verifica di consistenza non sorprendente; questo significa che gli argomenti qui dati non sono sufficienti a determinare il rapporto k'_ν/k_ν e dicono solo che sarà $\cong 1$; un valore di $k'_\nu = 2k_\nu$ (ad esempio) potrebbe essere accettabile per eventuali esperimenti numerici o ulteriori deduzioni teoriche (e il valore corretto del rapporto si determinerebbe trovando a quale grandezza del rapporto i risultati divengono indipendenti dal valore del rapporto stesso).

Si può formulare un' ipotesi più generale (*c.f.r.* [Ba1], p. 114) che per tutte le scale k , anche (abbastanza) "vicine" a k_0 o "oltre" k_ν , lo spettro di energia dipenda solo da ε e ν : l' ipotesi porta a dire che $K(k) = v_c^2 l_c K_{univ}(l_c k)$, con v_c, l_c scale di velocità e di lunghezza "caratteristiche" dipendenti solo da ε, ν , cioè $l_c = (\nu^3 \varepsilon^{-1})^{1/4}$ e $v_c = (\nu \varepsilon)^{1/4}$ e, di nuovo, K_{univ} è un' opportuna funzione universale del suo argomento.

Questo implica che se k è nel dominio inerziale, in cui lo spettro dipende solo da ε e la densità di energia verifica una legge di potenza in k , la funzione universale $K_{univ}(x)$ deve essere $\propto x^{-5/3}$, perchè solo la combinazione $v_c^2 l_c^{-5/3} = \varepsilon$ ha la dimensione di ε .

Il dominio di validità della formula più generale dovrebbe essere più esteso

di quello in cui $K_{univ} \propto k^{-5/3}$ e la questione di quali siano le scale che delimitano:

- (a) il dominio inerziale (k'_0, k_ν) e
- (b) il dominio (k_1, k_2) , con $k_0 < k_1 < k'_0 < k_\nu < k_2 < k'_\nu$, più grande in cui vale la legge più generale.

è una questione non risolvibile nell'ambito in cui ci siamo posti e richiede una comprensione più dettagliata del problema.

Particolare interesse ha la domanda se $k_0/k_1 \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0$ e/o $k_\nu/k_2 \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0$: su questo si hanno idee poco chiare, anche se l'idea dell'esistenza della funzione universale suggerisce che $k_0/k_1 \rightarrow 0$ e k_1 debba aver ordine di grandezza tale che $l_c k_1 \ll 1$. Ad esempio pare (senza sorpresa veruna) che gli esperimenti siano compatibili sia con $k_0/k_1 \sim O(1/\log R)$ che con $O(1)$.

Infine se la forza esterna agisce su scala $k_{in} \gg k_0$ ma $k_{in} \ll k_\nu$ si avrà ancora la legge $5/3$ per $k > k_{in}$ con una distorsione attorno a $k = k_{in}$. Per $k_0 \ll k \ll k_{in}$ ci aspettiamo equipartizione dell'energia fra i modi.

(D) *Teoria bidimensionale.*

Se $d = 2$ si potrebbe ripetere un argomento analogo: ma questa volta esiste, se $\nu = 0$, anche l'integrale primo della vorticità, *enstrofia*, che potrebbe essere trattato allo stesso modo dell'integrale primo dell'energia. Cioè si potrebbe supporre che per $\kappa < \kappa'$ la quantità $\mathcal{S}_{\kappa, \kappa', \infty}$, definita sostituendo nel membro di sinistra della (29.2) $|\underline{u}_k|^2$ con $k^2 |\underline{u}_k|^2$ e ricalcoland, a partire dalle equazioni NS il membro di destra per ottenere una decomposizione simile in tre termini come in (29.2), sia nulla. Dunque l'enstrofia si trasferirebbe *in modo locale* (nel senso discusso in (C)) dalle scale di grande lunghezza a quelle di piccola lunghezza ove verrebbe dissipata.

Quest'ipotesi è naturale se si immagina che per $\nu \rightarrow 0$ la dissipazione d'energia e quella di enstrofia, per unità di tempo e volume, abbiano un limite finito ε e σ rispettivamente e $\varepsilon = 0$.

Dire che $\varepsilon = 0$ richiede una giustificazione, almeno su piano euristico. Invero se E denota l'energia e $\omega^2 = \Omega$ l'enstrofia si ha, dalle equazioni di NS: $\frac{1}{2}\dot{E} = -\nu\omega^2 + \mathcal{L}$, e $\frac{1}{2}\dot{\Omega} = -\nu L^3 \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^4 |\underline{u}_{\underline{k}}|^2 + \tilde{\mathcal{L}}$ con $\tilde{\mathcal{L}} = L^3 \sum_{\underline{k}} (i \underline{k} \wedge \underline{g}_{\underline{k}}) \cdot \underline{u}_{\underline{k}}$, che implica $|\tilde{\mathcal{L}}| \leq g\omega$ se $g = \|\underline{g}\|_2$.

Si vede quindi che se nello stato stazionario la vorticità è concentrata a grandi valori di \underline{k} , cioè per $|\underline{k}| \sim k_\nu$ ove k_ν è la scala di Kolmogorov $k_\nu = (\sigma^{2/3} \nu^{-3})^{1/6}$ (che è la sola scala di lunghezza inversa indipendente da L che si può formare con i parametri $\sigma, \varepsilon = 0, \nu$), allora $L^3 \sum_{\underline{k}} |\underline{k}|^4 |\underline{u}_{\underline{k}}|^2 \simeq k_\nu^2 \omega^2$. Quindi la stazionarietà implica che la media $2^{-1} \overline{\tilde{\Omega}}$ si annulla così che $-\nu k_\nu^2 \overline{\omega^2} = -\tilde{\mathcal{L}} < g\overline{\omega}$ cioè $\overline{\omega} < g/(\nu k_\nu^2)$.

Pertanto $\varepsilon = \nu \overline{\omega^2} < g^2/\nu k_\nu^4 \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0$ perché k_ν tende a ∞ per $\nu \rightarrow 0$ e, quindi, per $\nu \rightarrow 0$ il sistema (formalmente verificante l'equazione di Eulero) *conserva l'energia nel dominio inerziale*.⁴

⁴ Questo non contraddice i teoremi di regolarità delle soluzioni delle equazioni di Eulero

L' enstrofia non è conservata e si può supporre abbia una "cascata" attraverso il dominio inerziale, a tasso σ .⁵

Si può allora ripetere l' analisi dimensionale della teoria K41 con l' enstrofia che sostituisce l' energia. Se σ denota l' enstrofia che viene comunicata dalla forza esterna al sistema per unità di tempo e di volume, si vede che su scala l si avrebbe $\sigma = v_l^3 l^{-3}$ e dunque l' energia fra k e $k+dk$ sarebbe $L^2 K(k) dk = \sum \frac{v_l^2}{k^2}$ e quindi, poichè $v_l = \sigma^{1/3} k^{-1}$, e procedendo come in (29.7):

$$29.11 \quad K(k) = \text{cost } \sigma^{2/3} k^{-3}, \quad k_0 \ll k \ll k_\nu \quad (29.11)$$

che è una legge di scala che risulta *sommabile* per k grande e quindi significa che, in regime di turbolenza sviluppata, *l' energia resta concentrata sulle scale grandi* (mentre l' enstrofia si distribuisce su tutto il dominio inerziale e anzi la quantità di enstrofia è asintoticamente tutta sui modi con $k \sim k_\nu$ perchè $k^2 K(k)$ non è sommabile, per k grande, mentre $k K(k)$ lo è).

Anche se $d = 2$ si può, dunque, dire che nello stato stazionario l' enstrofia si concentra sui modi a grande k , ossia sulla scala di Kolmogorov, anche se il fenomeno è meno pronunciato del corrispondente fenomeno a $d = 3$ perchè, se $d = 2$, l' integrale dell' enstrofia è solo logaritmicamente divergente a grandi k . L' energia resta concentrata sui modi a scala di ordine $k_0 = 2\pi L^{-1}$,

Si noti che se $d = 2$ il numero di Reynolds su scala l è dato da $R_l = (\frac{l}{L})^2 R$, cioè dipende dal numero di Reynolds R via la potenza 2 invece che $4/3$; e la scala di Kolmogorov ed il numero N_ν di gradi di libertà apparenti sono allora:

$$29.12 \quad k_\nu = L^{-1} R^{1/2}, \quad N_\nu = R \quad (29.12)$$

rispettivamente.

Si può considerare anche il caso in cui la forza esterna agisca su una scala di momento $k_{in} \gg k_0$. In questo caso la distribuzione stazionaria dell' energia dipende dal valore di k rispetto a k_{in} . Per $k > k_{in}$ dovrebbe valere la (29.11) mentre per $k_0 \ll k \ll k_{in}$ l' energia dovrebbe essere equidistribuita fra i modi $k_0 < |k| < k_{in}$ e il suo valore tale che la densità di energia (qui proporzionale dunque a k) si raccordi con la (29.11) a $|k| = k_{in}$.

(E) *Considerazioni conclusive.*

La discussione delle leggi di Kolmogorov, comunque piuttosto euristica e discutibile sotto molti aspetti, può apparire poco convincente. Perchè

a $d = 2$ perchè è una proprietà dei moti che si svolgono sull' attrattore per l' evoluzione di NS: e su di esso non abbiamo reale conoscenza e potrebbe consistere in campi che pur essendo approssimabili con funzioni molto regolari sono tuttavia piuttosto singolari, sì da non poter concludere che l' enstrofia (formalmente conservata se $\nu = 0$) sia realmente conservata. Come si è detto per l' energia nel caso $d = 3$.

⁵ Che potrebbe tendere a divenire ν -indipendente per $\nu \rightarrow 0$ in analogia alla corrispondente cascata di energia nel caso $d = 3$, (cosa però non chiara).

invero si dovrebbe supporre che solo se $d = 2$ sia l' enstrofia a dominare la cascata dell' energia a scale di lunghezza corte (k grande)? In realtà a $d = 3$ si ha anche la conservazione della vorticità nella forma del teorema di Thomson; e di questo non se ne è tenuto conto. È legittimo il dubbio che, riuscendo a tenerne conto “in modo corretto”, si potrebbero ottenere risultati differenti anche a 3 dimensioni, (e più in generale dipendenti dalla dimensione a tutte le dimensioni perchè un analogo del teorema di Thomson vale a tutte le dimensioni). Ma la difficoltà a tener conto di queste leggi di conservazione non pare motivo sufficiente per non considerarle rilevanti.

E allora non resta che vedere se almeno l' esperimento si accorda con la legge di Kolmogorov. La risposta sembra fortemente positiva se $d = 3$, [Ba1]: ma siccome non si ha idea di come stimare gli errori, non si può essere certi della qualità del risultato e i dubbi sussistono. E maggior impegno di ricerca sul tema è senz' altro desiderabile e spiega l' interesse che hanno suscitato metodi “alternativi” quali il metodo funzionale del §28.

Recentemente, [VW], si è accumulata evidenza sperimentale su deviazioni dalla legge 5/3, (29.8). Uno dei meccanismi alla base di tali deviazioni che anche consente di conservare la sostanza delle idee di Kolmogorov, la *multifrattalità*, sarà discusso nel §30 in un modello semplificato.

Nei problemi esaminiamo altre semplici conseguenze delle ipotesi di Kolmogorov che consentono interessanti affermazioni sulle quantità:

$$29.13 \quad \left\langle \prod_{i=1}^n (u_{\alpha_i}(\underline{x}_i, T + t_i) - u_{\alpha_i}(\underline{y}_i, T + t'_i)) \right\rangle \quad (29.13)$$

ove la media è intesa come media sul tempo T ; ovvero, supponendo che il moto per tempi grandi sia descritto da un insieme attraente dotato di statistica (ergodica), la media può essere intesa rispetto alla statistica dell' insieme attraente (ponendo T fisso, grande).

Ad esempio si deve avere, ed è questa una possibile definizione precisa⁵ di v_l , che $\langle (\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y}))^2 \rangle$ sia $\text{cost } l^{2/3}$ se $|\underline{x} - \underline{y}| = l$ (purchè $L \gg l \gg k_\nu^{-1}$ ovviamente). E questa è un' interessante proprietà della distribuzione statistica del campo di velocità nel domino inerziale.

Implica invero che il campo di velocità ha natura frattale, in un certo senso analoga a quella del *moto browniano*: quest' ultimo dà luogo a traiettorie che sono frattali nel senso che gli incrementi della posizione al crescere del tempo sono proporzionali, alla potenza 1/2 dell' incremento di tempo. I fluidi sembrano fornire esempi di campi di velocità frattali, ad esempio nello spazio, nel senso che gli incrementi di velocità sono proporzionali alla potenza 1/3 dell' incremento di spazio (e anche del tempo, *c.f.r.* problemi).

L' interesse di questi campi, come campi aleatori per la teoria delle probabilità, fu sottolineata da Taylor nel 1935 (*c.f.r.* [Ba1], p.8): è ancora aumentato da un' altra loro proprietà, prevista teoricamente da Taylor nel 1938 e osservata sperimentalmente più tardi da Steward, 1951 (*c.f.r.* [Ba1], p. 171): è la *obliquità* o *sghembezza* della distribuzione di $\underline{\delta}(\underline{\rho}) =$

⁵ Che dovrebbe essere equivalente alla (29.5).

$\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{x} + \underline{\rho})$. La $\underline{\delta}(\underline{\rho})$ ha *media* nulla, ma momento terzo *non nullo*, non è dunque una variabile aleatoria centrata (e ovviamente non è gaussiana).

Se $\delta_3(\underline{\rho}) = |\underline{\delta}(\underline{\rho})|^3$, e se si definisce analogamente la variabile aleatoria $\delta_p(\underline{\rho})$, il valore $\delta_3(\underline{\rho})/\delta_2^{3/2}(\underline{\rho})$ è una costante universale per $k_\nu \gg |\underline{\rho}|^{-1} \gg k_0$, nel dominio inerziale; e la stessa costante è il valore di $\delta_p(\underline{\rho})/\delta_2(\underline{\rho})^{p/2}$ nella stessa regione di valori di $|\underline{\rho}|$. È pure una costante universale (diversa) nel dominio viscoso. E questo sembra confermato sperimentalmente, *c.f.r.* [LL].

La teoria di Kolmogorov sulla turbolenza omogenea sembra fornire il secondo esempio non banale di proprietà frattali che si manifestano in situazioni con diretto significato fisico, dopo la teoria di Einstein del moto browniano. Nel prossimo paragrafo cercheremo di mettere in luce una profonda differenza rispetto al moto browniano, che permette di dire che la statistica della turbolenza sviluppata ha carattere *multifrattale*: qui questo significa che la media nel tempo di $\delta_n(\underline{\rho}) = |\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{x} + \underline{\rho})|^n$ *non si comporta* come $\langle \delta_2(\underline{\rho}) \rangle^{n/2}$, neppure nel dominio inerziale $k_0^{-1} \ll l \ll k_\nu^{-1}$, bensì come $\langle \delta_2(\underline{\rho}) \rangle^{\zeta_n/2}$ con ζ_n funzione *non lineare* di n .

(F) *L' equazione di Eulero dissipativa.*

Chiameremo *equazione di Eulero dissipativa* l' equazione per un fluido incomprimibile:

$$\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\underline{\partial} p - \chi \underline{u} + \underline{g}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \quad (29.14)$$

in un contenitore Ω che sia un toro ovvero che abbia pareti perfette sulle quali valga la condizione al bordo di *scivolamento* $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$, se \underline{n} è la normale esterna.

La costante χ sarà chiamata *viscosità collosa* e non corrisponde a una equazione costitutiva del tipo considerato in §1,§2. Corrisponde piuttosto ad un fluido perfetto che scorre con attrito su un fondo: il modello può essere fisicamente interessante soprattutto nei casi a $d = 2$, immaginando che il fluido scorra su una superficie “rugosa”. Ma affinché un fluido bidimensionale che scorre su un tavolo sia ben modellato dalla (29.14) occorrerebbe che lo spessore del fluido fosse $< k_\nu^{-1}$ se ν è la sua vera viscosità: questo ne rende difficili applicazioni reali. Qui lo considereremo solo come modello matematico.

È pensabile una teoria analoga alla teoria K41? I seguenti commenti sono un tentativo di porre i problemi piuttosto che di suggerirne le soluzioni.

Sia $\eta = \chi L^{-3} \int_\Omega |\underline{u}|^2 d\underline{x}$ l' energia dissipata per unità di volume e di tempo. Quindi la scala di lunghezza che può essere formata con le quantità η e χ è $l_\chi = (\eta \chi^{-3})^{1/2}$, e $k_\chi = l_\chi^{-1} = (\chi^3 \eta^{-1})^{1/2}$.

C' è una notevole differenza fra questo caso e il caso NS: ossia l' attrito è “più debole” nel caso presente perché i termini inerziali dominano, “almeno dimensionalmente”, a grandi k invece che a piccoli k , anche se χ è piccolo. Si noti anche che $k_\chi \xrightarrow{\chi \rightarrow 0} 0$ *diversamente* da k_ν (per $\nu \rightarrow 0$) nel caso di NS.

Pertanto se k_0 è la scala di momento sulla quale agisce la forza \underline{g} e se supponiamo che ci sia una “cascata di energia” al di sopra della scala di momento della forzante, *c.f.r.* l’ipotesi di turbolenza omogenea del punto (C) precedente, allora per $d = 3$

(1) Se $k_\chi < k_0$ (la situazione più verosimile poiché ci aspettiamo che $k_\chi \rightarrow 0$ per $\chi \rightarrow 0$ non parendo possibile che $\eta \xrightarrow{\chi \rightarrow 0} 0$ più rapidamente di χ , *c.f.r.* problema [1]: così definitivamente sarà $k_\chi < k_0$) dovremmo avere un dominio inerziale sopra k_0 (ossia per tutti i momenti $\gg k_0$). Ma alla lettera questo vorrebbe dire che l’energia non è mai dissipata il che non è possibile perché l’energia è *a priori* limitata. Sembra allora che, aspettando un tempo infinito, l’energia si vada sempre più estendendo nello spazio \underline{k} e se è presente un taglio ultravioletto K_{uv} tende a divenire equipartita fra i modi con $k_0 < |\underline{k}| < K_{uv}$ ad eccezione dell’energia contenuta nei modi vicini a k_0 , “direttamente” forzati e che dovrebbe trattenere una frazione finita di energia.

(2) Se $k_\chi \gg k_0$ dovremmo di nuovo avere equipartizione (in presenza di taglio ultravioletto) fra i modi sopra k_χ mentre nel dominio fra k_0 e k_χ , se quest’ultimo è abbastanza grande, dovremmo avere un dominio inerziale in cui vale la legge 5/3 di Kolmogorov per la distribuzione di energia.

Il caso $d = 2$ non può essere discusso in modo simile: se supponiamo, come nel caso NS, che abbia luogo una “cascata di enstrofia” e se σ è l’enstrofia dissipata per unità di tempo e di volume allora σ ha dimensione del cubo di un inverso del tempo; poiché χ anche ha dimensione di un tempo inverso *non è possibile formare una scala di lunghezza* con le grandezze χ e σ . Questo sembra dire che se $d = 2$ c’è sempre equipartizione (in presenza di taglio ultravioletto). Si noti, però, che il fondamento dell’ipotesi di una cascata di enstrofia è assai poco chiaro in questo coaso.

In tutti i casi vediamo che è necessario imporre un taglio ultravioletto K_{uv} sulle equazioni ED equations affinché quanto detto abbia un significato. Altrimenti, in assenza del taglio, il sistema tenderà verso uno stato stazionario in cui ogni modo, tranne quelli direttamente forzati e i loro vicini, verso uno stato stazionario in cui ogni modo, tranne quelli direttamente forzati e i loro vicini, ha energia nulla (ossia una equipartizione tra infiniti modi).

La situazione ricorda il problema del copro nero e, come in quel caso, possiamo pensare che non sia davvero necessario introdurre un taglio ultravioletto, *c.f.r.* [Ga92], perché le scale di tempo necessarie per il trasferimento di una quantità di energia apprezzabile ai modi di grande \underline{k} può crescere assai rapidamente con il valore del momento stesso \underline{k} . Un’ipotesi che nel caso del corpo nero fu avanzata da Jeans nel suo tentativo per una spiegazione classica dello spettro della radiazione nera. Ma come nel caso di Jeans questo è un problema assai difficile da analizzare: e poiché sono in gioco tempi lunghi verifiche numeriche dirette non sono neppure pensabili. E un eventuale taglio ultravioletto “effettivo” K dovrebbe essere un momneto formato con le quantità $k_0, k_{in}, \varepsilon, \chi, g$: con esse possiamo formare i momenti $k_0, k_{in}, \sqrt{\chi^2/\varepsilon}, \chi/\sqrt{gL}$ e quindi K non può essere determinato senza una

teoria dettagliata.

Problemi: *Dissipazione e $\nu \rightarrow 0$. Le correlazioni oblique di Kolmogorov.*

Si definisca $\langle X \rangle$ la media nel tempo di un' osservabile A vista su un moto "tipico" del fluido, che si svolge su un insieme attraente A sul quale è descritto da una statistica (tale che la media rispetto alla statistica di X coincida con $\langle X \rangle$). I problemi seguenti riassumono da presso l' analisi di [LL].

[1] Si consideri un fluido di NS con viscosità ν in un contenitore periodico di lato L e soggetto ad una forza $F\sqrt{\nu}\underline{g}(\underline{x}/L)$ (con \underline{g} fissa e adimensionale). Allora la dissipazione media $\langle \eta \rangle$ è limitata uniformemente nel numero di Reynolds $R = \sqrt{F\sqrt{\nu}L^3/\nu^2}$ (c.f.r. la discussione all' inizio del paragrafo). Si supponga (come sempre in questo paragrafo) che le soluzioni dell' equazione di NS siano C^∞ . Si mostri che lo stesso argomento implica una stima uniforme sulla dissipazione nel caso della equazione ED (ossia $\chi(E) \leq (F\|\underline{g}\|_2)^2$).

(Idea: se $\underline{u} = \sum_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}}$, $E = L^3 \sum_{\underline{k}} |\underline{u}_{\underline{k}}|^2 = \int |\underline{u}|^2 d\underline{x}$ e $S = L^3 \sum_{\underline{k}} \underline{k}^2 |\underline{u}_{\underline{k}}|^2 = 2^{-1} \int |\partial \underline{u}|^2 d\underline{x}$) si trova, immediatamente (o c.f.r. (13.15)):

$$\frac{1}{2} \dot{E} = -\nu S + \sqrt{\nu} F \int \underline{u} \cdot \underline{g} d\underline{x}$$

e quindi mediando sul tempo il membro di sinistra, che è una derivata temporale di una quantità limitata (se $\nu > 0$, c.f.r. §13 ad esempio) e dunque ha media temporale nulla, si ha che $0 = -\nu \langle S \rangle + F\sqrt{\nu} \int \langle \underline{u} \rangle \cdot \underline{g} d\underline{x}$. Ne segue che: $0 \leq -\nu \langle S \rangle + \|\underline{g}\|_2 \sqrt{\langle E \rangle} F\sqrt{\nu}$ e cioè (usando al solito che $E \leq k_0^{-2} S$, se $k_0 = 2\pi/L$) si ha $\nu \langle S \rangle \leq (F\|\underline{g}\|_2 k_0^{-1})^2$, qualsiasi sia $\nu > 0$.)

[2] Se la stima in [1] fosse ottimale (cioè se valesse l' uguaglianza) allora non sarebbe vero che η è indipendente da ν nel caso del problema [1]. Si verifichi questa affermazione. Si supponga che la forza abbia la forma $F\nu^\alpha \underline{g}$ e che per $\alpha = 0$ si abbia $\eta \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \infty$: si mostri che allora esiste un valore di α ($\geq \frac{1}{2}$) tale che η ha limite (superiore) non nullo per $\nu \rightarrow 0$. (Idea: Il caso discusso all' inizio del paragrafo mantiene la forza indipendente da ν , ossia si scrive $F\underline{g}$ invece che $F\nu^\alpha \underline{g}$ con $\alpha = 1/2$ come in [1]. La seconda parte, dati i risultati di [1], è solo un argomento di continuità in α .)

[3] Si definisca:

$$V_{\alpha\beta}(\underline{\rho}) = \langle u_\alpha(\underline{x}) u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle, \quad V_{\alpha\beta\gamma}(\underline{\rho}) = \langle u_\alpha(\underline{x}) u_\beta(\underline{x}) u_\gamma(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle$$

e si supponga che la lunghezza $|\underline{\rho}| \equiv \rho \ll L$, in modo che la scala di lunghezza ρ sia nel dominio inerziale o viscoso, in cui questi tensori sono, per ipotesi, invarianti per rotazione e traslazione (della \underline{x}). Si mostri che, in virtù di questa invarianza:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}(\underline{\rho}) &= A(\rho) \delta_{\alpha\beta} + B(\rho) \frac{\rho_\alpha \rho_\beta}{\rho^2} \quad \rho \ll L \\ V_{\alpha\beta\gamma}(\underline{\rho}) &= C(\rho) \delta_{\alpha\beta} \frac{\rho_\gamma}{\rho} + D(\rho) (\delta_{\alpha\gamma} \frac{\rho_\beta}{\rho} + \delta_{\beta\gamma} \frac{\rho_\alpha}{\rho}) + E(\rho) \frac{\rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma}{\rho^3} \end{aligned}$$

ove A, B, C, D, E sono opportune funzioni. (Idea: i tensori indicati sono i soli che possono essere formati avendo a disposizione il vettore $\underline{\rho}$).

[4] Si definiscano i tensori:

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}(\underline{\rho}) &= \langle (u_\alpha(\underline{x}) - u_\alpha(\underline{x} + \underline{\rho})) (u_\beta(\underline{x}) - u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho})) \rangle \\ B_{\alpha\beta\gamma}(\underline{\rho}) &= \langle (u_\alpha(\underline{x}) - u_\alpha(\underline{x} + \underline{\rho})) (u_\beta(\underline{x}) - u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho})) (u_\gamma(\underline{x}) - u_\gamma(\underline{x} + \underline{\rho})) \rangle \end{aligned}$$

e si mostri che se $\rho \ll L$:

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}(\underline{\rho}) &= 2(V_{\alpha\beta}(\underline{\rho}) - V_{\alpha\beta}(\underline{0})) \\ B_{\alpha\beta\gamma}(\underline{\rho}) &= 2(V_{\alpha\beta\gamma}(\underline{\rho}) + V_{\gamma\alpha\beta}(\underline{\rho}) + V_{\beta\gamma\alpha}(\underline{\rho})) \end{aligned}$$

(Idea: se $\rho \ll L$ valgono i risultati di [3]).

[5] Si mostri che se $\rho \ll L$ si ha:

$$\partial_\gamma V_{\gamma\alpha\beta}(\underline{\rho}) - 2\nu\Delta V_{\alpha\beta}(\underline{\rho}) + \langle g_\alpha(\underline{x})u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle = 0 \quad (!)$$

come conseguenza della legge di evoluzione del campo \underline{u} secondo l'equazione di NS.

(Idea: si noti che:

$$\begin{aligned} \partial_t V_{\alpha\beta} &= -(\langle u_\gamma(\underline{x})\partial_\gamma u_\alpha(\underline{x})u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle - \langle u_\alpha(\underline{x})(u_\gamma(\underline{x} + \underline{\rho})\partial_\gamma u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho})) \rangle + \\ &+ \nu\langle \Delta u_\alpha(\underline{x})u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle + \nu\langle u_\alpha(\underline{x})\Delta u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle + \\ &+ \langle (-\partial_\alpha p(\underline{x}) + g_\alpha(\underline{x}))u_\beta(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle + \langle u_\alpha(\underline{x})(-\partial_\beta p(\underline{x} + \underline{\rho}) + g_\beta(\underline{x} + \underline{\rho})) \rangle) \end{aligned}$$

e l'ipotesi di indipendenza dei campi di velocità nei vari punti del fluido permette di pensare le medie su t anche come medie su \underline{x} e quindi, dopo alcune integrazioni per parti rispetto alle \underline{x} , si ottiene quanto voluto perchè si vede che le coppie di termini sulle varie righe sono uguali fra loro; e inoltre $\langle p(\underline{x})u_\alpha(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle$ deve essere un vettore a divergenza nulla formato con il solo vettore $\underline{\rho}$ e deve quindi aver la forma $t(\rho)\rho_\alpha/\rho$ con $\frac{d}{d\rho}\rho^2 t(\rho) = 0 \leftrightarrow t(\rho) = c\rho^{-2} = 0$, (perchè $c = 0$ dal momento che t deve essere regolare per $\underline{\rho} \rightarrow \underline{0}$). Il primo membro ha media nulla per l'ipotesi di stazionarietà.)

[6] Si calcoli la traccia del tensore (identicamente nullo) in [5], Eq. (!), e si evinca che:

$$\partial_\gamma V_{\gamma\alpha\alpha}(\underline{\rho}) - \nu\Delta V_{\alpha\alpha}(\underline{\rho}) + \varepsilon = 0$$

(Idea: si osservi che $\langle \underline{g}(\underline{x}) \cdot \underline{u}(\underline{x}) \rangle$ è la potenza dissipata per unità di volume, essendo le medie su \underline{x} uguali a quelle su t ; quindi $\langle \underline{g}(\underline{x}) \cdot \underline{u}(\underline{x} + \underline{\rho}) \rangle \xrightarrow{\underline{\rho} \rightarrow \underline{0}} \varepsilon$).

[7] Se $\underline{\rho}$ è nel dominio inerziale il vettore $V_{\gamma\alpha\alpha}(\underline{\rho})$ deve dipendere solo da ε e $\underline{\rho}$ e quindi:

$$V_{\gamma\alpha\alpha}(\underline{\rho}) = \Gamma\varepsilon\rho_\gamma \quad \text{per } k_\nu^{-1} \ll \rho \ll L$$

ove Γ è un' opportuna costante (universale). E quindi $\partial_\gamma V_{\gamma\alpha\alpha} = 3\Gamma\varepsilon$. Se ne deduca, per (4), che $\Gamma = -1/3$ perchè nel dominio inerziale il termine $-\nu\Delta V_{\alpha\alpha}(\underline{\rho})$ è trascurabile rispetto a ε . (Idea: per la verifica si noti che $\Delta V_{\alpha\alpha}(\underline{\rho}) \equiv \Delta(V_{\alpha\alpha}(\underline{\rho}) - V_{\alpha\alpha}(\underline{0})) = \frac{1}{2}\Delta B_{\alpha\alpha}(\underline{\rho})$ (per (2)) e $B_{\alpha\alpha}(\underline{\rho}) = \text{cost}\varepsilon^{2/3}\rho^{2/3}$ in questo dominio; e quindi $\Delta V_{\alpha\alpha} \propto \varepsilon^{2/3}\rho^{-4/3}$. Imponendo che $\nu\varepsilon^{2/3}\rho^{-4/3} \ll \varepsilon$ si trova $\rho \gg l_\nu$, c.f.r. (29.9), ossia la condizione che ρ sia nel dominio inerziale.)

[8] Si controlli che [7], cioè $\Gamma = -1/3$, implica immediatamente che la quantità $B_{rrr} \equiv B_{\alpha\beta\gamma}(\underline{\rho})\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma\rho^{-3}$ è $-\frac{4}{5}\varepsilon\rho$ nel dominio inerziale. Questo è il risultato sulla obliquità o sghembezza della distribuzione del campo di velocità nel dominio inerziale (ottenuto da Kolmogorov).

[9] si considerino i tensori di (1) e si verifichi, per calcolo diretto, che le condizioni di incomprimibilità $\partial_\beta V_{\alpha\beta}(\underline{\rho}) = 0$ e $\partial_\gamma V_{\alpha\beta\gamma}(\underline{\rho}) = 0$ implicano le seguenti relazioni fra i coefficienti A, B, \dots :

$$\begin{aligned} A' + B' + \frac{2B}{\rho} &= 0, \quad C' + \frac{2(C+D)}{\rho} = 0, \quad 3C + 2D + E = 0 \\ B(0) &= C(0) = D(0) = E(0) = 0, \quad A(0) = \frac{1}{3}\langle \underline{u}^2 \rangle \\ A(\rho) - A(0) &= -\frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho}\rho^2 B(\rho), \quad D(\rho) = -\frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho}\rho^2 C(\rho) \end{aligned}$$

(*Idea*: si svolgano esplicitamente le derivate, annullando poi il coefficiente w del vettore $\partial_\beta V_{\alpha\beta} = w(\rho)\rho_\alpha$ e i coefficienti dei tensori $\delta_{\alpha\beta}$ e $\rho_\alpha\rho_\beta$ in termini dei quali si esprime $\partial_\gamma V_{\alpha\beta\gamma}$. Invece che $3C + 2D + E = 0$ si troverà $\frac{d}{d\rho}\rho^2(3C + 2D + E) = 0$ che però implica la relazione precedente perchè il campo \underline{u} e quindi le sue medie sono funzioni regolari per $\rho \rightarrow 0$, ossia per ρ più piccolo della scala di Kolmogorov. Per lo stesso motivo B, C, D, E si devono annullare per $\rho = 0$.)

[10] Si immagini ora che ρ sia nel dominio dissipativo ($\rho \ll l_\nu$ e quindi tutti i campi sono funzioni regolari e differenziabili) e, quindi, $B_{\alpha\alpha}(\underline{\rho}) = a\rho^2$; si faccia vedere che la costante a che per ragioni dimensionali deve avere la forma $a = c\varepsilon\nu^{-1}$ è tale che $c = \frac{1}{15}$. (*Idea*: dal (2) si deduce $V_{\alpha\beta}(\underline{\rho}) = V_{\alpha\beta}(\underline{0}) - \frac{1}{2}B_{\alpha\beta}(\underline{\rho})$; e dalla condizione di incomprimibilità del [9], $A' + B' + \frac{2B}{\rho} = 0$ si deduce che $\frac{1}{2}B_{\alpha\alpha}(\underline{\rho}) = -a\rho^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{a\rho^2}{2}\frac{\rho_\alpha}{\rho}\frac{\rho_\beta}{\rho}$. Quindi derivando $V_{\alpha\beta}$ si trova:

$$\langle \partial_\beta u_\alpha \partial_\beta u_\alpha \rangle = 15a, \quad \langle \partial_\beta u_\alpha \partial_\alpha u_\beta \rangle = 0$$

ma $\varepsilon = \frac{1}{2}\nu \langle (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)^2 \rangle = \nu \langle (\partial_\alpha u_\beta)^2 + \partial_\alpha u_\beta \partial_\beta u_\alpha \rangle = 15a\nu$.

Bibliografia: La teoria K41 è tratta da [LL] e da [Ba1]. La teoria bidimensionale è ispirata da una serie di lavori [Kr4],[Kr3], e [Ba2] ove è esposta in dettaglio. Grazie ad una segnalazione di C. Marchioro, rimedio nei problemi alla mia non conoscenza del lavoro [DC].

§30 Il modello a strati. Statistiche multifrattali.

Vista la teoria euristica della turbolenza omogenea si può tentare di evitare lo studio degli integrali funzionali del §28 cercando di fare un' ipotesi sulla struttura dell' insieme attraente A e poi scegliere la distribuzione invariante in base al principio di Ruelle del §27.

Abbiamo visto che la teoria della turbolenza omogenea di Kolmogorov suppone che non vi sia scambio di energia fra lo *strato* dei modi $\kappa < |\underline{k}| < \kappa'$ e quello dei modi $\kappa_1 < |\underline{k}| < \kappa_2$, se gli strati $[\kappa, \kappa']$ e $[\kappa_1, \kappa_2]$ sono separati da almeno “un ordine di grandezza” (ad esempio $\kappa_1 > 2\kappa'$).

Immaginiamo di dividere i modi \underline{k} in strati di ordine di grandezza diverso, cioè in modo che lo strato n -mo, o strato di “scala n ”, sia definito da:

$$30.1 \quad \Delta_n : \quad 2^{n-1}k_0 < |\underline{k}| < 2^n k_0 \quad (30.1)$$

ove k_0 è la “scala del contenitore” (cioè $k_0 = 2\pi L^{-1}$ è il minimo dei valori possibili per $|\underline{k}|$ e dipende solo dalla lunghezza $L \equiv l_0$ del lato del contenitore, immaginato un cubo Ω con condizioni al bordo periodiche).

L' assenza di scambio di energia fra strati distanti, o scale distanti, sarà allora *imposto* scrivendo l' equazione di evoluzione come l' equazione di NS modificata al modo seguente, *c.f.r.* [Kr2], se $\underline{k} \in \Delta_n$:

$$30.2 \quad \dot{\underline{u}}_{\underline{k}} = -\nu \underline{k}^2 \underline{u}_{\underline{k}} - i \sum_{\substack{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k} \\ \underline{k}_2 \in \Delta_{n \pm 1}}} \underline{u}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2 \Pi_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}_2} + \underline{g}_{\underline{k}} \quad (30.2)$$

In tal modo l' assenza di scambio diretto di energia fra strati separati (di almeno 2 unità di scala) è garantito *a priori*, e quindi a più forte ragione dovrebbero valere le leggi di Kolmogorov.

Il modello (30.2) può essere *ulteriormente semplificato* in un modello in cui $\underline{u}_{\underline{k}}$ viene sostituito da una successione \underline{u}_n in cui si pensa di sostituire l' insieme di circa 2^{3n} modi dello strato n -mo con un *unico modo* \underline{u}_n e scrivere, posto $k_n = 2^n k_0$:

$$30.3 \quad \dot{u}_{n\alpha} = -\nu k_n^2 u_{n,\alpha} + k_n \sum_{\beta\gamma} \left(C_{\beta\gamma}^\alpha(n) u_{n-1,\beta} u_{n+1,\gamma} + \right. \\ \left. + D_{\beta\gamma}^\alpha(n) u_{n+2,\beta} u_{n+1,\gamma} + E_{\beta\gamma}^\alpha(n) u_{n-2,\beta} u_{n-1,\gamma} \right) + \underline{g}_n \quad (30.3)$$

ove $C_{\beta\gamma}^\alpha(n), D_{\beta\gamma}^\alpha(n), E_{\beta\gamma}^\alpha(n)$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ sono costanti, simmetriche in $\beta \leftrightarrow \gamma$, definite in modo che la somma:

$$30.4 \quad \sum_{\alpha\beta\gamma;n} k_n \left(C_{\beta\gamma}^\alpha(n) u_{n-1,\beta} u_{n+1,\gamma} + D_{\beta\gamma}^\alpha(n) u_{n+2,\beta} u_{n+1,\gamma} + \right. \\ \left. + E_{\beta\gamma}^\alpha(n) u_{n-2,\beta} u_{n-1,\gamma} \right) u_{n\alpha} \equiv 0 \quad (30.4)$$

che garantisce la conservazione dell' energia $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_n |\underline{u}_n|^2$. La funzione \underline{g}_n è la “forza esterna” e viene immaginata diversa da 0 solo per i primi valori di n (ad esempio $n = 4$).

La condizione (30.4) si può imporre richiedendo che:

$$30.5 \quad \frac{1}{2} C_{\alpha\gamma}^{\beta}(n+1) + \frac{1}{4} D_{\alpha\beta}^{\gamma}(n+2) + E_{\beta\gamma}^{\alpha}(n) = 0 \quad (30.5)$$

ove, ad esempio, $E(n) \equiv E$, $C(n) \equiv C$ e $D(n) \equiv D$ sono tensori opportunamente fissati. Una scelta semplice è fornita dal modello di Gledzer, Ohkitani e Yamada, che chiameremo modello GOY. Si pone $u_n = u_{n,1} + iu_{n,2}$ e si considera l' equazione:

$$30.6 \quad \dot{u}_n = -\nu k_n^2 u_n + ik_n \left(-\frac{1}{4} \bar{u}_{n-1} \bar{u}_{n+1} + \bar{u}_{n+1} \bar{u}_{n+2} - \frac{1}{8} \bar{u}_{n-1} \bar{u}_{n-2} \right) + g \delta_{n,4} \quad (30.6)$$

ove si suppone che le componenti u_n con $n = -1, 0$ siano nulle per definizione. *c.f.r.* [BJPV] p. 55%56.¹

Le equazioni (30.4) e (30.6) sono state molto studiate dal punto di vista numerico: nell' eseguire i troncamenti (necessari nel calcolo numerico) le equazioni troncate continuano a conservare l' energia (se $\nu = 0$): purchè, se N è il valore del troncamento su n , si richieda che u_{N+1} , u_{N+2} siano interpretati come $\equiv 0$. Diventa allora possibile ottenere una stima a priori sull' energia $\mathcal{E} \equiv \frac{1}{2} \sum |u_n|^2$ perchè, ad esempio per la (30.6):

$$30.8 \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_n|^2 = -\nu \sum_n k_n^2 |u_n|^2 + \sum_n \bar{u}_n g_n \quad (30.8)$$

valida anche per le equazioni troncate (nel qual caso la somma si estende fino a N).

Un secondo integrale primo è la quantità:

$$30.9 \quad \mathcal{H} = \sum_n (-1)^n k_n |u_n|^2 \quad (30.9)$$

¹ Un' altra, fra le infinite scelte che soddisfano le (30.5), è:

$$30.7 \quad \dot{u}_n = -\nu k_n^2 u_n + ik_n (4\bar{u}_{n-1} \bar{u}_{n+1} - 4\bar{u}_{n+1} \bar{u}_{n+2} - \bar{u}_{n-2} \bar{u}_{n-1}) + g_n \quad (30.7)$$

Inoltre ci si potrebbe domandare perchè la forza esterna agisca sulla componente $n = 4$. Il motivo riposa probabilmente sulla proprietà delle equazioni di NS a 2 dimensioni, in cui si ha stabilità (lineare) del moto soggetto ad una forza ad una sola componente, $g_n = \delta_{nn_0} g$, a *tutti* i valori di ν , se la componente n_0 è quella con k_n minimo. Inoltre il moto “laminare”, $u_n = (k_{n_0}^2)^{-1} g \delta_{nn_0}$ è, *c.f.r.* [Ma], globalmente attrattivo per tutti i valori di g_{n_0} (o ν). Sebbene questo *non* accada per la (30.6), *c.f.r.* problema [1], se $n_0 = 1$, tuttavia negli esperimenti numerici si sceglie sovente $n_0 > 3$.

che gioca il ruolo dell' *elicità*, *c.f.r.* §9, delle equazioni di NS a $d = 3$ sebbene sia un pò insoddisfacente che i termini con n pari e quelli con n dispari svolgano un ruolo diverso.²

In questo modello u_n può essere pensato come definente una funzione a valori reali:

$$30.10 \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n e^{i2^n x k_0} + \bar{u}_n e^{-i2^n x k_0} \right) \quad (30.10)$$

e l' analisi di Kolmogorov può essere ripetuta, ottenendo che l' energia "su scala $k_n = l_n^{-1} = 2^n k_0$ " è $\mathcal{E}_n = l_0^3 v_n^2$ e tale che $v_n^3/l_n = \varepsilon$ con ε parametro che dipende da g ed è indipendente da n e ν per $n \gg 1$.

E cioè $v_n = (\varepsilon k_n^{-1})^{1/3}$ e $R_n = (k_n/k_0)^{4/3} R$ se $R = v_0 l_0/\nu$, e quindi l' energia su scala k_n , la scala $k_{n\nu} \equiv l_{n\nu}^{-1}$ di Kolmogorov³ e il numero di gradi di libertà $N_{n\nu}$ apparenti, saranno:

$$30.11 \quad \mathcal{E}_n = (\varepsilon k_n^{-1})^{2/3}, \quad k_{n\nu} = (\varepsilon^{1/3} \nu^{-1})^{3/4}, \quad N_{n\nu} = \frac{3}{4} \log R \quad (30.11)$$

E il valore medio della variazione della velocità sarà ancora:

$$30.12 \quad \langle |u(x) - u(y)|^2 \rangle \propto |x - y|^{2/3} \quad k_{n\nu}^{-1} \ll |x - y| \ll 1 \quad (30.12)$$

Per ragioni dimensionali si potrebbe credere che $\varepsilon = (\sqrt{g}l)^3 l^{-1}$: perchè appare probabile che anche in questo modello la dissipazione ε abbia un comportamento per $\nu \rightarrow 0$ che saturi tendendo ad un valore limite (*c.f.r.* §29, commento alla (29.9)).

Il vantaggio di questo modello è la sua semplicità, che ne permette un' analisi numerica più dettagliata sì da servire da banco di prova per la verifica di varie idee alla base della teoria di Kolmogorov. Lo svantaggio è che non permette di verificare la rilevanza della legge di Thomson nella teoria di Kolmogorov, dal momento che tale legge non è simulata nel modello GOY, neppure in forma semplificata (come invece lo è l' energia). Infatti l' esistenza dell' integrale primo (30.9) è solo analogo ad una parziale conseguenza del teorema di Thomson.⁴

² A questo si potrebbe rimediare complicando ulteriormente il modello introducendo 2 componenti complesse per ogni k_n che giochino il ruolo delle componenti di diversa elicità visto al §9, *c.f.r.* [BJPV]. Ma ovviamente queste non sarebbero ancora le equazioni di NS e in definitiva è meglio riconoscere che il modello GOY è utile perchè può illustrare vari comportamenti che potrebbero apparire anche nelle soluzioni del modello di NS ma che non può essere preso troppo sul serio in quanto modello di interesse fisico diretto.

³ Definita da $v_{n\nu} k_{n\nu} \nu^{-1} = 1$.

⁴ Peregrino sarebbe, poi, pensare di poter simulare una conservazione della vorticità richiedendo che fra le C, D, E valga una seconda relazione che implichi un' analoga conservazione, se $\nu = 0$, di $\sum_n k_n^2 |\underline{u}_n|^2$. Questo modello sarebbe invero analogo a NS a 2 dimensioni, in cui la vorticità è una grandezza scalare. Invece la caratteristica delle dimensioni > 2 è proprio che la vorticità *non* è uno scalare e la sua conservazione, se $\nu = 0$, è solo espressa dal teorema di Thomson. Si apprezza così la *intrinseca* perfidia del principio di conservazione delle difficoltà. Anzi proprio per non ricadere su un problema bidimensionale si dovrà imporre che C, D, E *non* siano tali da garantire che $\sum_n k_n^2 |\underline{u}_n|^2$ sia conservata se $\nu = 0$.

Inoltre il modello GOY *presuppone* il fenomeno della “cascata” dell’energia, ossia della non trasmissibilità di energia attraverso scale di ordine di grandezza differente, che invece è uno dei punti da capire quale conseguenza della struttura delle equazioni di NS.

Tornando all’analisi del modello a strati GOY si vede che, se vale la rappresentazione alla Kolmogorov del processo stocastico che descrive la statistica dell’insieme attraente, allora a grande numero di Reynolds si ottiene un interessante esempio di distribuzione statistica che produce, con probabilità 1, campioni $u(x)$ che sono funzioni hölderiane con esponente $1/3$. Un tale campo appare molto interessante anche dal solo punto di vista matematico probabilistico. Anche perchè ci si deve aspettare che sia una distribuzione non banale (ad esempio *obliqua*, c.f.r. problemi del §29).

Una questione interessante che può essere esaminata è se la legge di Kolmogorov possa essere “violata”, se ad esempio la distribuzione del campo u possa deviare dall’aspettazione ingenua secondo la quale la correlazione definita dalla media (sul tempo) di $\delta_p(r) = |u(x) - u(x+r)|^p$ sia proporzionale a $r^{p/3}$, come si pensa, e talvolta si evince, nella teoria di Kolmogorov (c.f.r. la teoria dell’obliquità del §29, per un esempio).

In generale, denotando $\langle \cdot \rangle$ la media sul tempo, si può definire ζ_p via:

$$\langle |\delta_p(r)| \rangle \propto r^{\zeta_p} \quad (30.13)$$

seguendo [BPPV], p.164, e postulare una distribuzione P_r per la variabile $a = a(u)$ funzione del campione u del campo e tale che $|u(x) - u(x+r)| = \bar{u}r^a$, con \bar{u} una variazione di velocità tipica, avente la forma:

$$P_r(a)da = r^{g_r(a)}\rho(a)da \quad (30.14)$$

con $g_r(a)$ e ρ “poco” dipendenti da r ; per cui:

$$\zeta_p = \min_a (pa + g(a)) \quad (30.15)$$

se $g(a) = \lim_{r \rightarrow 0} g_r(a)$.

È facile verificare, c.f.r. problema [3], che nel caso del moto browniano l’analoga distribuzione posta nella forma (30.14) conduce immediatamente a $\zeta_p \equiv \frac{p}{2}$, ossia il minimo ha sempre luogo (qualunque sia p) su $a = \frac{1}{2}$.

Per questo si dice che i campioni del moto browniano sono *frattali semplici*. Invece se ζ_p non risulta lineare in p si dirà che la distribuzione di u ha campioni *multifrattali*, c.f.r. [FP].

E la questione che si pone è, allora, se i “campi di Kolmogorov”, cioè i campioni dei campi di velocità distribuiti con la distribuzione stazionaria per un fluido a grande numero di Reynolds R siano, nel limite $R \rightarrow \infty$, frattali semplici con $\zeta_p = \frac{1}{3}p$ (come il risultato sulla obliquità del §29 suggerisce) ovvero siano multifrattali, come suggerito in [FP].

Lo studio di questo problema è assai difficile ma il suo analogo nel caso del modello GOY è stato analizzato dal punto di vista numerico e i risultati *suggeriscono* proprio che la distribuzione *sia multifrattale*. Se questo fosse

vero anche per la statistica dell'equazione di NS allora si dovrebbe pensare che le leggi di Kolmogorov siano una prima approssimazione, *anche nell'ipotesi di località della cascata di energia*, c.f.r. §29, e che in linea di principio necessitino di correzioni che ne mettano in luce il reale carattere multifrattale.

Recenti esperimenti sulla turbolenza che si sviluppa al passaggio dell'aria attraverso una griglia in un tunnel a vento sembrano indicare che effettivamente si possono osservare, anche nei fluidi reali, correzioni multifrattali: ■
c.f.r. [VW].

La prima osservazione, in vista di uno studio più dettagliato nel caso del modello GOY, è che la (30.6) ci dice che, qualunque siano $\varepsilon > 0$ e α :

$$u_n = 2\varepsilon^{1/3} k_n^{-1/3} e^{i\alpha} \quad (30.16)$$

è una “soluzione” della (30.3) per $n \geq 5$ e $\nu = 0$. Questo fa vedere che il ruolo speciale dell'esponente $1/3$ è *insito* fin dall'inizio nell'equazione (30.3) e ci dice che la legge $5/3$ rappresenta una soluzione “esatta” (e “banale”) dell'equazione di GOY,⁵ almeno nel dominio inerziale perchè non è soluzione per i primi valori di n , ($n \leq 4$, quando non si può trascurare la forzante g), né per n troppo grande (quando non si possono neppure trascurare i termini d'attrito).

Lo studio può procedere in due direzioni: utilizzando il metodo funzionale del §28, ovvero cercando di applicare il *principio di Ruelle* del §27. Il secondo punto di vista è utile se si riesce ad individuare l'insieme attraente, o almeno distribuzioni invarianti di probabilità.

Dunque, in un senso da precisare, la soluzione che possiamo chiamare “di Kolmogorov” appare come un *punto fisso* nello spazio delle fasi per l'evoluzione del modello GOY a viscosità nulla. E perchè questo sia *rigorosamente* vero immagineremo di modificare la funzione g_n in modo che la (30.6) sia esattamente risolta dalla (30.16) per $k_0 \geq k_n \geq k_{n\nu}$, cioè anche per i valori estremi di n vicini a 1 o n_ν (la g_n deve ora essere, quindi, pensata definita in termini del parametro ε nella (30.16) via le (30.11), naturalmente).

Ma c'è da attendersi che questo punto fisso sia *instabile*. È allora naturale pensare che la sua *varietà instabile* generi l'insieme attraente che realmente attrae i moti.

In questo scenario le eventuali proprietà multifrattali della statistica del moto sarebbero dovute proprio all'estensione nello spazio delle fasi dell'insieme attraente.

Procediamo riscrivendo l'equazione (30.16) in forma adimensionale: si sceglie come unità di tempo la scala di tempo associata alla lunghezza di Kolmogorov $l_{n\nu}$, (30.11) e si pone:

$$t' = t k_{n\nu}^{2/3} \varepsilon^{1/3} \quad (30.17)$$

⁵ Si può dire che la (30.11) sia la legge $\frac{5}{3}$ per il modello GOY perchè prevede che l'energia contenuta nello strato $(k_n, 2k_n)$ sia proporzionale a $\varepsilon^{2/3} k_n^{-2/3}$ come seguirebbe dalla (29.8) integrata fra k_n e $2k_n$.

Si verifica subito, via le (30.11), che $k_{n_\nu}^{2/3} \varepsilon^{1/3} \equiv \nu k_{n_\nu}^2$: cioè un' unità di tempo t' corrisponde al trascorrere di un' unità di tempo associata alla scala di Kolmogorov, ossia al tempo (non banale) *più rapido* del moto.

Cambiando notazione in modo che le componenti $n = 0, 1, \dots$ siano contate a partire dalla scala di Kolmogorov in giù, e cioè ponendo $u_n(t) \equiv k_n^{-1/3} \varepsilon^{1/3} \varphi_{n_\nu - n}(t')$, si trova l' equazione adimensionale:

$$\dot{\varphi}_k + 2^{-2k} \varphi_k = i 2^{-2k/3} \left(-\frac{1}{2} \overline{\varphi}_{k-1} \overline{\varphi}_{k+1} + \overline{\varphi}_{k-2} \overline{\varphi}_{k-1} - \frac{1}{2} \overline{\varphi}_{k1} \overline{\varphi}_{k+2} + \gamma_k(\alpha) \right) \quad (30.18)$$

con $k = 0, 1, \dots, n_\nu - 1$ e $\gamma_n(\alpha)$ definito in modo che $\varphi_k \equiv e^{i\alpha}$ (cioè la (30.16) nelle nuove variabili) annulli *esattamente* $\dot{\varphi}_k$ nella (30.18). Si noti che, come già osservato, quest' ultima condizione *implica* che solo le componenti i con i di ordine 1 e n_ν della $\gamma_n(\alpha)$ sono “apprezzabilmente” non nulle: infatti la $\varphi_i = e^{i\alpha}$ già annulla esattamente la somma dei primi tre termini del membro di destra della (30.18) e quindi $\gamma_k(\alpha)$ deve “solo” compensare il termine $2^{-2k} \varphi_n$ che tende rapidamente a 0 al crescere di k e la forza originale (presente solo per k vicino a n_ν). In tal modo la $\varphi_k \equiv e^{i\alpha}$ corrisponde a una “soluzione di Kolmogorov” (30.16) esatta.

La necessità del termine $\gamma_k(\alpha)$ e la sua dipendenza da α appare solo per imporre che (30.16) annulli $\dot{\varphi}_k$ nella (30.18) *anche per i valori estremi di k* : si può dunque dire che l' equazione *GOY* ha una simmetria che si manifesta attraverso il fatto che l' esistenza di una famiglia a un parametro di punti fissi è solo impedita dalle “condizioni al contorno”.

Cioè dal fatto che, data l' equazione, si deve immaginare che γ_k sia fissato, e quindi α sia fissato, dovendosi scegliere l' equazione che si vuol studiare una volta per tutte. Ci si può domandare se nel limite in cui $\nu \rightarrow 0$ (e quindi $n_\nu \rightarrow \infty$) la simmetria si *restauri* almeno nel senso che esistono soluzioni esatte di (30.16) aventi la forma $e^{i\alpha'}$ per ogni α' almeno per $1 \ll n \ll n_\nu$.

Dai risultati di [BPPV] emerge evidenza sia sperimentale che teorica che in realtà la *simmetria* di rotazione del parametro α sia rotta spontaneamente e *non* venga restaurata neppure nel limite $\nu \rightarrow 0$: precisamente sull' insieme attraente della (30.6) la statistica è determinata dalla (30.18) con $\alpha = \pi/2$. E la statistica della (30.18) con $\alpha \neq \pi/2$ è *anche* identica alla statistica della (30.6) con $\alpha = \pi/2$.

Se si assumono queste proprietà si può poi notare che la (30.18) con $\alpha = \pi/2$ è *universale*: non dipende più da alcun parametro. È quindi tautologico dire che, se è vero che le soluzioni della (30.6) hanno la proprietà che esiste una scala k'_ν al di sopra della quale “nulla di interessante accade”, sì da poter rimpiazzare le (30.6) con le stesse equazioni troncate a n'_ν , dipendente da g (che definisce un opportuno valore di ε), allora la statistica del moto sarà universale e determinata dalla statistica della (30.18).

Ponendo $\alpha = \pi/2$ la statistica SRB del campo u è legata a quella della soluzione di (30.18) dalla relazione:

$$u_n(t) = 2i \varepsilon^{1/3} k_n^{-1/3} \varphi_{n_\nu - n}(t k_{n_\nu}^{2/3} \varepsilon^{1/3}) \quad (30.19)$$

e $\varphi_k(t)$ è distribuito secondo la statistica SRB della equazione (30.18).

Se la soluzione $\varphi_k \equiv 1$ della (30.18) fosse stabile si avrebbe la validità esatta della legge 5/3 di Kolmogorov e la statistica $\mu(du)$ dovrebbe essere una delta di Dirac concentrata su u dato dalla (30.19) con $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Conviene allora esaminare la questione della stabilità, ponendo $\varphi_k = \rho_k e^{i\vartheta_k}$ e scrivendo l'equazione per ρ_k, ϑ_k e linearizzandole vicino alla soluzione stazionaria $\varphi_k \equiv i$. Le equazioni per ρ_k, ϑ_k sono:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_k + 2^{-2k} \rho_k &= -2^{-3k/2} (\rho_{k-2} \rho_{k-1} \cos \Delta_{k-2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho_{k-1} \rho_{k+1} \cos \Delta_{k-1} - \frac{1}{2} \rho_{k+1} \rho_{k+2} \cos \Delta_k) + r_k \\ \dot{\vartheta}_k + 2^{-2k} \vartheta_k &= 2^{-3k/2} \rho_k^{-1} (\rho_{k-2} \rho_{k-1} \sin \Delta_{k-2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho_{k-1} \rho_{k+1} \sin \Delta_{k-1} - \frac{1}{2} \rho_{k+1} \rho_{k+2} \sin \Delta_k) + s_k \end{aligned} \quad (30.20)$$

e $\Delta_k \equiv \vartheta_k + \vartheta_{k+1} + \vartheta_{k+2}$ e r_k, s_k sono tali che $\rho_k \equiv 1$ e $\vartheta_k \equiv \pi/2$ sia una soluzione stazionaria esatta.

La linearizzazione della (30.20) attorno alla soluzione stazionaria esatta fornisce le seguenti equazioni per η_k, δ_k ottenute ponendo $\Delta_k = 3\pi/2 + \delta_k$ e $\rho_k = 1 + \eta_k$ e sviluppando in serie degli incrementi:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_k + 2^{-2k} \eta_k &= -2^{-3k/2} (\eta_{k-2} + \frac{1}{2} \eta_{k-1} - \eta_{k+1} - \frac{1}{2} \eta_{k+2}) \\ \dot{\delta}_k &= +2^{-3k/2} (\delta_{k-2} + \frac{1}{2} \delta_{k-1} - \delta_{k+1} - \frac{1}{2} \delta_{k+2}) \end{aligned} \quad (30.21)$$

la *particolarità* della scelta $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si vede notando che $\alpha = \pi/2$ è l'unica scelta di α in (30.18) tale che le equazioni linearizzate (30.21) per η e δ siano separate.

È facile constatare che la matrice M che definisce l'equazione per δ è una matrice a traccia nulla, reale: e quindi deve avere alcuni autovalori a parte reale positiva a meno che non siano tutti puramente immaginari. Ma la matrice M è il prodotto di una matrice diagonale per una matrice di Toeplitz ed è facile vedere che ammette autovalori a parte reale non nulla, *c.f.r.* [BPPV].

Se ne deduce l'*instabilità della soluzione di Kolmogorov* per il modello GOY e si pone il problema di cercare di capire come sia fatto l'insieme attraente e quale sia la statistica corrispondente.

La matrice $M'_{kk'}$ che definisce l'equazione di stabilità per le η_k è diversa dalla $-M_{kk'}$ per l'aggiunta di un termine diagonale $2^{-2k} \delta_{kk'}$. Si può vedere che questa matrice M' ha tutti gli autovalori a parte reale negativa. Nasce quindi l'idea che l'insieme attraente per (30.18) possa essere tale che su di esso le $\rho_k = (1 + \eta_k)$ si possano esprimere in funzione delle Δ_k . È naturale pensare, [BPPV], che nel dominio inerziale la relazione che esprime le ρ in termini delle Δ sia essenzialmente la condizione di

annullamento del termine in parentesi a fattore di $2^{-2k/3}$ nella prima delle (30.20). Scriveremo questa condizione come:

$$30.22 \quad \rho_{k+1} = \rho_k e^{F(\Delta_{k+1}, \Delta_k, \Delta_{k-1}, \rho_k, \rho_{k-2}, \rho_{k-3})} \quad (30.22)$$

Invece sulle Δ_k (o le δ_k) l'instabilità non permette di dire altro che queste variabili avranno probabilmente una distribuzione casuale su un intervallo attorno a $3\pi/2$ (o, rispettivamente, attorno a 0).

In tal caso l'insieme attraente, quale luogo geometrico nello spazio delle (η, δ) , avrebbe le (30.22) come equazione e se i parametri Δ_k avessero una distribuzione indipendente allora l'insieme attraente avrebbe dimensione n_ν (ossia metà della dimensione $2n_\nu$ dello spazio delle fasi). Inoltre le (30.22) mostrano che le variabili ρ_k hanno una statistica che è ben descritta da un processo aleatorio a corta memoria.

Questo spiega il perchè la violazione della legge di Kolmogorov dovuta all'instabilità della soluzione $\varphi_k \equiv i$ conduce ad una distribuzione multifrattale della u_n .

Per chiarire il meccanismo di quest'ultima proprietà si consideri il caso semplice in cui le Δ_k siano davvero indipendentemente distribuite e che la relazione (30.22) sia sostituita da relazione come $\rho_{k+1} = \rho_k \exp f(\Delta_k)$ e che la distribuzione di ciascuna Δ_k sia $\pi(\Delta)d\Delta$, con una funzione densità π opportuna. Allora in quest'ipotesi⁶

$$30.23 \quad |u_n| = 2k_n^{-1/3} \varepsilon^{1/3} \rho_n = 2\rho_1 k_n^{-1/3} \varepsilon^{1/3} e^{\sum_{j=1}^{n-1} f(\Delta_j)} \quad (30.23)$$

e quindi:

$$30.24 \quad \frac{\langle |u_n|^p \rangle}{\langle |u_1|^p \rangle} = 2^{-np/3} \int \prod_{j=1}^{n-1} \pi(\Delta_j) e^{p \sum_j f(\Delta_j)} d\Delta_j \quad (30.24)$$

Dunque se un singolo integrale è scritto come $e^{G(p)} \equiv \int \pi(x) dx e^{pf(x)}$ si vede, posto $l_n = k_n^{-1}$ e scrivendo $e^{nG} = 2^{nG/\log 2} = \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^{G/\log 2}$, che:

$$30.25 \quad \frac{\langle |u_n|^p \rangle}{\langle |u_1|^p \rangle} = \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^{p/3 - G(p)/\log 2} \rightarrow \zeta_p = \frac{1}{3}p - \frac{G(p)}{\log 2} \quad (30.25)$$

e così si vede un meccanismo concreto che può dar luogo ad una distribuzione multifrattale, *c.f.r.* [BPPV].

L'applicazione al modello GOY del metodo dell'integrazione funzionale del §28 è pure promettente, ma non è stata ancora ben considerata nella letteratura. Si deve osservare che ora si può applicare il metodo in una versione un pò diversa: e cioè all'equazione *universale* (30.18). In tal modo

⁶ A carattere illustrativo perchè non è evidentemente il caso in (30.22) ove le variabili $\Delta_{j-1}, \Delta_j, \Delta_{j+1}$ si influenzano a vicenda. Tuttavia questa dipendenza cambia le variabili Δ_j da "bernoulliane" a "markoviane" e uó essere ugualmente trattato a prezzo di qualche complicazione minore.

il problema di teoria dei campi che si viene a considerare è un problema di scale decrescenti da 1 a 0, cioè è un problema “infrarosso”, invece che un problema ultravioletto (come nel §28, e come sarebbe anche nel caso presente se si procedesse esattamente allo stesso modo seguito al §28). Ma non è questo il luogo per addentrarsi in un problema ancora così poco considerato.

Problemi

[1] Si studi la stabilità della soluzione “laminare” $u_n = \frac{g}{\nu k_n^2} \delta_{nn_0}$ della (30.6) con $n_0 = 1$ e si mostri che diviene instabile per ν abbastanza piccolo.

[2] Come [1] per la (30.7).

[3] Si dimostri che se $t \rightarrow \omega(t)$, $t \in [0, \infty)$, è un campione di un moto browniano allora $\langle |\omega(t) - \omega(t')|^{2p} \rangle = \langle |\omega(t) - \omega(t')|^2 \rangle^p = |t - t'|^p$ e quindi ζ_p in (30.13) è $\zeta_p = \frac{p}{2}$ (*Idea:* Per definizione nel moto browniano gli incrementi $\delta = \omega(t) - \omega(t')$ hanno una distribuzione gaussiana $e^{-\delta^2/2|t-t'|} d\delta / \sqrt{2\pi|t-t'|}$.)

Bibliografia: La discussione dell’insieme attraente nel modello GOY è tratta da [BPPV]; si veda [BJPV] per una discussione completa della teoria e dei risultati sperimentali sul modello GOY.

§31 Viscosità, reversibilità e dissipazione irreversibile.

Conviene ora riesaminare alcune questioni di natura fondamentale allo scopo di analizzare le possibili conseguenze del principio di Ruelle del §27.

(A): *Equazioni reversibili per fluidi dissipativi.*

Anzitutto si deve osservare che la deduzione delle equazioni NS esposta nel §1, §2 è stata basata sull'ipotesi empirica che ci fosse una forza viscosa contraria allo scorrimento di strati adiacenti di fluido (*c.f.r.* il tensore $\underline{\tau}'$ in (1.17)).

È difficile immaginare come la dinamica microscopica reversibile possa dar luogo ad una dinamica macroscopica in cui la simmetria per inversione temporale sia completamente assente. Ricordiamo che questa simmetria è definita come una trasformazione i dello spazio delle fasi in sé che *anticommuta* con l'evoluzione temporale.

Se si considera un'evoluzione temporale descritta da un'equazione differenziale di cui S_t sia l'operatore soluzione (sì che $t \rightarrow S_t x$ è dunque un moto, *c.f.r.* §23 Definizione 3) ovvero un'evoluzione discreta S (associata a osservazioni cadenzate, *c.f.r.* §22) la simmetria di inversione temporale i è tale che:

$$iS_t = S_{-t}i, \quad iS = S^{-1}i \quad (31.1)$$

rispettivamente.

Per comprendere come sia possibile che una dinamica microscopica reversibile sia compatibile con equazioni macroscopiche irreversibili (quali sono manifestamente le equazioni NS) si deve pensare che nel problema appaiano diverse scale di tempo e di spazio.

Le equazioni macroscopiche sono allora approssimazioni atte a descrivere proprietà su “grande scala spaziale” e “temporale” (a confronto delle scale atomiche ove tutto è reversibile) di soluzioni di equazioni reversibili. I fenomeni tipici della reversibilità (quali l'infinito ripetersi, o “ricorrenza”, di stati “impossibili”) dovrebbero sì manifestarsi ma su scale di tempo assai più lunghe o/e su scale di spazio assai più corte di quelle interessanti per la classe di moti considerati (che nei casi che trattiamo qui devono essere moti in cui il sistema possa considerarsi un continuo fluido).

Abbiamo già visto nel §3 e soprattutto nel §5 come le equazioni possano mutare aspetto se si è interessati a studiare proprietà che si manifestano in regimi particolari: ad esempio nella teoria delle equazioni di Rayleigh del §5 abbiamo visto che, nel regime di Rayleigh, le equazioni generali (2.1) si semplificano e divengono le (4.50) in cui la generazione di calore dovuta allo sfregamento viscoso fra strati di fluido (ultimo termine in (4.42)) è assente, *c.f.r.* la terza delle (4.50) o il commento I precedente (4.44).

Questo non significa che lo sfregamento non generi calore. Significa solo, come risulta dall'analisi del §5, che sulle scale di tempo in cui la (4.50) può essere considerata una buona approssimazione (*c.f.r.* (4.48)) la quantità di calore generata è *trascurabile*.

Lo stesso meccanismo è, o almeno si crede che sia, alla base della stessa deduzione delle equazioni (2.1) dalla dinamica atomica, [EM].

Questo fa immediatamente capire che i coefficienti fenomenologici di viscosità o conducibilità termica debbano poter essere espressi in termini di *medie* sul tempo e sullo spazio di quantità microscopiche (come è ben noto nella teoria cinetica elementare, *c.f.r.* problemi [4],[5] del §1) più o meno rapidamente fluttuanti.

Se ne deduce che i coefficienti di trasporto (come la viscosità o la conducibilità o altri) *non hanno natura fondamentale* e sono da pensarsi piuttosto come manifestazioni macroscopiche del disordine a livello molecolare.

Ma allora potrebbe essere possibile descrivere in modo diverso gli stessi sistemi, bastando sostituire i coefficienti macroscopici con quantità che variano nel tempo o nello spazio ma abbastanza rapidamente da poter essere confuse (almeno su opportune scale di tempo e di spazio) con i loro valori medi. Le equazioni così ottenute sarebbero allora equivalenti alle precedenti.

Ovviamente non ci si deve illudere e *non ci si può aspettare* che modificando le equazioni (2.1) in equazioni in cui varie costanti sono sostituite da quantità variabili si ottengano equazioni più semplici o più facili da studiare (al contrario).

Ma ci si può aspettare che la condizione che equazioni che dovrebbero descrivere gli stessi fenomeni diano effettivamente gli stessi risultati porti a *relazioni non banali* fra proprietà delle soluzioni (delle une e delle altre).

Questo è un fenomeno assai familiare in Meccanica Statistica dell'equilibrio. In essa si può pensare di descrivere un gas in equilibrio ad una certa temperatura come un gas chiuso in un contenitore adiabatico a pareti perfette ovvero come racchiuso in un termostato alla stessa temperatura.

Le due situazioni sono descritte rispettivamente dalla distribuzione microcanonica e da quella canonica. Tali distribuzioni sono *diverse*: ad esempio l'una è concentrata su una superficie di energia data e l'altra su tutto lo spazio delle fasi. Nulla di più diverso, essendo le superfici di energia costante superfici a volume nullo.

Tuttavia i fenomeni fisici previsti nelle due descrizioni devono essere gli stessi: è ben noto che da questo Boltzmann trasse il *teorema del calore*, [Bo84],[G6] p. 205,[G8], ossia una dimostrazione del secondo principio della termodinamica. Oltre che la teoria generale degli *insiemi statistici*.

Quindi il fornire descrizioni diverse dello stesso sistema è non solo possibile ma addirittura può condurre a leggi e deduzioni che sarebbero impossibili (o almeno difficili) se ci si limitasse a considerare una sola descrizione del sistema.

Quanto ora detto non è stato mai applicato alla meccanica dei fluidi, sebbene ormai ci siano molte deduzioni di equazioni macroscopiche irreversibili a partire da dinamiche microscopiche reversibili, a partire da quella di Lanford per l'equazione di Boltzmann, [Ln]. In quanto segue mi propongo di far vedere che il punto di vista su formulato è almeno assai promettente anche nella teoria dei fluidi.

È ben noto che Boltzmann fu trascinato in polemiche, [Bo97], anche animate, per difendere la sua teoria dell'irreversibilità. Il suo punto fu che si dovesse fare una distinzione fra reversibilità del moto e irreversibilità dei fenomeni che lo accompagnano.

I lavori di Sinai sui sistemi di Anosov, *c.f.r.* [S], [R2], mostrano come non sia necessario avere a che fare con sistemi di moltissime particelle, ai quali faceva sempre riferimento Boltzmann, per mettere in evidenza questa distinzione. Sistemi con pochi gradi di libertà, addirittura 2 gradi di libertà, sono sufficienti e mostrano fenomeni irreversibili pur essendo animati da una dinamica reversibile. Questo fenomeno è stato riscoperto empiricamente (molto dopo i lavori di SRB) da parte di fisici sperimentali che lo hanno salutato come la “soluzione del paradosso di Loschmidt”, [HHP], [Ho99], vedendo bene la relazione con la polemica boltzmaniana (senza forse rendersi conto che, almeno nel caso di Boltzmann, la questione era stata già risolta e proprio negli stessi termini da Boltzmann stesso, in articoli che pochi hanno apprezzato, [Bo84], [Bo97], [Le93]).

Tenendo dunque presenti le considerazioni su esposte immaginerò altre equazioni che dovrebbero essere “equivalenti” all'equazione di Navier–Stokes incomprimibile (in un contenitore Ω con condizioni periodiche). Si osservi che un fluido forzato ha un'energia media e una dissipazione media che rapidamente si pongono a fluttuare intorno ad un valore medio che dipende solo dalla forzante agente (semplifico qui un pò, per evitare banali diversioni necessarie per tener conto di situazioni in cui ci sono importanti fenomeni di *isteresi*, ossia vari insiemi attraenti).

In situazioni in cui la viscosità è piccola (ossia il numero di Reynolds è grande) la teoria K41, *c.f.r.* §29, suggerisce che il fluido si muova essenzialmente soggetto alle equazioni di Eulero (con viscosità dunque nulla) ma *con dissipazione di energia* costante nel tempo. Il tasso di dissipazione di energia in un fluido incomprimibile di Navier–Stokes[®] è:

$$\eta = \nu \int_{\Omega} (\underline{\partial} \wedge \underline{u})^2 dx \quad (31.2)$$

Si noti che questa è la quantità chiamata ε nel §29.

Il modo in cui questa dissipazione avviene non è propriamente descritto dall'equazione di Eulero perchè essa dovrebbe essere combinata con l'equazione di stato e quella di conservazione dell'energia per descrivere meglio quanto accade, *c.f.r.* (2.1). Ma anche così la descrizione non sarebbe completa perchè non verrebbe descritto il vero fenomeno della produzione di calore per sfregamento che è descritto bene solo da un punto di vista realmente microscopico, *c.f.r.* i problemi del §1.

Se allora effettivamente la sola differenza fra le equazioni di Eulero e quella di NS a bassa viscosità è l'esistenza di dissipazione possiamo immaginare un'altra equazione che ha le stesse proprietà. E cioè l'equazione di Eulero con l'aggiunta di una forza che esegua lavoro sul sistema ma in modo da assorbire una quantità costante di energia per unità di tempo.

[®] In cui (31.2) è uguale a $\frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (\underline{\partial} \underline{u} + \underline{\partial} \underline{u})^2 dx$, *c.f.r.* (2.7).

È interessante che già Gauss si pose il problema di quale sia la forza *minima* necessaria per imporre un vincolo (che fosse *olonomo* o *anolonomo*). Il principio di Gauss, *c.f.r.* problemi, applicato ad un fluido ideale soggetto al vincolo di dissipare energia a tasso costante conduce alle seguenti equazioni:

$$31.3 \quad \underline{\dot{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} + \alpha \Delta \underline{u}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0 \quad (31.3)$$

ove α non è la viscosità ma piuttosto è il moltiplicatore necessario a imporre il vincolo che (31.2) sia una costante del moto per l'equazione (31.3). Un semplice calcolo dá:

$$31.4 \quad \alpha(\underline{u}) = \frac{\int (\underline{\partial} \wedge \underline{g} \cdot \underline{\omega} + \underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \cdot \underline{\partial} \underline{u})) d\underline{x}}{\int (\underline{\partial} \wedge \underline{\omega})^2 d\underline{x}} \quad (31.4)$$

L'idea che viene suggerita dall'analisi finora svolta è proprio che l'equazione (31.3), (31.4) sia *equivalente* all'equazione di NS. Questo significa che se le soluzioni dell'equazione di NS con data viscosità e forza forzante ammettono un insieme attraente sul quale la dissipazione di energia è η e se si fissa il secondo membro della (31.2) uguale a η mediante un vincolo gaussiano del tipo descritto in (31.3) e (31.4) allora i valori medi delle osservabili risultano gli stessi sia rispetto alla statistica dei moti sull'insieme attraente per le equazioni di NS che per le equazioni (31.3) e (31.4). Tale identità è approssimata se il numero di Reynolds, cioè l'intensità della forzante, è finito ma diviene sempre più esatta a crescere di R .

Chiameremo le (31.3) e (31.4) *equazioni GNS*, o *equazioni gaussiane di Navier-Stokes*. E la congettura ora esposta è, formalmente:

Congettura: Si considerino le equazioni GNS (31.3), (31.4) con dato iniziale in cui la quantità η in (31.2) è fissata uguale al valor medio della stessa quantità rispetto alla distribuzione SRB, che denotiamo $\mu_{\nu,ns}$, per le equazioni NS con viscosità ν . Sia $\mu_{\eta,gns}$ la distribuzione SRB per le equazioni GNS così definite.

(1) Allora le distribuzioni $\mu_{\nu,ns}$ e $\mu_{\eta,gns}$ assegnano, nel limite in cui il numero di Reynolds tende all'infinito, valori uguali alle stesse osservabili che sono "locali" negli impulsi, ossia che dipendono solo dalle componenti di Fourier del campo $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ con \underline{k} in un intervallo finito di valori di $|\underline{k}|$.

(2) In tali condizioni $\langle \alpha \rangle_{\eta,gns} = \nu$, se $\langle \cdot \rangle_{\eta,gns}$ e $\langle \cdot \rangle_{\nu,ns}$ denotano i valori medi rispetto a $\mu_{\eta,gns}$ e $\mu_{\nu,ns}$ rispettivamente.

Osservazioni:

(1) Questa congettura, [G10], propone dunque che ai fini dei calcoli dei valori medi le equazioni NS e GNS siano *equivalenti* purchè i parametri liberi nelle due equazioni siano scelti in modo conveniente.

(2) Non sfuggirà al lettore che la corrispondenza descritta è assai analoga all'equivalenza così familiare in Meccanica Statistica fra gli insiemi statistici che descrivono l'equilibrio di uno stesso sistema, [G6], [G7], [G8].

(3) Si vede quindi come questa congettura esprima che diverse equazioni possono descrivere gli stessi fenomeni: e in particolare l'equazione *reversibile* GNS e quella, molto meglio nota e *irreversibile*, NS descrivono lo stesso fenomeno fisico.

(B) *Reversibilità microscopica e reversibilità macroscopica.*

Ci si domanda allora come sia possibile questa doppia natura reversibile e irreversibile dei fenomeni in questione.

Il punto cruciale da notare è *che non v'è alcuna relazione fra irreversibilità nel senso comune della parola e reversibilità delle equazioni che descrivono i moti.*

Questo può a prima vista apparire paradossale: ma si tratta di proprietà che sostanzialmente sono già ben chiare a chi studi anche superficialmente la polemica fra Boltzmann e i suoi critici sull'irreversibilità, [Bo97],[G6],[G8].

Un sistema (M, S) reversibile, ossia tale che esista una isometria i dello spazio delle fasi M che anticommuta con l'evoluzione S , cioè tale che $iS = S^{-1}i$, in generale avrà insiemi attraenti A che potranno essere *non invarianti per inversione del tempo*: $iA \neq A$.

Il caso in cui gli insiemi A ed iA sono diversi è più chiaro e lo discutiamo per primo tenendo presente che è un caso che si presenta in sistemi che sono fortemente fuori dell'equilibrio. Infatti per sistemi in equilibrio si immagina, almeno nei sistemi per i quali il moto è caotico, che l'insieme attraente i moti sia l'intero spazio delle fasi: e questo resta vero anche se il sistema è sottoposto a piccole forze esterne che lo mantengono fuori dell'equilibrio, (è la *stabilità strutturale* dei moti caotici, c.f.r. §27).

Supponiamo, per semplicità, che il sistema ammetta un unico insieme attraente. Allora l'insieme iA è un *insieme repulsore*, cioè è insieme attraente per il moto *a ritroso nel tempo* descritto da S^{-1} .

I moti nel bacino di attrazione di A si svolgono dopo un transiente iniziale essenzialmente sull'insieme attraente A e quindi *non hanno più simmetria rispetto all'inversione del tempo.*

Strettamente parlando tali moti si avvicinano con rapidità esponenziale, nel tempo che corre, all'insieme attraente senza mai andarvi davvero sopra. Se si potesse davvero distinguere il punto che evolve da un punto ad esso vicino ma situato esattamente sull'insieme attraente allora, procedendo a ritroso nel tempo, si tornerebbe indietro e alla fine ci si avvicinerebbe con rapidità esponenziale a iA , che è appunto un insieme repulsore, e dunque un insieme attraente per i moti che si svolgono a ritroso nel tempo.

Ma l'invarianza per inversione del tempo *non si riferisce alla differenza fra questi moti* seguiti a ritroso nel tempo, bensì dice "solo" che se si invertissero tutte le velocità dei punti del sistema (tale è l'effetto della trasformazione i in gran parte dei casi) allora il sistema percorrerebbe una traiettoria che nello spazio delle configurazioni coincide *al crescere del tempo* con quella percorsa fino al momento dell'inversione, e nelle velocità ha velocità sistematicamente opposte a quelle precedentemente assunte nelle stesse posizioni.

Dunque applicando la trasformazione di inversione del tempo ad uno

stato x del sistema assai vicino ad A si trova uno stato ix assai vicino a iA e dunque “atipico” (ad esempio in un sistema fuori dell’ equilibrio a causa di un campo elettrico un tale stato avrebbe una corrente opposta al campo): ma procedendo nel moto, al crescere del tempo n , *anche* tale stato $S^n ix$ si avvicina *di nuovo* ad A , molto rapidamente e quindi lo stato ix di partenza apparirebbe come una fluttuazione atipica.

Questo *non accadrebbe* se invece di considerare uno stato x assai vicino ad A se ne considerasse uno *esattamente* su A : lo stato ix sarebbe esattamente su iA e allora, *procedendo nel tempo sia verso il futuro che verso il passato*, questo punto si muoverebbe su iA senza mai lasciarlo. E questa evoluzione, *anomala per un osservatore ignaro della particolarità dello stato iniziale*, proseguirebbe indefinitamente.

Un osservatore potrebbe dire che il sistema si comporta in modo irreversibile in quanto a partire da una configurazione x raggiunge asintoticamente uno stato stazionario μ sempre uguale e indipendente dallo stato iniziale (con μ_0 -probabilità 1) e *lo stesso* per x e ix . Inoltre procedendo a ritroso nel tempo il sistema raggiunge *invece* (sempre con μ_0 -probabilità 1) uno stato stazionario μ_- , ancora *lo stesso* per x e ix , diverso (anche se “isomorfo” allo stato μ , cioè trasformabile in esso via la trasformazione i).

Partendo invece da un dato iniziale scelto a caso su A con statistica μ si genera un moto che sia verso il futuro che verso il passato ha la stessa statistica μ : ossia partendo da un dato tipico dello stato stazionario e procedendo a ritroso *non c’ è modo di raggiungere* stati non tipici dello stato stazionario (quali gli stati vicini all’ insieme repulsore iA). Anche quando (ed è la regola in molti casi) la costruzione dello stato μ è stata fatta a partire da uno stato iniziale assai atipico: ad esempio vicino a iA (ma *non su* iA).

La questione è, come si vede, piuttosto delicata: l’ irreversibilità macroscopica è la manifestazione dell’ esistenza di un insieme attraente $A \neq iA$ mentre la reversibilità microscopica implica solo che ad ogni insieme attraente deve corrispondere un repulsore che ne è una sostanziale copia. Questo fa sì che salvo un transiente iniziale le proprietà dei moti verso il futuro siano le stesse di quelle verso il passato (a meno che non si riesca a scegliere il dato iniziale *esattamente* sugli insiemi di probabilità nulla A o iA).

Ma se si fosse in grado di misurare e fissare esattamente tutte le coordinate del sistema il tempo transiente potrebbe essere reso lungo quanto si vuole: basterebbe invertire esattamente tutte le velocità ad un dato istante e il moto di un sistema che è stato osservato come assolutamente “normale” per un tempo prefissato T si svolgerebbe *in modo ora assolutamente strano* a ritroso per lo stesso tempo T : e poi, almeno se i dati iniziali erano stati scelti a caso con una distribuzione μ_0 proporzionale al volume dello spazio delle fasi, procederebbe di nuovo in modo normale *e per sempre*.

Quanto detto sembrerebbe dare luogo a problemi nel caso in cui l’ insieme attraente A fosse tutto lo spazio (accessibile compatibilmente con il valore iniziale delle eventuali costanti del moto) e quindi coincidesse con iA come accade nei sistemi di particelle in equilibrio termodinamico o poco discosti

da questo.

In realtà non è così perchè ad un attento esame, che l'insieme attraente A sia uguale o diverso da iA , risulterà che, ovviamente, non tutti i punti di A sono ugualmente probabili rispetto alla statistica μ su A .

Abbiamo visto al §25 che la statistica SRB "in un certo senso" è concentrata sui moti più stabili: la (25.8) dice invero che, se il sistema si "approssima" con l'insieme dei suoi moti periodici di periodo n con n molto grande, allora il peso statistico, ai fini delle medie SRB, dei moti periodici è inversamente proporzionale alla "instabilità" dei medesimi, ossia al prodotto degli autovalori più grandi di 1 della matrice di stabilità del moto periodico (c.f.r. il fattore $\Lambda_e(x)^{-1}$ nella (25.8)).

Dunque anche se è vero che $A = iA$ resta tuttavia possibile che le proprietà dei moti verso il futuro siano per tempi transienti anche assai lunghi diverse da quelle medie e questo si vede nel comportamento delle fluttuazioni ed è in sostanza l'unica forma in cui si manifesta l'irreversibilità nei sistemi in equilibrio.

Che dire allora dei casi in cui $A = iA$ ma il sistema non è in equilibrio? (si pensi ad un gas di particelle cariche soggetto ad un campo elettrico debole).

(C) *Attrattori e insiemi attrattivi.*

In realtà è la nozione di insieme attraente, come insieme chiuso cui i moti inizialmente vicini si avvicinano sempre più, non è adeguata a descrivere quanto avviene perchè è troppo rozza.

Al §27 abbiamo introdotto la distinzione fra insieme attrattente e attrattore per i dati scelti a caso con distribuzione μ_0 dotata di densità rispetto alla misura di volume sullo spazio delle fasi, definendo (ricordiamo):

Definizione: Dato il sistema dinamico (M, S) un attrattore per i moti con dati iniziali scelti in un intorno di un insieme attraente A con una distribuzione assolutamente continua rispetto al volume μ_0 è un qualunque insieme invariante $A_0 \subset A$ di probabilità 1 rispetto alla statistica μ di questi moti e di dimensione di Hausdorff minima. Il valore di questa dimensione è la dimensione d'informazione dell'attrattore (o di (M, S)) su A .

Questa è una nozione assai più precisa e permette di distinguere A_0 da iA_0 anche quando le chiusure A ed iA di questi insiemi siano le stesse. Consente inoltre di definire la dimensione dell'attrattore in A in modo naturale, e non banale neppure quando l' A è denso in tutto lo spazio delle fasi.

Ad esempio nei sistemi conservativi è di solito vero che l'insieme attraente sia tutta la superficie di data energia ("ipotesi ergodica"). E in tali casi avviene anche che esiste, per i dati scelti a caso con una distribuzione proporzionale alla misura di Liouville μ_0 , un solo insieme attraente per il moto verso il futuro e uno solo, lo stesso, per quello verso il passato.

Forzando questi sistemi, ma fornendo anche un qualche meccanismo di dissipazione che consenta loro di mantenere costante (o almeno limitata) l'

energia e quindi di raggiungere uno stato stazionario, si ottengono sistemi che ancora hanno tutto lo spazio delle fasi come *insieme attraente* almeno se la forza non è molto grande (stabilità strutturale dei moti caotici): ma questa volta gli *attrattori* per il moto verso il futuro e quello verso il passato saranno diversi.

Nel senso che si potranno trovare due insiemi A_0 e A'_0 ai quali le statistiche SRB μ_+ e μ_- per i moti verso il futuro e quelli verso il passato attribuiscono probabilità $\mu_+(A_0) = 1 = \mu_-(A'_0)$ e $\mu_+(A'_0) = \mu_-(A_0) = 0$.

E la distinzione fra reversibilità microscopica e irreversibilità macroscopica sopra discussa può essere ripresa e resta sostanzialmente inalterata. *Così anche la discussione fatta al punto (B) può essere essenzialmente ripetuta facendo giocare a A_0 e A'_0 il ruolo prima svolto da A e iA .* Si vede dunque che la reversibilità microscopica e la irreversibilità macroscopica sono ben compatibili.

Nei casi di forte non equilibrio ci si aspetta (come detto sopra) che gli insiemi attraenti per i moti verso il futuro e verso il passato siano differenti: questo si può interpretare come una *rottura spontanea* della simmetria per inversione temporale e, come discusso in (B), dà luogo a una versione semplice del meccanismo che mostra la compatibilità fra reversibilità microscopica e irreversibilità macroscopica, meccanismo che come abbiamo visto è più riposto nel caso dell'equilibrio (a causa della coincidenza delle chiusure dell'attrattore e del repulsore).

Volendo, per concludere la discussione, applicare quanto detto al caso ben noto dell'espansione di un gas in un contenitore (perfetto) del quale occupa inizialmente solo una metà si possono distinguere i casi in cui l'espansione è adiabatica da quello in cui l'espansione è isoterma perchè il sistema è in contatto termico con una riserva di calore che ne mantiene fissa la temperatura (cioè l'energia cinetica media).

Nel primo caso il sistema è hamiltoniano ed evolverà verso un attrattore A_0 che è denso su tutta la superficie di energia E costante (con E uguale all'energia iniziale del gas) e, nella statistica μ del moto, lo stato iniziale apparirà come una fluttuazione assai rara. Nell'altro caso invece l'attrattore sarà determinato dal meccanismo microscopico d'interazione fra gas e termostato e dall'equazione di stato del gas (e apparirà come una regione di volume non nullo nello spazio delle fasi ed energia in media costante e uguale ad un valore determinato dalla temperatura della riserva di calore).

In questo caso l'attrattore sarà ancora simmetrico rispetto all'inversione temporale e denso sull'insieme attraente; lo stato iniziale apparirà ancora come una fluttuazione rara.

Se ora il gas si immagina fatto di particelle cariche e su di esso agisce un campo elettrico non conservativo (ossia una forza elettromotrice) il sistema raggiungerà uno stato stazionario solo in presenza di un meccanismo d'interazione con un termostato o con corpi esterni che assorbano l'energia prodotta dal lavoro del campo. Se il campo è diverso da zero gli *attrattori* A_0 e $A'_0 = iA_0$ *divengono diversi* e di volume nullo nello spazio delle fasi; e se il campo è sufficientemente forte allora avverrà, o potrà avvenire, che *addirittura* l'insieme attraente A , chiusura di A_0 , diviene più piccolo (e di

volume nullo) di tutto lo spazio delle fasi e diverso da A' , chiusura di A'_0 .

Problemi

[1] Sia $\varphi(\underline{\dot{x}}, \underline{x}) = 0$, $\underline{x} = \{\underline{x}_j, \underline{x}_j\}$ un vincolo generale anolonomo per un sistema meccanico. Sia $\underline{R}(\underline{\dot{x}}, \underline{x})$ la reazione vincolare e $\underline{F}(\underline{\dot{x}}, \underline{x})$ la forza attiva. Si considerino tutte le possibili accelerazioni compatibili con i vincoli se il sistema si trova nello stato $\underline{\dot{x}}, \underline{x}$. Si dice che \underline{R} è *ideale* o *verifica il principio del minimo sforzo* se la accelerazione effettiva dovuta alle forze $\underline{a}_i = \frac{1}{m_i}(\underline{F}_i + \underline{R}_i)$ minimizza lo *sforzo*: $\sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} \underline{R}_i^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} (\underline{F}_i - m_i \underline{a}_i)^2$ e cioè:

$$\sum_{i=1}^N (\underline{F}_i - m_i \underline{a}_i) \cdot \delta \underline{a}_i = 0$$

per tutte le possibili variazioni delle accelerazioni $\delta \underline{a}_i$ compatibili con i vincoli φ . Si faccia vedere che le possibili accelerazioni, nella configurazione $\underline{\dot{x}}, \underline{x}$, sono quelle tali che: $\sum_{i=1}^N \partial_{\underline{\dot{x}}_i} \varphi(\underline{\dot{x}}, \underline{x}) \cdot \delta \underline{a}_i = 0$.

[2] Si faccia vedere che, grazie alle osservazioni in [1], la condizione di minimi sforzo diventa:

$$\underline{F}_i - m_i \underline{a}_i - \alpha \partial_{\underline{\dot{x}}_i} \varphi(\underline{\dot{x}}, \underline{x}) = \underline{0}$$

con α tale che $\frac{d}{dt} \varphi(\underline{\dot{x}}, \underline{x}) = 0$, cioè è:

$$\frac{\sum_i (\underline{\dot{x}}_i \cdot \partial_{\underline{\dot{x}}_i} \varphi + \frac{1}{m_i} \underline{F}_i \cdot \partial_{\underline{\dot{x}}_i} \varphi)}{\sum_i m_i^{-1} (\partial_{\underline{\dot{x}}_i} \varphi)^2}$$

che è l'espressione analitica del principio di Gauss, *c.f.r.* [LA].

[3] Si verifichi che se i vincoli sono olonomi allora il principio di Gauss si riduce al principio di D'Alembert. (*Idea*: Si noti che le velocità permesse dal vincolo olonomo $\varphi(\underline{x}) = 0$ sono $\underline{\dot{x}} \cdot \partial \varphi(\underline{x}) = 0$ e quindi un vincolo olonomo può essere pensato come un vincolo anolonomo avente la forma speciale: $\underline{\dot{x}} \cdot \partial \varphi(\underline{x}) = 0$.)

[4] Si consideri un sistema di N particelle soggette ad una forza conservativa di energia potenziale V . Sia W l'energia potenziale di una seconda forza. Si consideri il sistema di punti soggetto alla forza $\underline{f} = -\partial V - 2\partial W$ e al vincolo gaussiano $T + V = \text{cost}$ (ove T è l'energia cinetica $T = \frac{1}{2m} \sum_i \underline{p}_i^2$). Si verifichi che le equazioni del moto sono (per [3]):

$$m \underline{\dot{x}}_i = \underline{p}_i, \quad \underline{\dot{p}}_i = -\partial_{\underline{q}_i} V - 2\partial_{\underline{q}_i} W - \alpha \underline{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} \underline{F}_i, \quad \alpha = -\frac{2 \sum_i \partial_{\underline{q}_i} W \cdot \underline{p}_i}{\sum_i \underline{p}_i^2}$$

Si dimostri che la distribuzione di probabilità sullo spazio delle fasi di densità: $\rho(\underline{p}, \underline{q}) = r(T + V) e^{-\lambda W(\underline{q})}$, qualsiasi sia la funzione r , è invariante se, definito ϑ come la quantità $3N \frac{1}{2} k_B \vartheta \stackrel{\text{def}}{=} T$, si ha $\lambda = \frac{3N-1}{3Nk_B \vartheta}$, [EM]. (*Idea*: l'equazione di continuità è invero $\partial_t \rho + \sum_i \partial_{\underline{p}_i} (\rho \underline{F}_i) + \sum_i \partial_{\underline{q}_i} (\rho \underline{p}_i / m) = 0$.)

[5] In generale se d è la dimensione dello spazio e $\underline{E} \underline{f} = -\partial V - 2\partial W$ e il vincolo è $T + V = \text{cost}$ si ha che la distribuzione $\rho = r(T + V) e^{-\lambda W}$ è invariante se $\lambda = \frac{dN-1}{2dNk_B \vartheta}$.

[6] Si deduca da [4] che si può ricercare lo stato di equilibrio del sistema hamiltoniano di hamiltoniana $T + V$ e temperatura ϑ ricercando la distribuzione invariante per l'equazione:

$$m \underline{\dot{x}}_i = \underline{p}_i, \quad \underline{\dot{p}}_i = -2\partial_{\underline{q}_i} V - \alpha \underline{p}_i, \quad \alpha = -\frac{2 \sum_i \partial_{\underline{q}_i} V \cdot \underline{p}_i}{2dNk_B \vartheta}$$

nel limite $N \rightarrow \infty$, $N/V = \text{cost}$ e con vincolo gaussiano $T = dN \frac{1}{2} k_B \vartheta$. (*Idea*: Si consideri il caso particolare in cui $V = 0$ e $W = 2V$).

Bibliografia: [GC1],[GC2],[G7],[G8],[G10],[LA],[EM].

§32 *Reversibilità. Assioma C. Ipotesi caotica.*

Per approfondire alcuni dei problemi posti nella discussione del §31 ci rifaremo, supponendolo *a priori*, al principio di Ruelle del §27.

(A) *La distribuzione SRB e altre distribuzioni invarianti.*

Si supponga che il sistema dinamico (M, S) sia un sistema con un insieme attrattante A che verifica l'assioma A (c.f.r. definizione 2, §24): si potranno allora descrivere i punti di A via la *dinamica simbolica* associata ad un pavimento markoviano \mathcal{P} , c.f.r. §27 (C).

Se il logaritmo del determinante $\Lambda_e(x)$ della matrice ∂S^n pensata come trasformazione agente sulla varietà instabile di $x \in A$ viene considerato come una funzione $\lambda_e(\underline{\sigma})$ della storia $\underline{\sigma}$ di x allora, poichè la funzione $\Lambda_e(x)$ è “regolare” (Hölder continua), la dipendenza di $\lambda_e(\underline{\sigma})$ dalle cifre “lontane” di $\underline{\sigma}$ è anch'essa esponenzialmente piccola.¹ E si potrà far uso dell'espressione (27.8) per la distribuzione SRB scritta in termini del codice $x = X(\underline{\sigma})$ fra punti e storie.

Se ϑ denota la traslazione a sinistra delle storie e se μ è la distribuzione SRB su A le (27.7), (27.8) danno la seguente espressione per μ :

$$32.1 \quad \int f(y) \mu(dy) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\sigma_{-N/2}, \dots, \sigma_{N/2}} e^{-\sum_{j=-N/2}^{N/2} \lambda_e(\vartheta^j \underline{\sigma})} f(X(\underline{\sigma}))}{\sum_{\sigma_{-N/2}, \dots, \sigma_{N/2}} e^{-\sum_{j=-N/2}^{N/2} \lambda_e(\vartheta^j \underline{\sigma})}} \quad (32.1)$$

ove $\underline{\sigma}$ è una successione infinita compatibile nel senso delle storie su pavimenti markoviani, c.f.r. §27, (C), ottenuta estendendo la stringa di cifre $\sigma_{-\frac{1}{2}N}, \dots, \sigma_{\frac{1}{2}N}$ in “modo standard”, c.f.r. §27, (D).

Allora è chiaro che se si sostituisce nella formula (32.1) la funzione $\lambda_e(\underline{\sigma})$ con una funzione *arbitraria* $\rho(\underline{\sigma})$ che dipenda poco dalle cifre σ_i con indice i grande (ad esempio che dipenda solo dalla cifra con indice 0) la nuova formula (32.1) definisce ancora una distribuzione invariante μ' su A ma che è in generale *completamente diversa dalla* μ .²

Proprio come le distribuzioni di probabilità di due schemi di Bernoulli diversi sono diverse anche se hanno lo stesso spazio degli stati: i loro attrattori consistono nelle successioni che hanno certe frequenze di apparizione di dati simboli ma tali frequenze sono *diverse* nei due casi e quindi gli attrattori sono insiemi *diversi e disgiunti*. Tuttavia entrambi gli attrattori

¹ Invero le cifre della storia $\underline{\sigma}$ determinano il punto x con rapidità esponenziale, ossia la distanza fra due punti le cui storie coincidono fra $-N$ e N tende a zero come $e^{-\lambda N}$, c.f.r. §27, e quindi i valori di $\lambda_e(\underline{\sigma})$ e $\lambda_e(\underline{\sigma}')$ differiscono per $O(e^{-\alpha \lambda N})$, se le successioni $\underline{\sigma}$ e $\underline{\sigma}'$ coincidono fra $-N$ e N e se α è l'esponente di Hölder continuità di $\Lambda_e(x)$.

² La (32.1), anche se così modificata, è interpretabile come la definizione del limite termodinamico di un modello di Ising unidimensionale con interazione a corta portata e quindi è un risultato ben noto: la tecnica per la dimostrazione è illustrata in dettaglio nei problemi [1]÷[16] del §27, c.f.r. [Ga81].

sono densi nello spazio di tutte le successioni³ e lo spazio di tutte le successioni è quindi l'insieme attraente per entrambi i casi, mentre gli attrattori sono diversi (e non hanno punti in comune).

Questo esempio fa ben apprezzare la differenza fra le due nozioni possibili di insieme attraente e attrattore. Fa inoltre ben vedere che in un sistema con un insieme attraente che verifica l'assioma A *oltre* alla distribuzione SRB ne esistono infinite altre sia molto diverse sia quasi uguali alla SRB nel senso che attribuiscono valori vicini a un numero finito qualsiasi di osservabili (le si ottengono modificando di poco le funzioni $\lambda_e(\underline{\sigma})$ in (32.1)).

(B) *Attrattori e reversibilità. Indistruttibilità della simmetria per inversione temporale.*

I sistemi dinamici reversibili possono avere, e in generale hanno, insiemi attraenti A diversi dagli insiemi (repulsivi) che si ottengono applicando loro la trasformazione di inversione temporale i .

Questo può essere interpretato, come già osservato al §31, quale fenomeno di *rottura spontanea di simmetria*: in tali casi si può pensare che lo spazio delle fasi sia precisamente l'insieme attraente A e ignorare, ai fini dello studio delle proprietà statistiche dei moti, i punti fuori di A . Limitandoci per semplicità al caso di un insieme attraente A che sia una superficie regolare, vediamo che per quel che riguarda le osservazioni su tempi lunghi (nel futuro) il sistema dinamico è *di fatto* il sistema (A, S) .

Ovviamente questo sistema *non è più reversibile* se l'inversione temporale viene eseguita con la trasformazione i (che addirittura *non* può essere pensata come una trasformazione di \overline{A} in se, perchè $iA \neq A$).

Vedremo però, in seguito, che i sistemi reversibili con insieme attraente che coincide con tutto lo spazio hanno proprietà estremamente interessanti: e dunque ci si può domandare se non si possa definire un'altra trasformazione $i^* : A \longleftrightarrow A$ che anticommuti con l'evoluzione ossia $i^*S = S^{-1}i^*$ lasciando invariante l'insieme attrattivo A .

Se fosse possibile, con qualche generalità, definire i^* si potrebbe dire che ancora il sistema dinamico è reversibile, sebbene la simmetria per inversione temporale sia ora i^* e non la i originale. Così, nella stessa generalità, i sistemi reversibili dotati di un insieme attrattivo potrebbero esser considerati come sistemi dotati di un insieme attrattivo che coincide con tutto lo spazio delle fasi.

In altre parole la simmetria per inversione temporale sarebbe indistruttibile. Genererebbe, anche quando spontaneamente violata, una simmetria analoga su ogni insieme attraente non simmetrico!

Un primo esempio dell'indistruttibilità della simmetria per inversione temporale, o almeno un esempio di un fenomeno molto analogo, lo si trova addirittura nella Fisica fondamentale. Nelle teorie quantistiche relativistiche che dovrebbero descrivere il nostro Universo la simmetria per inversione temporale T , che si dovrebbe pensare valida a livello fondamentale, è rotta

³ Se la distanza fra due successioni è, al solito, definita come e^{-N} , ove N è il massimo valore per cui $\sigma_i = \sigma'_i$ per $|i| \leq \frac{N}{2}$.

spontaneamente, come è ben noto, *c.f.r.* [A] p. 241. Ma continua ad esistere una simmetria che anticommuta con l'evoluzione temporale e che è una simmetria della dinamica del nostro Universo: è la simmetria *TCP*.

Applicando al nostro universo la trasformazione *T* si ottiene un'altro universo assolutamente diverso dal nostro ma ugualmente possibile.

Si può pensare che un tale universo realmente esista e che le equazioni fondamentali siano simmetriche per la trasformazione *T*, ossia reversibili, ma dissipative. Per cui il nostro Universo evolverebbe su un insieme attraente più piccolo di tutto lo spazio delle fasi e che non è più invariante per inversione temporale. Ciononostante se effettivamente la simmetria per inversione del tempo fosse indistruttibile allora il moto sarebbe sempre simmetrico rispetto *ad un'altra operazione* che inverte il segno del tempo, che è appunto *TCP*.

Naturalmente per sostenere quanto appena detto sarebbe necessario pensare che esista un meccanismo dissipativo nella dinamica dell'Universo: nulla di più repellente. Ma la dissipatività di cui si parla qui *non* è la dissipatività empirica cui si è abituati: *perchè le equazioni fondamentali resterebbero reversibili*. Si deve piuttosto pensare che esista un livello superiore a quello a noi accessibile direttamente, un "Universo di Universi", che agisce sulla nostra evoluzione come un termostato agisce sull'evoluzione di un gas fuori dell'equilibrio. Questo sarebbe sufficiente a poter pensare che il nostro Universo evolva andando a finire rapidamente su un insieme attraente che non ha più la simmetria *T* ma "solo" *TCP*.

Oppure, con una assai grande economia concettuale e senza sconfinare nella fantascienza, si potrebbe pensare che sia il nostro stesso Universo ad agire, in modo reversibile ma dissipativo, da termostato sul mondo delle particelle elementari generando la rottura di simmetria della loro dinamica che osserviamo sperimentalmente. L'asimmetria osservata nelle interazioni deboli potrebbe essere un riflesso nel mondo subatomico dell'asimmetria che osserviamo fra passato e futuro, a livello macroscopico. Certo sarebbe importante produrre un modello concreto e credibile per il meccanismo di interazione fra il mondo macroscopico (atomico) e quello microscopico (subatomico): di esso ne terremmo ora conto solo fenomenologicamente immaginando una lagrangiana per la descrizione delle interazioni deboli, *c.f.r.* [A], che è *a priori* non invariante per inversione temporale.

Questa visione (che pur mi pare non assurda, benchè assai ardita) non ci dovrebbe risultare realmente inusitata, anche se forse non è mai stata proposta prima.

Infatti ritornando alla nostra assai più modesta analisi sul moto dei gas o dei fluidi cerchiamo di immaginare la struttura dei moti di un sistema reversibile dotato di un insieme attraente *A* iperbolico, che pensiamo come una superficie regolare di dimensione inferiore a quella dello spazio delle fasi.

Allora i punti di *A* avranno una varietà stabile ed una instabile: quella instabile sarà interamente contenuta in *A*, ma quella stabile consisterà di una parte su *A* e una parte *fuori* di *A*, appunto perchè *A* è attrattivo.

Supporrò, per semplicità, che il sistema dinamico abbia due soli insiemi

invarianti chiusi di punti *non erranti*, c.f.r. §24 osservazione (2) alla definizione 2, A e la sua immagine iA , che chiamerò *poli*.

Allora è chiaro che la varietà stabile dei punti di A si estende fino all'insieme iA : ossia se x è un punto vicino a A e se lo si segue a ritroso nel tempo si vede che $S^{-n}x$ tende all'insieme iA , che respinge, e cioè attrae i moti visti a ritroso nel tempo.

La varietà stabile in questione, dunque, si estende fino a iA e ci dobbiamo attendere che sia densa su questo insieme (nel senso che la chiusura di tale varietà conterrà iA). Essa può *a priori* comportarsi, nelle sue vicinanze, in vari modi: ad esempio potrebbe *avvolgersi* attorno a iA .

Tuttavia l'ipotesi geometrica più semplice è che la varietà si avvicini con "decisione" ad iA "tagliando" questa superficie in modo "trasversale": questo è possibile anche se, evidentemente, nessun punto della varietà può appartenere a A .

Per capire che senso dare a questa proprietà geometrica diamo prima un esempio paradigmatico e poi la formuleremo in modo preciso.

I poli $A_+ = A$ e $A_- = iA$ sono, nell'esempio che viene qui proposto, due superfici regolari chiuse e limitate, copie di una stessa superficie M^* .

Se x è un punto in M^* , il punto generico dello spazio delle fasi sarà determinato da una coppia (x, z) ove $x \in M^*$ e z è un insieme di coordinate trasversali che ci dicono quanto siamo lontani dall'insieme attraente. Il punto z sarà immaginato come un punto su una varietà chiusa e limitata Z . La costruzione è fatta in modo che z abbia un valore ben determinato su A_+ e su A_- : valore che denoteremo z_+ e z_- rispettivamente.

La coordinata x identifica un punto sulla superficie compatta M^* sulla quale agisce una trasformazione reversibile S_* tale che il sistema (M^*, S_*) sia un sistema di Anosov. Ad esempio M^* può essere il toro bidimensionale e S_* il "gatto di Arnold", c.f.r. §23:

$$32.2 \quad S_*(\psi_1, \psi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (32.2)$$

il quale è reversibile se si definisce l'inversione temporale come la trasformazione che permuta le coordinate di $\underline{\psi}$ cambiandone una di segno, ossia $i^*x = i^*(\psi_1, \psi_2) = (-\psi_2, \psi_1)$.

La trasformazione S su *tutto* lo spazio delle fasi sarà definita da:

$$32.3 \quad S(x, z) = (S_*x, \tilde{S}z) \quad (32.3)$$

ove \tilde{S} è una trasformazione che agisce sulle coordinate z in modo da generare un'evoluzione sulla varietà Z che ha due punti fissi, z_- instabile e z_+ stabile, e S fa evolvere tutti i punti $z \neq z_{\pm}$ in modo che tendano a z_+ nel futuro e a z_- nel passato.

Per esempio Z potrebbe essere una circonferenza $z = (v, w)$ con $v^2 + w^2 = 1$. L'evoluzione \tilde{S} potrebbe essere la trasformazione che si ottiene considerando al tempo $t = 1$ il punto $\tilde{S}(v, w)$ in cui evolve (v, w) secondo l'equazione differenziale $\dot{v} = -\alpha v$, $\dot{w} = E - \alpha w$ con $\alpha = Ew$. Tale evoluzione ha appunto la proprietà $\tilde{S}^n z \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} z_{\pm}$ con $z_+ = (v_+, w_+) \equiv (0, 1)$ e $z_- =$

$(v_-, w_-) \equiv (0, -1)$. La trasformazione S , in (32.3), è *reversibile* se si definisce $i(x, z) = (i^*x, -z)$.

Pertanto vediamo che il sistema $(M^* \times Z, S)$ è un sistema dotato di un insieme attraente e di uno repulsivo iperbolici, rispettivamente $M^* \times \{z_+\}$ e $M^* \times \{z_-\}$.

I due poli $A_{\pm} = M^* \times \{z_{\pm}\}$ sono trasformati l'uno nell'altro dalla simmetria i che, evidentemente *non* è una simmetria per i moti che si svolgono sui poli stessi.

Il sistema dinamico è caotico, avendo un insieme attrattivo $(M^*, \{z_+\})$ sul quale l'evoluzione è un sistema Anosov: la simmetria per inversione temporale è spontaneamente violata sui poli.

Tuttavia si vede che se si definisce la trasformazione $i^*A_+ \leftrightarrow A_+$ come: $i^*(x, z_+) = (i^*x, z_+)$ allora i^* anticommuta con l'evoluzione S ristretta a A_+ (e una i^* può essere definita anche su A_- in modo analogo e analogamente anticommutare con S su A_-).

Dunque in questo caso i^* è una trasformazione di inversione temporale locale sui poli del sistema “ereditata” dalla simmetria globale i che, però, non è una simmetria locale (ossia non può essere ristretta ai poli stessi, perchè i poli stessi non sono simmetrici, cioè non sono i -invarianti).

Vediamo ora in quali casi la costruzione ora descritta è generalizzabile.

(C) *L'assioma C.*

Diamo anzitutto la descrizione formale della proprietà geometrica introdotta in [BG] e chiamata *assioma C* per il sistema dinamico dotato solo di poli iperbolici.

Ricordiamo la definizione data nelle osservazioni alla definizione 2 del §24 di sistema dinamico (M, S) che verifica l'assioma A. Un tale sistema è tale che l'insieme dei punti non erranti si può decomporre in un numero finito di insiemi densamente coperti da orbite periodiche e sui quali esiste un'orbita densa, detti componenti *basilari* o *poli*: questo è un teorema di Smale di cui qui non riportiamo la (non difficile) dimostrazione, c.f.r. [Sm] p.777.

Non tutti i poli sono insiemi attraenti: anzi se un sistema è reversibile ogni polo A di attrazione ha una “immagine” $i\bar{A}$ che è un polo repulsivo.

Dato un polo Ω (attrattivo, repulsivo o altro) si definisce $W_s(\Omega)$ come l'insieme dei punti che evolvono verso Ω per $t \rightarrow +\infty$ e $W_e(\Omega)$ come l'insieme dei punti che evolvono verso Ω per $t \rightarrow -\infty$.

Nel caso che Ω sia attrattivo $W_s(\Omega)$ è il bacino di attrazione di Ω , mentre $W_e(\Omega)$ è Ω stesso. In generale Ω non è nè attrattivo né repulsivo e i due insiemi $W_s(\Omega)$ e $W_e(\Omega)$ sono entrambi non banali.

È conveniente dare la definizione di distanza $d(x)$ di un punto x dai poli del sistema. Se d_0 è il diametro dello spazio delle fasi M e $d_{\Omega_i}(x)$ è la distanza ordinaria (nella metrica di M) del punto x dal polo Ω_i :

$$\delta(x) = \min\left\{\min_i \frac{d_{\Omega_i}(x)}{d_0}, \min_{j, -\infty < n < +\infty} \frac{d_{\Omega_j}(S^n x)}{d_0}\right\} \quad (32.4)$$

32.4

ove il minimo su i corre sui poli attrattivi o repulsivi mentre il minimo su j corre sugli altri poli.

Si dice che due varietà si intersecano trasversalmente se il piano generato dai loro piani tangenti al punto di intersezione ha dimensione uguale a quella di tutto lo spazio, *c.f.r.* §24. Questa nozione di trasversalità è poi utile per fissare la nozione di sistema che verifica l' *assioma B*: che è un sistema che verifica l' *assioma A* con l' ulteriore proprietà che se $W^s(\Omega_i)$ ha un punto y in comune con $W^e(\Omega_j)$ e dunque $y \in W_x^s \cap W_{x'}^u$ con $x \in \Omega_i$ e $x' \in \Omega_j$ allora l' intersezione fra W_x^s e $W_{x'}^u$ è *trasversale* in y , *c.f.r.* §24 osservazione 3 alla definizione 2.

Le strutture ora descritte sono interessanti perchè i sistemi che le verificano sono *stabili*: se un sistema verifica l' *assioma B* allora, perturbando la trasformazione S in classe C^∞ , si genera un nuovo sistema che via un cambiamento di coordinate *continuo* (ma in generale non differenziabile e quindi non necessariamente regolare) può essere trasformato in quello di partenza. Quest' ultimo è un profondo risultato (*teorema di Robbin*), [R3] p. 170. Se ne congettura anche l' inverso (congettura di Palis–Smale) “in classe C^r ” per $r \geq 1$ e per $r = 1$ è già un teorema (*teorema di Mañé*), *c.f.r.* [R3], p. 171 per una formulazione precisa e, anche, i commenti alla definizione 4 del §24.

L' esempio dato al punto (B) verifica evidentemente gli assiomi A e B. Verifica inoltre la proprietà che in [BG] è stata chiamata *assioma C*:

Definizione (*assioma C*): Un sistema dinamico (\mathcal{C}, S) verifica l' *assioma C* se è un sistema di Anosov transitivo o almeno verifica l' *assioma B* e se in quest' ultimo caso:

(1) Ammette un solo polo attrattivo e un solo polo repulsivo, ³ A_+ e A_- , con bacini di attrazione per A_+ e di repulsione per A_- aperti e con complemento a volume nullo, (proprietà di globalità dell' insieme attraente e di quello repulsivo). I poli sono, inoltre, superfici regolari su cui S agisce in modo topologicamente mescolante.

(2) Per ogni $x \in M$ il piano tangente T_x ammette una decomposizione Hölder–continua come somma di tre piani T_x^u, T_x^s, T_x^m tali che: ⁴

- a) $dS T_x^\alpha = T_{Sx}^\alpha$ $\alpha = u, s, m$
- b) $|dS^n w| \leq C e^{-\lambda n} |w|$, $w \in T_x^s$, $n \geq 0$
- c) $|dS^{-n} w| \leq C e^{-\lambda n} |w|$, $w \in T_x^u$, $n \geq 0$
- d) $|dS^n w| \leq C \delta(x)^{-1} e^{-\lambda |n|} |w|$, $w \in T_x^m$, $\forall n$

ove le dimensioni di T_x^u, T_x^s, T_x^m sono > 0 e $\delta(x)$ è definito in (32.4).

(3) se x è sul polo attrattivo A_+ allora $T_x^s \oplus T_x^m$ è tangente alla varietà stabile in x ; viceversa se x è sul polo repulsivo A_- allora $T_x^u \oplus T_x^m$ è tangente alla varietà instabile in x .

Osservazioni:

³ Detto talora “repellente”: dizione che verrà scartata.

⁴ Si potrebbe preferire regolarità C^∞ o C^p con $1 \leq p \leq \infty$: ma questo escluderebbe la maggior parte dei casi. D' altra parte la continuità di Hölder potrebbe essere equivalente alla semplice continuità C^0 come nel caso dei sistemi di Anosov, *c.f.r.* [AA], [Sm].

- (1) Sebbene T_x^u and T_x^s non siano unicamente determinati i piani $T_x^s \oplus T_x^m$ e $T_x^u \oplus T_x^m$ sono unicamente determinati per $x \in A_+$ e, rispettivamente, per $x \in A_-$.
- (2) È chiaro che un sistema che verifica l'assioma C verifica anche necessariamente l'assioma B. Non è remota la possibilità che ogni sistema reversibile che verifica l'assioma B e che ha solo due poli, uno attrattivo e uno repulsivo, verifichi necessariamente l'assioma C, eventualmente con l'aiuto di qualche ipotesi aggiuntiva "naturale".
- (3) Il citato teorema di Robbin implica che i sistemi che verificano l'assioma C sono strutturalmente stabili, [BG].
- (4) L'ipotesi che ci siano due poli è posta qui solo per semplicità e probabilmente se ne potrebbe fare a meno (questo è il motivo per cui la definizione (32.4) è stata introdotta in forma così generale).
- (5) Anche la regolarità dei poli, che richiede che siano superfici regolari, probabilmente non è necessaria ai fini delle discussioni che seguono.

È possibile visualizzare le proprietà dell'assioma C via la seguente figura (commentata più in basso):

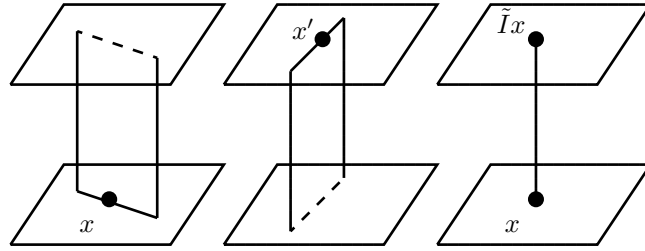


Fig.1

L'assioma C, [BG], rafforza l'assioma B ed è una nozione *strutturalmente stabile*, cioè resta una proprietà anche dei sistemi ottenuti con piccole perturbazioni da uno che lo verifica.

Informalmente l'assioma C, in sistemi dotati solo di un insieme attraente e di un repulsore, senza altri insiemi invarianti, asserisce che la varietà stabile dei punti su A_+ arriva sul repulsore A_- "trasversalmente", invece che "avvolgersi intorno ad esso".

La prima figura in Fig.1 illustra un punto $x \in A_+$ e una parte locale della sua varietà stabile che arriva fino all'insieme A_- intersecandolo nella linea tratteggiata (che è una varietà stabile per il moto ristretto alla superficie A_- ma che *non fa parte* della varietà stabile di x , per la contraddizione che *non consente*). Similmente la seconda figura descrive un punto x' su A_- con una parte locale della sua varietà instabile.

La terza figura in Fig.1 mostra l'intersezione fra la varietà stabile di un punto $x \in A_+$ e la varietà instabile del punto $\tilde{x} \in A_-$: nella figura tale intersezione è una curva unidimensionale che connette x a \tilde{x} (che è unicamente determinato da x , c.f.r. seguito) stabilendo la corrispondenza che definisce $\tilde{\cdot}$.

I punti "tra le due superfici" A_{\pm} rappresentano la maggior parte dei punti dello spazio delle fasi, ma sono punti erranti, c.f.r. §24.

Sia δ_{\pm} la dimensione delle superfici A_{\pm} e sia u_{\pm}, s_{\pm} la dimensione delle varietà stabili e instabili dei sistemi dinamici (A_{\pm}, S) rispettivamente ($\delta_{\pm} = u_{\pm} + s_{\pm}$). Risulta $s_+ = u_-$, $u_+ = s_-$ e quindi $\delta_+ = \delta_- = \delta$ e la dimensione totale dello spazio delle fasi è $\delta + m$ con $m > 0$.

La dimensione della varietà stabile di $x \in A_+$ nel sistema dinamico originale (cioè non ristretto a A_+) è dunque $m + s_+$, perchè tale varietà “sporge fuori di A_+ ” (perchè A_+ attrae) e quella della varietà instabile di $x' \in A_-$ è $m + u_-$ e quindi la dimensione delle loro intersezioni (locali) è m e tale superficie interseca A_+ e A_- in due punti che possiamo chiamare x e \tilde{x} , definendo ix . Si vede che tale superficie è un *filo* che congiunge punti di A_+ a punti di A_- (definendo \tilde{i}) e quindi la rappresentazione in Fig.1 è una rappresentazione accurata, anche se schematica.

L'assioma C, che impedisce alle varietà stabili dei punti di A_+ e a quelle instabili dei punti di A_- di “avvolgersi” su A_- o, rispettivamente, su A_+ , può essere visto come un'ipotesi di massima semplicità sulla geometria del sistema.

L'interesse di questa lunga digressione geometrica sta nel:

Teorema: Se un sistema dinamico (M, S) è reversibile e verifica l'assioma C allora esiste una trasformazione i^ definita sui poli del sistema che li lascia invarianti e anticommuta con l'evoluzione temporale.*

Nel caso illustrato in figura la i^* è invero $i \cdot \tilde{i}$, [BG]. Dunque questo teorema mostra che nei sistemi che verificano l'assioma C la simmetria per inversione temporale è *indistruttibile*: in caso se ne produca la rottura spontanea (con l'apparizione di insiemi attrattivi più piccoli di tutto lo spazio delle fasi, e non invarianti per l'inversione globale i) il polo attrattivo ammette sempre una simmetria i^* che inverte il tempo, ossia che anticommuta con l'evoluzione temporale. ■

(D) *L'ipotesi caotica.*

La stabilità strutturale dei sistemi che verificano gli assiomi B e C è stata una delle ragioni della seguente reinterpretazione ed estensione del principio di Ruelle del §27, detta *principio di caoticità* o *ipotesi caotica*. Non ne è però stata la prima ragione, perchè il principio di caoticità è stato in realtà “dedotto” sulla base dell'interpretazione di risultati sperimentali, [ECM2], [GC1].

Ipotesi caotica: Un sistema meccanico, di particelle o fluido, in uno stato stazionario caotico⁵ può essere considerato come un sistema dinamico che verifica l'assioma C al fine del calcolo delle proprietà macroscopiche. Nel caso di sistemi reversibili, quindi, è possibile definire sull'insieme attrattivo una operazione i^ che anticommuta con l'evoluzione.*

Questo principio, insieme alle considerazioni svolte nel punto (A), consentirà ■

⁵ Intenderemo *caotica* una distribuzione stazionaria con *almeno* un esponente di Lyapunov positivo. ■

di sviluppare una teoria abbastanza dettagliata di alcune proprietà dell'equazione di Navier–Stokes, nel §34.

Concludiamo con alcuni commenti sul significato dell'ipotesi caotica. Essa va interpretata un pò come si interpreta l'ipotesi ergodica in Meccanica Statistica. Ossia *non si deve intendere che “veramente” il sistema verifichi l'assioma C*, bensì si deve intendere che questa proprietà sia vera *al solo fine* del calcolo dei valori medi sulla distribuzione statistica SRB, c.f.r. §27, cioè sulla statistica dei moti i cui dati iniziali vengono scelti a caso nello spazio delle fasi con distribuzione proporzionale al volume.

Si deve anche notare che questo principio è più generale dell'ipotesi ergodica: infatti si può far vedere, [S], che se il sistema dinamico è Hamiltoniano e di Anosov transitivo allora la distribuzione SRB è proprio la *distribuzione di Liouville* sulla superficie di energia costante e quindi vale l'ipotesi ergodica.

L'ipotesi ergodica implica la termodinamica classica, anche se applicata a sistemi che manifestamente non sono ergodici, quali il gas perfetto. In questo stesso senso va intesa l'ipotesi caotica. La quale, strettamente parlando, *non può essere vera* per molti sistemi di interesse per la fisica: talvolta per la banale ragione che l'evoluzione di questi sistemi è descritta da trasformazioni *S* che *non sono regolari ovunque* ma solo a tratti. c.f.r. §24.

L'idea è che l'ipotesi caotica possa consentire di stabilire *relazioni* fra grandezze fisiche senza che si calcoli realmente il valore delle grandezze stesse. Come Boltzmann dedusse il teorema del calore (cioè l'uguaglianza delle derivate delle funzioni di stato esprime l'esattezza della forma differenziale $(dU + pdV)/T$) da espressioni formali per la distribuzione di equilibrio.

Ora il ruolo delle espressioni formali per le distribuzioni SRB che descrivono stati stazionari fuori equilibrio sarà preso dalla formula di Sinai (32.1).

Bibliografia: [R2], [S], [G2], [G7], [GC1].

Nel lavoro originale [GC1] l'ipotesi caotica fu formulata richiedendo che il sistema dinamico fosse addirittura di Anosov mescolante (che nelle notazioni del lavoro era chiamato impropriamente transitivo). Come spiegato in [BGG] questa affermazione va interpretata, per essere in accordo con gli esperimenti relativi a situazioni *fortemente* fuori dell'equilibrio, nel senso che il sistema sia di Anosov mescolante se *ristretto* all'insieme attraente (ossia l'insieme attraente deve essere una superficie regolare sulla quale *S* agisce in modo mescolante). Ma in quest'ultimo caso si rendeva anche necessario aggiungere l'ipotesi che l'inversione temporale fosse “indistruttibile”. La ricerca di una condizione geometrica che garantisse *a priori* l'indistruttibilità e che fosse *a priori* stabile condusse in [BG] a formulare l'assioma C. Il punto di arrivo di questa catena di raffinamenti, e in un certo senso, di semplificazioni dell'ipotesi originale, richiede ancora per “essere completamente soddisfacente” la rimozione dell'ipotesi che ci siano solo due poli e che questi siano varietà regolari.

┐

┐

§32: Reversibilità, assioma C, ipotesi caotica

453

┐

┐

§33 *L'ipotesi caotica, il teorema di fluttuazione e la reciprocità di Onsager.* ■

Si considera ora un sistema dinamico quale l'equazione NS reversibile vista al §31. Ma si possono studiare più in generale equazioni su una superficie regolare V descritte da un'equazione reversibile:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (33.1)$$

le cui soluzioni $\underline{x}(t) = S_t x$ ammettano una simmetria di inversione temporale ■
 i . Cioè S_t sia tale che da anticommutare con l'operazione isometrica¹ i :
 $iS_t = S_{-t}i$, e $i^2 = 1$.

Anzitutto studiamo i moti attraverso osservazioni cadenzate. Cioè immaginiamo ■
 che il nostro sistema venga osservato in modo discreto, *c.f.r.* §22. Non è veramente necessario, ma questo semplifica un pò la discussione riducendo di un'unità la dimensione dello spazio delle fasi e consentendo di considerare ■
 l'evoluzione come una trasformazione S . Lo spazio delle fasi $M \subset V$ su cui agisce S può essere considerato come una superficie regolare a tratti, eventualmente fatta di varie parti connesse e ovunque trasversale alle traiettorie ■
 delle soluzioni della (33.1).

La trasformazione S è legata alla S_t dalla relazione $Sx = S_{t(x)}x$ se $t(x)$ è il tempo che intercorre fra l'evento $x \in M$ e il successivo dello stesso tipo.

Il sistema dinamico che studiamo sarà allora (M, S) e chiameremo, al solito, μ_0 una distribuzione di probabilità dotata di densità rispetto alla misura di volume su M . E l'invarianza per inversione temporale diviene $iS = S^{-1}i$, con i isometria di M e $i^2 = 1$.

(A) *Il teorema di fluttuazione.*

In base all'ipotesi caotica immaginiamo che l'insieme attrattivo per l'evoluzione S sia tutto lo spazio delle fasi M , senza perdita di generalità.

La distribuzione SRB avrà la forma (32.2): il punto importante è che la combinazione della (32.2) con la simmetria d'inversione temporale è ricca di conseguenze sorprendenti, almeno a prima vista.

Anzitutto osserviamo che si può supporre senza perdita di generalità che il pavimento markoviano \mathcal{P} usato per rappresentare la distribuzione SRB possa essere scelto invariante per inversione temporale: cioè tale che se $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$ allora iP_σ è ancora un elemento $P_{i\sigma}$ con $i\sigma = \sigma'$ opportuno di \mathcal{P} . Questo perchè dalla definizione di pavimento markoviano, *c.f.r.* §27 (C), segue che:

(1) intersecando due pavimenti markoviani \mathcal{P} e \mathcal{P}' si ottiene un terzo

¹ In realtà nelle ipotesi in cui siamo supporre che i sia un'isometria non è restrittivo: basta ridefinire opportunamente la metrica in modo che la distanza $d(x, y)$ fra due punti vicini divenga $\frac{1}{2}(d(x, y) + d(ix, iy))$.

pavimento markoviano: cioè il pavimento i cui elementi sono gli insiemi $P_i \cap P'_j$ è ancora markoviano.

(2) applicando la trasformazione i agli elementi di un pavimento markoviano \mathcal{P} si ottiene un pavimento markoviano $i\mathcal{P}$: questo perchè l' inversione temporale i trasforma la varietà stabile $W^s(x)$ e quella instabile $W^e(x)$ in $W^e(ix)$ e $W^s(ix)$ rispettivamente.

Dunque intersecando \mathcal{P} e $i\mathcal{P}$ si ottiene un pavimento simmetrico per inversione temporale. Se $iP_\sigma \stackrel{def}{=} P_{i\sigma}$ è la corrispondenza fra elementi del pavimento stabilita dall' azione di i si vede che quindi i viene rappresentata come la trasformazione che agisce sulla successione di simboli $\underline{\sigma} = \{\sigma_k\}$ trasformandola in $\underline{\sigma}' = \{\sigma'_k\}$ con $\sigma'_k = i\sigma_{-k}$.

Non è difficile, inoltre, verificare che questo implica che un' estensione standard delle stringhe compatibili $\sigma_{-\tau/2}, \dots, \sigma_{\tau/2}$, c.f.r. (32.1) e §27, può essere eseguita in modo che se x_j è il centro di $E_j = \cap_{k=-\tau/2}^{\tau/2} S^{-k} P_{\sigma_k}$ allora ix_j è quello di iE_j .

Denotiamo $J_\tau(x)$ la matrice jacobiana della trasformazione S^τ , ove τ è un intero pari, come trasformazione di $S^{-\tau/2}x$ in $S^{\tau/2}x$; e denotiamo con $J_{e,\tau}(x)$ e $J_{s,\tau}(x)$ le matrici jacobiane delle stesse trasformazioni pensate come trasformazioni di $W_{S^{-\tau/2}x}^i$ in $W_{S^{\tau/2}x}^i$ o, rispettivamente, di $W_{S^{-\tau/2}x}^s$ in $W_{S^{\tau/2}x}^s$. Allora sussistono semplici relazioni fra i determinanti di queste matrici.

Se $\alpha(x)$ è l' angolo formato in x fra la varietà stabile e instabile in x e se si denotano rispettivamente $\Lambda_\tau(x) = |\det J_\tau(x)|$, $\Lambda_{s,\tau}(x) = |\det J_{s,\tau}(x)|$, $\Lambda_{e,\tau}(x) = |\det J_{e,\tau}(x)|$ allora, notando che tali determinanti sono legati all' espansione o contrazione dell' elemento di superficie delle varietà M , W_x^s e W_x^i stabili e instabili in x , segue che:

$$33.2 \quad \Lambda_\tau(x) = \Lambda_{s,\tau}(x) \Lambda_{e,\tau}(x) \frac{\sin \alpha(S^{\tau/2}x)}{\sin \alpha(S^{-\tau/2}x)} \quad (33.2)$$

La simmetria per inversione temporale (e il carattere isometrico di questa) implica che:

$$33.3 \quad \Lambda_\tau(ix) = \Lambda_\tau(x)^{-1}, \quad \Lambda_{e,\tau}(ix) = \Lambda_{s,\tau}^{-1}(x), \quad \Lambda_{s,\tau}(ix) = \Lambda_{e,\tau}^{-1}(x) \quad (33.3)$$

e se $\lambda_\tau(x) = -\log \Lambda_\tau(x)$, $\lambda_{e,\tau}(x) = -\log \Lambda_{e,\tau}(x)$, $\lambda_{s,\tau}(x) = -\log \Lambda_{s,\tau}(x)$, anche:

$$33.4 \quad \lambda_\tau(ix) = -\lambda_\tau(x), \quad \lambda_{e,\tau}(x) = -\lambda_{s,\tau}(ix), \quad \lambda_{s,\tau}(x) = -\lambda_{e,\tau}(ix) \quad (33.4)$$

Inoltre la quantità $\lambda_\tau(x)$ è semplicemente legata alla divergenza $\delta(x)$ dell' equazione (33.1), $\delta(x) = \sum_j \partial_j f_j(x)$. Se $\lambda(x) = \int_0^{t(x)} \delta(S_t x) dt$ allora:

$$33.5 \quad \lambda_\tau(x) = \sum_{j=-\frac{1}{2}\tau}^{\frac{1}{2}\tau-1} \lambda(S^j x) \quad (33.5)$$

Chiameremo *creazione di entropia* su τ eventi candenzanti la contrazione del volume dello spazio delle fasi (che può *anche essere negativa*, ossia espansione di fatto), la quantità:

$$33.6 \quad \sigma_\tau(x) = \sum_{j=-\frac{1}{2}\tau}^{\frac{1}{2}\tau-1} \lambda(S^j x) \stackrel{def}{=} \tau \langle \lambda \rangle_+ p \quad \text{se } \langle \lambda \rangle_+ \neq 0 \quad (33.6)$$

ove $\langle \lambda \rangle_+$ denota il valore medio rispetto alla distribuzione SRB del sistema (M, S) , c.f.r. §32, §27, della funzione $\lambda(x)$, e p è una variabile (che dipende da τ e x) sullo spazio delle fasi M e che possiamo chiamare il *tasso di creazione di entropia* medio (adimensionale) su τ eventi attorno a x .

Se il nome di *entropia* sia propriamente usato qui o no è dibattibile. In realtà ci interessano i casi in cui la quantità $\langle \lambda \rangle_+$ è non nulla: tali casi saranno chiamati *dissipativi*. Infatti vale il teorema *H di Ruelle che dice che se tale media è non nulla allora è necessariamente positiva* e questa è senza dubbio una proprietà che certamente si desidera per una definizione di tasso di creazione di entropia, [R5].

Né ci si può rifare, per trovare giustificazioni all'uso del nome "entropia", a definizioni indipendenti di tale nozione: semplicemente perchè la nozione di entropia non è mai stata ben definita in casi di sistemi fuori dell'equilibrio.

Dunque adotterò questo nome anche perchè vedremo che questa quantità ha varie altre proprietà desiderabili perchè la nozione sia considerata soddisfacente.

La prima proprietà importante è che il tasso di creazione di entropia è una variabile che ha una distribuzione di probabilità $\pi_\tau(p)$ rispetto alla statistica stazionaria SRB che descrive le proprietà asintotiche dei moti. Per la sua stessa definizione $\langle p \rangle_+ \equiv 1$ (nei casi dissipativi, beninteso).

Porremo:

$$33.7 \quad \zeta(p) = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log \pi_\tau(p) \quad (33.7)$$

e questa funzione $\zeta(p)$ verifica il seguente teorema di fluttuazione, [GC1]:

I Teorema (*teorema di fluttuazione*): se $\zeta(p) > -\infty$ per $p \in (-p^*, p^*)$ si ha:

$$33.8 \quad \frac{\zeta(-p) - \zeta(p)}{\langle \lambda \rangle_+ p} = 1 \quad (33.8)$$

La dimostrazione è molto semplice: informalmente è la seguente. Si può calcolare il rapporto $\pi_\tau(p)/\pi_\tau(-p)$ usando la (32.1):

$$33.9 \quad \frac{\pi_\tau(p)}{\pi_\tau(-p)} = \frac{\sum_{\sigma_\tau(x_j)=\langle \lambda \rangle_+ \tau p} \Lambda_{e,\tau}(x_j)^{-1}}{\sum_{\sigma_\tau(x_j)=-\langle \lambda \rangle_+ \tau p} \Lambda_{e,\tau}(x_j)^{-1}} \quad (33.9)$$

ove la somma verte sui centri x_j degli elementi della partizione $\mathcal{E}_\tau = \cap_{-\tau/2}^{\tau/2} S^h \mathcal{E}$, c.f.r. (27.8) (ossia sui punti che hanno per storia le successioni

compatibili, rispetto alla matrice di compatibilità del pavimento markoviano. $\sigma_{-\tau/2}, \dots, \sigma_{\tau/2}$ pensate estese in "modo standard" a successioni compatibili infinite, *c.f.r.* (32.1)).

Nella discussione che segue *non teniamo in conto* che la (33.9) non è corretta e che una formula più corretta, *c.f.r.* (27.8), dovrebbe essere:

$$33.10 \quad \frac{\pi_\tau(p)}{\pi_\tau(-p)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\sigma_\tau(x_j)=\langle \lambda \rangle_+ \tau p} \Lambda_{e,T}(x_j)^{-1}}{\sum_{\sigma_\tau(x_j)=\langle \lambda \rangle_+ \tau p} \Lambda_{e,T}(x_j)^{-1}} \quad (33.10)$$

ove la somma verte sugli elementi della partizione $\cap_{-T/2}^{T/2} S^{-k} \mathcal{E}$ cioè sugli insiemi $E_j = E_{\sigma_{-T/2}, \dots, \sigma_{T/2}}$. In altre parole si dovrebbe prima far tendere T all' ∞ e poi $\tau \rightarrow \infty$. La (33.9) invece considera $T = \tau$.

Evidentemente usando la (33.9) in luogo della corretta (33.10) si commette un *errore* che si potrebbe paventare irreparabile. Invece non è così e l'errore può essere stimato, *c.f.r.* [GC1],[GC2],[G12], e si può mostrare (facilmente) che il rapporto corretto fra $\pi_t(p)$ e $\pi_\tau(-p)$ è limitato dall' alto o dal basso dal valore del membro di destra della (33.9) moltiplicato o diviso da un fattore a , *indipendente da τ* . Poichè in definitiva si è interessati solo al limite (33.7) si vede che un tale errore non ha alcuna influenza sul risultato.

La possibilità di questa stima è evidentemente essenziale per la discussione: è effettivamente facile, ma riposa sulla profonda struttura della dinamica simbolica e le proprietà ben note delle distribuzioni di probabilità su spazi di successioni compatibili, *c.f.r.* ad esempio [G12].

Si osserva ora che la somma a denominatore può essere riscritta utilizzando il fatto che se x_j è centro di E_j e ha tasso adimensionale di creazione di entropia p , allora ix_j è centro di iE_j (*c.f.r.* osservazioni all' inizio del paragrafo) e tasso $-p$: quindi la (33.9) si riscrive:

$$33.11 \quad \frac{\pi_\tau(p)}{\pi_\tau(-p)} = \frac{\sum_{\sigma_\tau(x_j)=\langle \lambda \rangle_+ \tau p} \Lambda_{e,\tau}(x_j)^{-1}}{\sum_{\sigma_\tau(x_j)=\langle \lambda \rangle_+ \tau p} \Lambda_{e,\tau}(ix_j)^{-1}} \quad (33.11)$$

Si può ora notare che la (33.3) permette di riscrivere questa identità come:

$$33.12 \quad \frac{\pi_\tau(p)}{\pi_\tau(-p)} = \frac{\sum_{\sigma_\tau(x_j)=\langle \lambda \rangle_+ \tau p} \Lambda_{e,\tau}(x_j)^{-1}}{\sum_{\sigma_\tau(x_j)=\langle \lambda \rangle_+ \tau p} \Lambda_{s,\tau}(x_j)} \quad (33.12)$$

e quindi si vede che numeratore e denominatore sono somme su un uguale numero di termini e che termini corrispondenti (ossia con lo stesso j) hanno rapporto $\Lambda_{e,\tau}(x_j)^{-1} \Lambda_{s,\tau}(x_j)^{-1}$ e *questo rapporto è uguale a $\Lambda_\tau(x_j)$* a parte i fattori che derivano dai rapporti dei seni degli angoli, *c.f.r.* (33.2), $\alpha(S^{-\tau/2}x_j)$ e $\alpha(S^{\tau/2}x_j)$: tali rapporti saranno però limitati inferiormente e superiormente da a^{-1} e a per un opportuno a (perchè gli angoli $\alpha(x)$ sono limitati via da 0 e π per la supposta iperbolicità di A , *c.f.r.* §24).

Si noti che quanto detto è corretto rigorosamente solo se il sistema (M, S) , ristretto all' insieme attraente, è davvero un sistema di Anosov mescolante (o anche solo transitivo, *c.f.r.* §24): lo si è usato più volte, sia usando la

formula (32.1) per la distribuzione SRB sia ora dicendo che i rapporti fra i seni degli angoli su introdotti sono uniformemente limitati dal basso e dall'alto. È proprio questo l'uso dell'ipotesi caotica: si suppone che queste proprietà siano "di fatto" vere almeno ai fini dei calcoli di quantità di interesse quali appunto la $\zeta(p)$.

Ma per definizione di p si ha, per tutte le scelte di j , che $\Lambda_\tau^{-1}(x_j) = e^{p\tau\langle\lambda\rangle_+}$ e quindi:

$$33.13 \quad \frac{1}{a} e^{-p\tau\langle\lambda\rangle_+} < \frac{\pi_\tau(p)}{\pi_\tau(-p)} < a e^{-p\tau\langle\lambda\rangle_+} \quad (33.13)$$

e la (33.8) segue nel limite $\tau \rightarrow \infty$, con un errore finito $O(1)$ uniforme per tutti i τ .

Più in generale se $\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x)$ sono n funzioni sullo spazio delle fasi tali che:

$$33.14 \quad \kappa_j(ix) = -\kappa_j(x) \quad (33.14)$$

ossia *dispari* per inversione temporale, si ponga:

$$33.15 \quad \kappa_{\tau,j}(x) \stackrel{def}{=} \sum_{r=-\tau/2}^{\tau/2} \kappa_j(S^r x) = q_j \tau \langle \kappa_j \rangle_+ \quad (33.15)$$

e si consideri la probabilità congiunta, rispetto alla statistica SRB, dell'evento in cui le variabili p, q_1, \dots, q_n abbiano valori dati, e si denoti tale probabilità con $\pi_\tau(p, q_1, \dots, q_n)$. Si pone:

$$33.16 \quad \zeta(p, q_1, \dots, q_n) = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log \pi_\tau(p, q_1, \dots, q_n) \quad (33.16)$$

allora la stessa dimostrazione ora esposta del precedente teorema implica (evidentemente):

II Teorema (*estensione del teorema di fluttuazione*): se D è il dominio in cui le variabili p, q_1, \dots, q_n possono assumere valori, allora:

$$33.17 \quad \frac{\zeta(-p, -q_1, \dots, -q_n) - \zeta(p, q_1, \dots, q_n)}{\tau p \langle \lambda \rangle_+} = 1 \quad (33.17)$$

se p, q_1, \dots, q_n è un punto interno a D .

È molto interessante, come vedremo al successivo punto (B), l'indipendenza dalle variabili q_j del denominatore in (33.17). ■

Osservazione: È importante notare che il teorema di fluttuazione è anche formulabile in termini di proprietà del sistema non discretizzato e cioè della quantità $\delta(x) = -\delta(ix)$, divergenza delle equazioni del moto, che possiamo chiamare tasso di creazione d'entropia per unità di tempo (invece che "per collisione"). E eventualmente in termini di altre quantità $\gamma_j(x) = -\gamma_j(ix)$ dispari rispetto all'inversione temporale. I teoremi si enunciano allo stesso

modo a patto di modificare le definizioni di p, q_j sostituendo alle somme (33.15) e (33.6) le:

$$33.18 \quad \sigma_t = p\langle\delta\rangle_+ \int_{-t/2}^{t/2} dt' \delta(S_{t'}x) \quad \kappa_{t,j} = q\langle\gamma\rangle_+ \int_{-t/2}^{t/2} dt' \gamma_j(S_{t'}x) \quad (33.18)$$

c.f.r. [Ge].

Questi teoremi di fluttuazione sono già notevoli perchè possono esser considerati *leggi di grandi deviazioni* nel senso probabilistico del termine (fornisce una proprietà di deviazioni dalla media di una somma di τ variabili aleatorie e tali deviazioni hanno grandezza $2p\tau$ o $2q_j\tau$, ossia sono di ordine di grandezza $\gg \sqrt{\tau}$, se p o q_j sono ~ 1).

È un risultato che può essere accessibile a verifiche sperimentali in molti casi non banali: l'osservazione sperimentale, *c.f.r.* [ECM2], della validità della (33.8) è stata alla base dello sviluppo dell'ipotesi caotica e della derivazione dei teoremi sopra esposti. Successivamente è stato ritrovato in esperimenti affatto diversi, *c.f.r.* [BGG].

Si deve usare cautela e capire in modo appropriato la natura del teorems di fluttuazione: perché implica la considerazione di limiti non banali il cui ordine *non può* essere permutato come ampiamente dimostrano discussioni in letteratura, [CG99].

Ma l'interesse delle relazioni (33.8) e (33.17) è accresciuto perché è stato notato che possono essere considerate una generalizzazione a sistemi arbitrari fuori equilibrio delle relazioni di reciprocità di Onsager, *c.f.r.* §1, e delle formule di Green-Kubo per i coefficienti di trasporto, *c.f.r.* [G9].

(B) *La reciprocità di Onsager e l'ipotesi caotica.*

Si studierà un sistema tipico di N particelle soggette a forze conservative reciproche ed esterne, con potenziale $V(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_N)$, e a forze esterne non conservative $\{\underline{E}_j\}$, $j = 1, \dots, N$, di intensità misurata da parametri $\{G_j\}$, $j = 1, \dots, N$. Inoltre il sistema sarà soggetto anche a forze $\{\underline{\varphi}_j\}$, $j = 1, \dots, N$, che hanno la funzione di assorbire l'energia data al sistema dalle forze non conservative e quindi consentono lo stabilirsi di uno stato stazionario. Sia μ_+ la statistica del moto di un dato iniziale preso a caso con distribuzione μ_0 , dotata di densità rispetto al volume sullo spazio delle fasi.

Le equazioni del moto avranno dunque la forma:

$$33.19 \quad m\dot{\underline{q}}_j = \underline{p}_j, \quad m\dot{\underline{p}}_j = -\partial_{\underline{q}_j} V(\underline{q}_j) + \underline{E}_j(\{G\}) + \underline{\varphi}_j \quad (33.19)$$

con m = massa delle particelle.

Se $O(\{\underline{q}, \underline{\dot{q}}\})$ è un'osservabile e se S_t è la trasformazione che descrive l'evoluzione, la distribuzione μ_+ è definita (grazie all'ipotesi caotica) da:

$$33.20 \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T O(S_t x) dt = \int_{\mathcal{C}} O(y) \mu_+(dy) \stackrel{def}{=} \langle O \rangle_+ \quad (33.20)$$

per tutti gli $x \in M$ tranne un insieme di misura nulla rispetto al volume $\bar{\mu}_0$ on M .

Supporremo anche che il tasso di generazione di entropia $\delta(x)$, *c.f.r.* (33.5), che però continueremo a denotare $\sigma(x)$ (ma si ricordi che ora rappresenta un tasso di generazione di entropia per unità di tempo e non per evento cadenzante) abbia la forma:

$$33.21 \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^s G_i J_i^0(x) + O(G^2) \quad (33.21)$$

che in realtà pone la sola restrizione che in assenza delle forze non conservative forzanti il sistema si abbia $\sigma = 0$.

Seguendo Onsager, si definisce la *corrente termodinamica* associata alla forza G_i come $J_i(x) = \partial_{G_i} \sigma(x)$.

Le relazioni di Onsager riguardano i *coefficienti di trasporto* definiti da:

$$33.22 \quad L_{ij} = \partial_{G_i} \langle J_j \rangle_+ \Big|_{\underline{G}=0} \quad (33.22)$$

e stabiliscono la *simmetria* della matrice L .

Vogliamo ora far vedere che il teorema di fluttuazione (33.8), (33.17) può essere considerato un' estensione a valori non nulli \underline{G} delle forze esterne ("*forze termodinamiche*") delle relazioni di reciprocità.

Questo sarà ottenuto calcolando $\zeta(p), \zeta(p, q_1, \dots)$ per \underline{G} piccolo, a meno di infinitesimi di ordine superiore (e risulterà che $\zeta(p)$ è infinitesimo del secondo ordine nelle \underline{G} e quindi nei calcoli si trascureranno infinitesimi del terzo ordine). Si considererà poi nel caso reversibile e transitivo l' espressione ottenuta che sarà confrontata con il teorema di fluttuazione e ne seguiranno le *relazioni di Onsager*, anzi le *formule di Green-Kubo* (dette anche a volte *teorema di fluttuazione dissipazione*) che le implicano.

Per semplicità ci riferiremo alla versione continua del teorema descritta in relazione alla (33.18)..

Dunque si potrà dire che il teorema di fluttuazione è una estensione propria delle relazioni di Onsager a campi non nulli, perchè infatti è valido senza le condizioni $\underline{G} = \underline{0}$ caratteristiche delle relazioni classiche di Onsager ed *esattamente* (se si suppone l' ipotesi caotica) come anche è caratteristico delle relazioni di Onsager.

Il calcolo di $\zeta(p)$ per \underline{G} piccolo sarà eseguito mediante uno sviluppo in serie. Come spesso in Meccanica Statistica è utile prima calcolare la trasformata di Laplace della distribuzione di probabilità $\pi_\tau(p) = e^{-\tau\zeta(p)}$:

$$33.23 \quad \begin{aligned} e^{\tau\lambda(\beta)} &= \int e^{\beta\tau(p-1)\langle\sigma\rangle_+ - \tau\zeta(p)} dp = \\ &= \int d\mu_+(x) e^{\beta \sum_{-\tau/2}^{\tau/2} (\sigma(S^j x) - \langle\sigma\rangle_+)} \end{aligned} \quad (33.23)$$

(ove ora τ è una variabile continua) e poi dedurre $\zeta(p)$ mediante un' opportuna antitrasformata. La quale è, come ben noto, la trasformata di Legendre della funzione λ : $\zeta(p) = \max_{\beta} (\beta(p-1) - \lambda(\beta))$.

Prendendo il logaritmo delle (33.23) e sviluppando in serie il risultato si trova:

$$33.24 \quad \lambda(\beta) = \frac{1}{2!}\beta^2 C_2 + \frac{1}{3!}\beta^3 C_3 + \dots \quad (33.24)$$

ove i coefficienti C_j sono combinazioni di valori medi di prodotti di $\sigma(S^j x)$ calcolato per vari valori di j . Nel limite $\tau \rightarrow \infty$, e purchè gli integrali convergano assolutamente:

$$33.25 \quad C_j = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \sigma(S_{t_1} \cdot) \sigma(S_{t_2} \cdot) \dots \sigma(S_{t_{j-1}} \cdot) \sigma(\cdot) \rangle_+^T dt_1 \dots dt_{j-1} \quad (33.25)$$

se $\langle \dots \rangle_+^T$ denotano appunto le "opportune combinazioni di prodotti". Tali combinazioni sono chiamate *cumulanti* della distribuzione di $\sigma(\cdot)$ e ad esempio (come si verifica direttamente):

$$33.26 \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\langle \sigma(S_t \cdot) \sigma(\cdot) \rangle_+ - \langle \sigma(\cdot) \rangle_+ \langle \sigma(\cdot) \rangle_+) dt \quad (33.26)$$

La convergenza degli integrali è una conseguenza dell' ipotesi caotica che implica che il sistema dinamico (M, S, μ_+) è mescolante e mescola con velocità esponenziale le correlazioni fra osservabili regolari (quali la $\sigma(x)$).

Dunque il calcolo al secondo ordine, per il quale basta la (33.26), ci dice che $\lambda(\beta) = \frac{1}{2}\beta^2 C_2$ e quindi, invertendo la trasformata come detto a seguito della (33.23), si ricava un' espressione per $\zeta(p)$:

$$33.27 \quad \zeta(p) = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma \rangle_+^2}{C_2} (p-1)^2 + O((p-1)^3 G^3) \quad (33.27)$$

Confrontando con il teorema di fluttuazione (ossia $\zeta(-p) - \zeta(p) = p \langle \sigma \rangle_+$) e imponendo la compatibilità fra le due relazioni si evince:

$$33.28 \quad \langle \sigma \rangle_+ = \frac{1}{2} C_2 + O(G^3) \quad (33.28)$$

Se ora si sviluppa il membro di sinistra in serie di \underline{G} attorno a $\underline{G} = \underline{0}$ si trova, *al secondo ordine in \underline{G}* e abbreviando d' ora in poi ∂_{G_i} con ∂_i :

$$33.29 \quad \langle \sigma \rangle_+ = \frac{1}{2} \sum_{ij} G_i G_j [\partial_i \partial_j \langle \sigma \rangle_+]_{\underline{G}=\underline{0}} \quad (33.29)$$

Ma la quantità $\partial_i \partial_j \langle \sigma \rangle_+$ è la somma di tre termini:

$$33.30 \quad \begin{aligned} & \int \mu_+(dx) \left(\partial_i \partial_j \sigma(x) \right) + \int \left(\partial_i \partial_j \mu_+(dx) \right) \sigma(x) + \\ & + \left[\int \left(\partial_i \sigma(x) \right) \left(\partial_j \mu_+(dx) \right) + (i \longleftrightarrow j) \right] \end{aligned} \quad (33.30)$$

ove i primi due termini sono evidentemente nulli se $\underline{G} = \underline{0}$. Il primo perchè se $\underline{G} = \underline{0}$ la distribuzione μ_+ è invariante per inversione temporale (e coincide con la distribuzione di Liouville μ_0 perchè $\sigma = 0$) e σ è dispari per inversione temporale; il secondo perchè $\sigma = 0$ se $\underline{G} = \underline{0}$. Quindi:

$$33.31 \quad \partial_i \partial_j \langle \sigma \rangle_+ |_{G=0} = (\partial_j \langle J_i^0 \rangle_+ + \partial_i \langle J_j^0 \rangle_+) |_{G=0} \quad (33.31)$$

Osserviamo ora che se $\underline{G} = \underline{0}$ si ha $\partial_i \langle J_j \rangle_+ = \partial_i \langle J_j^0 \rangle_+$, perchè J^0 e J sono dispari rispetto a i e differiscono per infinitesimi $O(G)$, per la (33.21).

Quindi poichè $L_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_i \langle J_j \rangle_+$, c.f.r. (33.22), si trova (uguagliando i coefficienti del secondo ordine in \underline{G} dei due membri della (33.27) e usando per semplificare il risultato che $\langle J_i \rangle_+ |_{\underline{G}=\underline{0}} = 0$):

$$33.32 \quad \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle J_i(S_t \cdot) J_j(\cdot) \rangle_+ |_{G=0} dt \quad (33.32)$$

che, ponendo $i = j$, ci fa vedere che il teorema di fluttuazione (33.8) si riduce, nel limite in cui $\underline{G} \rightarrow \underline{0}$ al teorema di fluttuazione dissipazione *per una singola corrente* (ossia alla più semplice formula di Green–Kubo).

Per vedere che il teorema di fluttuazione implica più in generale le relazioni di Onsager e il teorema di fluttuazione dissipazione generale, sempre nel limite $\underline{G} = 0$, occorre usare la sua formulazione più generale (33.17).

Si sceglie, fissato j , come osservabile $\kappa_1(x) \equiv \kappa(x)$ la grandezza $\kappa(x) = G_j \partial_j \sigma(x)$ che è "dispari" nel senso discusso in relazione alla (33.18), e si definisce $q_1 \equiv q$ come:

$$33.33 \quad \int_{-\tau/2}^{\tau/2-1} \kappa(S_t x) dt = \tau G_j \langle \partial_j \sigma \rangle_+ q = \tau \langle \kappa \rangle_+ q \quad (33.33)$$

e procedendo come nel caso già visto, si calcola $\zeta(p, q)$ calcolando prima la trasformata di Laplace:

$$33.34 \quad e^{\tau \lambda(\beta_1, \beta_2)} = \int e^{\beta_1(p-1)\langle \sigma \rangle_+ + (q-1)\langle \kappa \rangle_+ - \tau \zeta(p, q)} dp dq \quad (33.34)$$

sempre con il *metodo dei cumulanti* e trascurando il terzo ordine in \underline{G} . La $\zeta(p, q)$ viene poi calcolata a mezzo di una trasformata di Legendre (come dopo le (33.23)) su due variabili β_1, β_2 .

Confrontando il risultato con il teorema di fluttuazione si perviene, dopo calcoli elementari analoghi a quelli già descritti, alla relazione:

$$33.35 \quad \langle G_j \partial_j \sigma \rangle_+ = \frac{1}{2} C_{12} + O(G^3) \quad (33.35)$$

analogo alla (33.28). E questa relazione, *ora asimmetrica perchè j gioca un ruolo speciale* essendo stato fissato *a priori*, combinata con la (33.28) si traduce in $L_{ij} = L_{ji}$, essenzialmente ripetendo le osservazioni conducenti alla (33.32), c.f.r. [G9], e, allo stesso tempo, nella relazione di Green–Kubo:

$$33.36 \quad L_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle J_i(S_t \cdot) J_j(\cdot) \rangle_+ |_{G=0} dt \quad (33.36)$$

versione *non simmetrica* della più semplice (33.32).

(C) *Applicazione fluidodinamica.*

Come applicazione possiamo considerare l' equazione:

$$33.37 \quad \dot{\underline{u}} + (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u})^{(\kappa)} = -\underline{\partial} p \quad (33.37)$$

con $\underline{u} = \sum_{\kappa < |\underline{k}| < 2\kappa} \underline{u}_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}}$, $\underline{u}_{\underline{k}} = \overline{\underline{u}_{-\underline{k}}}$, $\underline{k} \cdot \underline{u}_{\underline{k}} = 0$; e con $f^{(\kappa)}$ si denota il troncamento della serie di Fourier della funzione f ai modi \underline{k} tali che $\kappa < |\underline{k}| < 2\kappa$. Possiamo interpretare quest' equazione come un' equazione che descrive il moto di un "singolo strato inerziale" di modi di Fourier nell' equazione di Navier Stokes nel senso del §29, §30: *c.f.r.* (29.8) con C corrispondente ad un dato valore di ε .

Supponiamo anche che l' energia (conservata dalla dinamica della (33.37)) sia $E = C\kappa^{-2/3}$: cioè sia data dal contenuto in energia, nella distribuzione di Kolmogorov, dello strato di momenti in $(\kappa, 2\kappa)$.

Domandiamo ora quale sia la risposta del sistema all' introduzione di una forza $\underline{g}_{\underline{k}}$ infinitesima agente sul modo \underline{k} , mentre il sistema viene mantenuto a *energia costante* E a mezzo di una forza definita dal principio di Gauss, supponendo cioè che il sistema sia retto (in presenza di forze) da un' equazione:

$$33.38 \quad \dot{\underline{u}} + (\underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u})^{(\kappa)} = -\underline{\partial} p - \kappa^2 \alpha \underline{u} + \underline{g}_{\underline{k}} \quad (33.38)$$

con:

$$33.39 \quad \alpha = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\sum_{\underline{k}} \overline{\underline{u}_{\underline{k}}} \cdot \underline{g}_{\underline{k}}}{\sum_{\underline{k}} |\underline{u}_{\underline{k}}|^2} \quad (33.39)$$

Quest' equazione è reversibile ed è forzata dalla forza esterna \underline{g} . La produzione di entropia è nulla se $\underline{g} = \underline{0}$ e quindi siamo nella situazione del punto (B).

Ne segue che in questo regime si avrà:

$$33.40 \quad L_{\underline{k}, \beta; \underline{k}', \beta'} = \partial_{\underline{g}_{\underline{k}, \beta}} \langle \gamma_{\underline{k}', \beta'} \rangle_+ |_{\underline{g}=\underline{0}} = L_{\underline{k}', \beta'; \underline{k}, \beta} \quad (33.40)$$

perchè dalla (33.39) si vede che $\partial_{\underline{g}_{\underline{k}, \beta}} \sigma = \gamma_{\underline{k}, \beta}$.

Questo mostra dunque che se la congettura del §31 sulla equivalenza degli insiemi statistici fosse interpretabile in senso "lato" opportuno se ne potrebbero forse dedurre relazioni di reciprocità per i fluidi di Navier Stokes in regime di alta turbolenza. E appare addirittura possibile che tali relazioni siano verificabili sperimentalmente sia in esperimenti reali che numerici. Ma porre queste predizioni in forma chiara e suscettibile di verifica richiede ulteriori analisi e idee. Cercherò di esporle nel §34.

Bibliografia: [GC1], [GC2], [BGG], [G12]. La connessione fra teorema di fluttuazione e formule di Green-Kubo è stata osservata empiricamente negli

esperimenti in [BGG] e ivi correttamente interpretata da uno degli autori (P.G.) e da essa la teoria delle relazioni di Onsager di questo paragrafo ha preso le mosse.

§34 *La struttura dell' attrattore per le equazioni di Navier–Stokes. Equazioni di Eulero dissipative. Formula barometrica.*

E per concludere l' opera ci dedichiamo ad un tentativo di approfondimento delle teoria di Kolmogorov e alla descrizione di ulteriori proprietà di quello che chiamerò l' *attrattore di Navier–Stokes*, intendendo con questo le proprietà statistiche della distribuzione invariante associata all' evoluzione di Navier–Stokes.

(A) *Equazioni reversibili e irreversibili per un fluido reale.*

Considererò allo scopo le seguenti quattro equazioni:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} + \nu \Delta \underline{u}, & \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 & \text{NS} \\
 \dot{\underline{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} + \beta \Delta \underline{u}, & \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 & \text{GNS} \\
 \dot{\underline{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} - \chi \underline{u}, & \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 & \text{ED} \\
 \dot{\underline{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p + \underline{g} - \alpha \underline{u}, & \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 & \text{GED}
 \end{aligned} \tag{34.1}$$

che descrivono il moto di un fluido incompressibile in una regione Ω che potrà essere un toro tridimensionale eventualmente privato di alcune regioni circolari (*ostacoli*). Per semplicità converrà supporre che le gli ostacoli, se presenti, siano tali che ripetendoli periodicamente nello spazio ottundano la visione dell' infinito (cioè non ci sia alcuna retta tracciabile nello spazio senza intersecare gli ostacoli o le loro copie).

Sul bordo degli ostacoli porremo condizioni al bordo di scorrimento, ossia $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ se \underline{n} è la normale agli ostacoli.

La prima equazione è l' equazione di Navier–Stokes, o NS, con viscosità ν . La seconda equazione è l' equazione gaussiana di Navier–Stokes, o GNS, introdotta in §31.¹ Come visto al §31 questo significa che β è, (31.4):

$$\beta(\underline{u}) = \frac{\int_{\Omega} (\underline{\partial} \wedge \underline{g} \cdot \underline{\omega} + \underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \cdot \underline{\partial} \underline{u})) d\underline{x}}{\int_{\Omega} (\underline{\partial} \wedge \underline{\omega})^2 d\underline{x}} \tag{34.2}$$

La terza equazione, *c.f.r.* §29 (D), sarà chiamata equazione di *Eulero dissipativa*, o ED: e rappresenta un fluido non viscoso ideale che si muove su un “fondo coloso”: si pensi al caso $d = 2$ in cui il fluido si muove su

¹ Il moltiplicatore necessario a mantenere fissa la vorticità totale $\eta L^3 = \rho \int \underline{\omega}^2 dx$, con $\underline{\omega} = \underline{\partial} \wedge \underline{u}$, è qui cambiato in β , *c.f.r.* (31.3).

una superficie reale (“rugosa”). La costante χ può esser chiamata *viscosità collosa*, c.f.r. §29. Nel caso $d = 3$, che qui ci interessa, quest’ equazione non sembra essere un buon modello per un fluido reale e sarà qui considerata inizialmente solo allo scopo di confronto con l’ equazione di Navier–Stokes. Ma risulterà dalla discussione che la connessione fra le quattro equazioni è in realtà molto stretta ed esse sono in un certo senso *equivalenti*.

La quarta equazione sarà chiamata *equazione gaussiana–dissipativa* di Eulero, o GED, e qui α è un moltiplicatore definito in modo che l’ energia cinetica totale $\varepsilon L^3 = \frac{\rho}{2} \int \underline{u}^2 dx$ sia una costante del moto *a dispetto* dell’ azione della forza \underline{g} ; questo significa che α è dato da:

$$34.3 \quad \alpha(\underline{u}) = \frac{\int_{\Omega} \underline{g} \cdot \underline{u}}{\int_{\Omega} \underline{u}^2} \quad (34.3)$$

Un’ equazione simile ma con un diverso vincolo è stata considerata in [SJ]: il vincolo ivi considerato è che il contenuto in energia per unità di volume in ogni scala di momento, nel senso del §29, è prefissato e uguale al valore previsto dalla teoria K41 (ossia $\int_{k_n}^{k_{n+1}} K(k) dk \propto (\nu\eta)^{2/3} k_n^{2/3}$, c.f.r. (29.12), se $k_n = 2^n k_0 = 2^n \frac{2\pi}{L}$).

Sia le equazioni GED che le GNS hanno una simmetria in \underline{u} , che fa sì che siano *reversibili* nel senso che se S_t è il flusso che risolve le equazioni (in modo che $t \rightarrow S_t \underline{u} = \underline{u}(t)$ sia la soluzione con dato iniziale \underline{u}), allora la trasformazione $i : \underline{u} \rightarrow -\underline{u}$ *anticommuta* con l’ evoluzione temporale:

$$34.4 \quad i S_t = S_{-t} i \quad (34.4)$$

In mancanza di risultati sull’ esistenza e unicità delle equazioni (34.1) considereremo solo le equazioni troncate, c.f.r. §9, con momento di taglio K molto grande sì da poter ritenere che le soluzioni delle equazioni troncate possano essere un buon modello per il moto.

Il troncamento sarà eseguito su una base ortonormale conveniente nello spazio dei campi \underline{u} a divergenza nulla: considereremo naturale, viste le condizioni al contorno, utilizzare la base generata dal *principio minimax*, c.f.r. problemi del §9, applicato alla forma quadratica di Dirichlet $\int_{\Omega} (\underline{\partial} \underline{u})^2 d\underline{x}$

definita sullo spazio dei campi $\underline{u} \in C^\infty(\Omega)$ a divergenza nulla e tangenti alle frontiere degli ostacoli: $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ su $\partial\Omega$ e $\underline{\partial} \cdot \underline{u} = 0$ in Ω .

I campi della base verificheranno allora, c.f.r. §9, $\Delta \underline{u}_j = -E_j \underline{u}_j + \underline{\partial}_j \mu$, con $\underline{u}_j, \mu_j \in C^\infty$, se μ_j è un opportuno moltiplicatore e E_j sono autovalori.

Ad esempio *nel caso di contenitore privo di ostacoli* sia $\underline{u} = \sum_{\underline{k} \neq 0} \underline{\gamma}_{\underline{k}} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}}$ la rappresentazione come serie di Fourier, con $\underline{\gamma}_{\underline{k}} = \overline{\underline{\gamma}_{-\underline{k}}}$ e $\underline{k} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}} = 0$; qui il “momento” \underline{k} ha componenti che sono multipli interi del momento “più basso” $k_0 = \frac{2\pi}{L}$. Allora si consideri l’ equazione:

$$34.5 \quad \dot{\underline{\gamma}}_{\underline{k}} = -\vartheta(\underline{k}) \underline{\gamma}_{\underline{k}} - i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}} (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) \Pi_{\underline{k}} \underline{\gamma}_{\underline{k}_2} + \underline{g}_{\underline{k}} \quad (34.5)$$

in cui i \underline{k} assumono solo valori $0 < |\underline{k}| < K$ per qualche *momento di taglio* opportunamente grande $K > 0$ e $\Pi_{\underline{k}}$ è la proiezione sul piano ortogonale a \underline{k} . Questa è un'equazione che definisce un "troncamento a scala K " delle equazioni (34.1) se:

$$34.6 \quad \begin{cases} \vartheta(\underline{k}) = -\nu \underline{k}^2 & \text{caso NS} \\ \vartheta(\underline{k}) = -\beta \underline{k}^2 & \text{caso GNS} \end{cases} \quad \begin{cases} \vartheta(\underline{k}) = -\chi & \text{caso ED} \\ \vartheta(\underline{k}) = -\alpha & \text{caso GED} \end{cases} \quad (34.6)$$

E per semplicità possiamo supporre, in questo caso privo di ostacoli, che il modo $\underline{k} = \underline{0}$ sia assente, cioè $\underline{\gamma}_0 = \underline{0}$: questo è possibile se, come supporrò, la forza esterna \underline{g} non ha componente sul modo $\underline{0}$ di Fourier (ossia ha media nulla).

Nel caso senza ostacoli è anche facile esprimere i coefficienti α, β per le equazioni troncate:

$$34.7 \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sum_{0 < |\underline{k}| < K} \underline{\bar{g}}_{\underline{k}} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}}}{\sum_{0 < |\underline{k}| < K} \underline{\gamma}_{\underline{k}}^2} \\ \beta &= \beta_i + \beta_e, \quad \beta_e = \frac{\sum_{\underline{k} \neq \underline{0}} \underline{k}^2 \underline{g}_{\underline{k}} \cdot \underline{\bar{\gamma}}_{\underline{k}}}{\sum_{\underline{k}} \underline{k}^4 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}|^2} \\ \beta_i &= \frac{-i \sum_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 = \underline{0}} \underline{k}_3^2 (\underline{\gamma}_{\underline{k}_1} \cdot \underline{k}_2) (\underline{\gamma}_{\underline{k}_2} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}_3})}{\sum_{\underline{k}} \underline{k}^4 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}|^2} \end{aligned} \quad (34.7)$$

ove le \underline{k} assumono solo i valori $0 < |\underline{k}| < K$, con un taglio al momento $K > 0$, e $\Pi_{\underline{k}}$ è la proiezione ortogonale sul piano ortogonale a \underline{k} .

I casi in cui la regione Ω contiene ostacoli è assai simile, anche se non si possono scrivere espressioni semplici per i campi della base e, quindi, nemmeno per le equazioni troncate, che formalmente sono molto vicine alle (34.5), *c.f.r.* §9, al punto che per brevità ci riferiremo sempre alle (34.5)÷(34.7) *anche* nei casi in cui si considereranno altre condizioni al bordo (ovviamente in tali casi si dovrà pensare che in realtà le equazioni siano un pò diverse, ad esempio il $|\underline{k}|$ sarà in realtà $\sqrt{E_j}$ *etc*, ma le differenze non saranno mai importanti salvo quando esplicitamente menzionato).

Denotiamo con $S_t^{\nu, ns} \underline{u}, S_t^{\eta, gns} \underline{u}, S_t^{\chi, ed} \underline{u}, S_t^{\varepsilon, ged} \underline{u}$ le soluzioni delle equazioni (34.5), o delle corrispondenti nei casi con ostacoli, con dato iniziale \underline{u} . O in generale:

$$34.8 \quad S_t^{\xi} \underline{u}, \quad \xi = (\nu, ns), (\eta, gns), (\chi, ed), (\varepsilon, ged) \quad (34.8)$$

L'indice ξ specifica il modello che si considera fra i quattro modelli $\xi = ns, gns, ed, ged$. Si noti che lo "spazio delle fasi" non è in generale lo stesso per i vari modelli, perchè in alcuni di essi (GNS e GED) i campi di velocità sono sottoposti a determinati vincoli.

Mantenendo la forza non conservativa \underline{g} costante supporremo che per ogni equazione, cioè per ogni scelta dell'indice ξ , (34.8), ci sia un' unica

distribuzione stazionaria μ_ξ che descrive la statistica dei dati iniziali \underline{u} scelti con distribuzione μ_0 dotata di densità sullo spazio delle fasi che, essendo $K < \infty$, ha dimensione finita.

Il valore di K sarà fissato nel caso NS ponendo $K = k_\nu$; nel caso GNS si sceglierà $K = K^1$ talmente grande che il valor medio $\langle \beta \rangle_{\eta, gns} \stackrel{def}{=} \tilde{\nu}$ divenga indipendente da K (si suppone che ciò sia possibile) e poi si sceglierà $K = \max(k_\nu, K^1)$. Nei casi ED e GED si faranno scelte di K analoghe, sempre nell'ipotesi che a χ, g fissi esista un valore di K tale che le medie temporali dell'osservabile α divengano indipendenti da K .

Quanto segue però *non* dipende dalla scelta fatta su K : quindi qualora non si voglia presupporre quest'ipotesi di stabilità “ultravioletta” rispetto ai valori di K (che ragionevolmente potrebbe apparire irragionevole) si potrà supporre che K sia solo “grande”.

L'ipotesi di esistenza della statistica significa che, data un'osservabile F sullo spazio delle fasi \mathcal{F} (dei campi di velocità, con taglio al momento K), si ha:

$$34.9 \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(S_t^\xi \underline{\gamma}) dt = \int_{\mathcal{F}} F(\underline{\gamma}') \mu_\xi(d\underline{\gamma}') \stackrel{def}{=} \langle F \rangle_\xi \quad (34.9)$$

per tutte le scelte di $\underline{\gamma}$ tranne un insieme di volume nullo (rispetto alla misura di volume sullo spazio delle fasi).

La distribuzione μ_ξ sarà chiamata la distribuzione SRB per le equazioni (34.5), (34.6).

Un ruolo particolare sarà tenuto, come si immagina dall'analisi dei §31, §32, §33, dalle $\langle \eta \rangle_\xi, \langle \varepsilon \rangle_\xi$ e dalle medie $\langle \alpha \rangle_\xi, \langle \beta \rangle_\xi$ oltre che, evidentemente, dal tasso di produzione di entropia $\sigma(\underline{\gamma})$ *definito*, in accordo con quanto detto al §33, dalla *divergenza* del membro di destra delle equazioni troncate e della sua media $\langle \sigma \rangle_\xi$ (nel §31 questa quantità è stata denotata $\delta(x)$).

Considerando esplicitamente il caso privo di ostacoli sia:

- D_K il numero di modi \underline{k} with $0 < |\underline{k}| < K$: sì che il numero di componenti (indipendenti) $\{\gamma_{\underline{k}}\}$ è $2D_K$ (si noti che $\gamma_{\underline{k}}$ ha due componenti complesse indipendenti per ogni \underline{k} ma $\gamma_{\underline{k}} = \overline{\gamma_{-\underline{k}}}$).
- $2\overline{D}_K = \sum_{|\underline{k}| < K} 2\underline{k}^2$ (che nel caso con ostacoli diverrebbe la quantità $2\overline{D}_K = \sum_{\sqrt{E_j} < K} \sqrt{E_j}$).

si trova che la contrazione dello spazio delle fasi per unità di tempo è σ data da:

$$34.10 \quad \begin{aligned} \sigma &= 2\overline{D}_K \nu & \xi &= (\nu, ns) \\ \sigma &= 2\overline{D}_K \beta - \overline{\beta}_e - \overline{\beta}_i & \xi &= (\eta, gns) \\ \sigma &= 2D_K \chi & \xi &= (\chi, ed) \\ \sigma &= 2D_K \alpha - \alpha & \xi &= (\varepsilon, ged) \end{aligned} \quad (34.10)$$

ove $\overline{\beta}_i, \overline{\beta}_e$ sono definiti convenientemente. Ad esempio nel caso senza ostacoli:

$$\bar{\beta}_e = \frac{\sum_{\underline{k}} \underline{k}^2 \underline{g}_{\underline{k}} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}}}{\sum_{\underline{k}} \underline{k}^4 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}|^2} - 2 \frac{(\sum_{\underline{k}} \underline{k}^2 \underline{g}_{\underline{k}} \cdot \underline{\gamma}_{\underline{k}})(\sum_{\underline{k}} \underline{k}^4 \underline{\gamma}_{\underline{k}}^2)}{(\sum_{\underline{k}} \underline{k}^4 |\underline{\gamma}_{\underline{k}}|^2)^2} \quad (34.11)$$

sì che $\sigma \simeq 2\bar{D}_K \beta$ per $\xi = (\eta, gns)$ e $\sigma \simeq 2D_K \alpha$ per $\xi = (\varepsilon, ged)$.

Poste queste definizioni è stata proposta (c.f.r. §31) la seguente congettura che chiamerò la *congettura di equivalenza delle statistiche dinamiche*:

Congettura NS: *Le statistiche $\mu_{\nu,ns}$ e $\mu_{\eta,gns}$ dell'equazione NS e, rispettivamente, quelle dell'equazione GNS sono equivalenti nel limite in cui il numero di Reynolds R tende all'infinito purchè i parametri η e ν siano legati in modo che $\langle \sigma \rangle_{\nu,ns} = \langle \sigma \rangle_{\eta,gns}$ (ovvero $\nu = \langle \beta \rangle_{\eta,gns}$).*

Equivalente significa che i rapporti fra valori medi delle stesse “osservabili locali” rispetto alle due distribuzioni tendono a 1 per $R \rightarrow \infty$. Per *osservabile locale* si intende un’osservabile che dipende dal campo \underline{u} tramite le sole componenti di scala compresa fra due valori fissati nel dominio inerziale: ossia dalle sole componenti del campo $\underline{\gamma}_{\underline{k}}$ con $k_1 < |\underline{k}| < k_2$ con $k_1 \gg k_0$ e $k_2 < \infty$: la “località” è intesa dunque nello “spazio dei momenti”; il numero di Reynolds è definito qui come $R = \varepsilon^{1/3} L^{4/3} \nu^{-1}$, c.f.r. commenti alla (29.9). Nel caso di condizioni al bordo non periodiche la *scala* di una componente γ_j del campo sarà determinata dal valore $\sqrt{E_j}$ del corrispondente autovettore \underline{u}_j .

E una congettura di equivalenza statistica analoga può essere avanzata per le equazioni ED e GED:

Congettura ED: *Le statistiche $\mu_{\chi,ed}$ e $\mu_{\varepsilon,ged}$ delle equazioni ED e delle equazioni GED sono equivalenti nel limite di grande numero di Reynolds purchè i parametri ε e χ siano legati in modo che $\langle \sigma \rangle_{\chi,ed} = \langle \sigma \rangle_{\varepsilon,ged}$ (ovvero $\chi = \langle \alpha \rangle_{\varepsilon,ged}$).*

Chi abbia familiarità con la Meccanica Statistica riconoscerà nelle congetture appena enunciate una forte analogia con gli analoghi enunciati sulla equivalenza degli insiemi statistici, c.f.r. [G6]: con il limite $R \rightarrow \infty$ che gioca il ruolo del limite termodinamico.

L’idea della possibilità di descrivere in termini di *insiemi statistici* le proprietà statistiche dei sistemi fuori dall’equilibrio si è gradualmente sviluppata nella letteratura recente e in parallelo è emersa l’idea della possibilità di descrizioni equivalenti in termini di insiemi statistici diversi, c.f.r. [SJ], [G8], [G10].

Su base euristica le congetture sarebbero giustificate se il *tasso di creazione di entropia* raggiungesse il suo valore medio su una scala di tempo rapida rispetto alle scale di tempo caratteristiche dell’idrodinamica. I coefficienti $\alpha \simeq (2D_K)^{-1} \sigma$, e $\beta \simeq (2\bar{D}_K)^{-1} \sigma$, (34.10), potrebbero essere identificati con i loro valori medi $\langle \alpha \rangle_{\varepsilon,gne}$ o $\langle \beta \rangle_{\eta,gns}$ e quindi identificati con le costanti di viscosità ν or χ .

In questo modo le equazioni GNS e NS sarebbero equivalenti ed entrambe

sarebbero manifestazioni macroscopiche di due meccanismi di dissipazione microscopica equivalenti. L'uno esplicitamente specificato dal vincolo gaussiano di vorticità totale costante (e quindi dissipazione totale, per la proporzionalità fra le due grandezze), l'altro con dissipazione fluttuante *a priori* ma modellabile fenomenologicamente a mezzo di una viscosità costante.

Lo stesso si potrà dire della relazione che intercorre fra le equazioni ED e GED.

Ora si pone il problema di vedere come estrarre dalle congetture appena discusse qualcosa di osservabile in esperimenti. Questo sarà possibile combinando quanto ora detto con l'ipotesi caotica dei precedenti paragrafi.

(B) *L'Assioma C e la regola di accoppiamento.*

Purtroppo sarà ancora necessario proporre assunzioni che non potranno essere giustificate altro che dall'eventuale verifica delle loro conseguenze. Tuttavia trattandosi qui del capitolo conclusivo di quest'ipotesi d'introduzione alla meccanica dei fluidi ritengo lecito dilungarsi su di esse, anche perché alla fine una discussione un pò sbilanciata dal punto di vista euristico può essere stimolante.

Quanto segue va dunque visto come un insieme di idee che si sono sviluppate naturalmente meditando sui molti lavori consultati per svolgere il compito che mi prefissi molti anni orsono, e cioè di presentare agli studenti del mio corso di Meccanica dei fluidi una introduzione ragionata a un vastissimo campo d'indagine.

La difficoltà principale all'applicazione del teorema di fluttuazione alle equazioni GNS o GED, pur reversibili, è che si tratta di sistemi *molto fuori dell'equilibrio* e quindi non si potrà immaginare che l'insieme attrattivo sia tutto lo spazio delle fasi: tipicamente ci si aspetta infatti che l'attrattore abbia dimensione di Hausdorff finita ed esistono vari argomenti in favore di questa idea, mentre lo spazio delle fasi ha *a priori* dimensione infinita.

Allora l'ipotesi caotica ci dice che “le cose vanno come se” l'attrattore fosse una superficie liscia sulla quale la dinamica è ben modellata da un'evoluzione S che è iperbolica.

Se inoltre si suppone che la dinamica verifichi l'assioma C la reversibilità delle equazioni GED o GNS si tradurrà nell'esistenza, *c.f.r.* §32, di una trasformazione di inversione temporale i^* che lascia invariante l'insieme attrattivo.

Dunque varrà il teorema di fluttuazione, *c.f.r.* §33. Ma ovviamente la contrazione dello spazio delle fasi che entra nella sua formulazione *non sarà* σ perché quest'ultima è la contrazione del volume *totale* e non dell'elemento di volume sulla superficie dell'insieme attrattivo.

Né si può sperare di caratterizzare in modo semplice l'insieme attrattivo allo scopo di poterne calcolare l'elemento di superficie. Una qualsiasi teoria che faccia riferimento alle “equazioni dell'insieme attrattivo” rischia fortemente di restare totalmente inapplicabile: si veda, tuttavia, il caso

del modello GOY del §30 in cui si sono proposte le equazioni dell'insieme attraente, *c.f.r.* (30.22).

Il soccorso giunge da una proprietà la cui validità si è andata via via trasformando da “curiosità” a “fatto interessante ma eccezionale” a “fatto interessante spesso verificato”. È una notevole proprietà degli esponenti di Lyapunov di sistemi caotici legati in qualche modo a sistemi hamiltoniani afflitti da fenomeni dissipativi.

Si è notato, a partire dal lavoro di Dressler, [Dr], che in certi sistemi hamiltoniani a ℓ gradi di libertà e soggetti a particolari forme d'attrito gli esponenti di Lyapunov ordinati a decrescere i primi ℓ , λ_j^+ con $j = 1, \dots, \ell$, e a crescere gli ultimi ℓ , λ_j^- con $j = 1, \dots, \ell$, sono tali che:

$$34.12 \quad \frac{1}{2}(\lambda_j^+ + \lambda_j^-) = \text{costante} \quad \text{per ogni } j \quad (34.12)$$

Anzi questa proprietà è addirittura vera, almeno nei primi esempi addotti e se la metrica che si usa è opportunamente scelta, per gli autovalori delle matrici di espansione e contrazione locali, cioè anche senza considerare il limite che appare nella definizione degli esponenti di Lyapunov, ma in tal caso la costante dipende dal punto dello spazio delle fasi ove le espansioni e contrazioni sono calcolate.

La scoperta della “*regola di accoppiamento*” ♣31.12 è dovuta ad un risultato sperimentale, [ECM1], mentre le dimostrazioni matematiche e le condizioni generali di validità hanno seguito il lavoro sperimentale: questo è un ulteriore esempio di una proprietà matematica importante e, tuttavia, di dimostrazione relativamente semplice che non è stata prima riconosciuta dai numerosi matematici specialisti nella teoria dei sistemi dinamici.

Definiamo qui gli *esponenti di Lyapunov locali* su un tempo τ come gli autovalori della matrice $(J_\tau^T(x)J_\tau(x))^{1/2\tau}$ se $J_\tau(x)$ è la matrice jacobiana della trasformazione S^τ come trasformazione fra $S^{-\tau/2}x$ e $S^{\tau/2}x$ (τ pari).

Il valore della costante in (34.12) è (ovviamente) il valore medio della contrazione dello spazio delle fasi.

Recentemente la *regola di accoppiamento* (34.12), [DM], [WL98], è stata dimostrata valida, *nella versione locale*, in classi abbastanza vaste di sistemi (detti *isocinetici*) soggetti a vincoli dissipativi gaussiani in cui si forza mediante l'azione di forze esterne localmente conservative (ma ovviamente non globalmente tali, quale un campo elettrico elettromotore) un sistema di particelle assoggettandolo al vincolo gaussiano di mantenere energia cinetica totale costante.

L'interesse di un sistema reversibile dissipativo per il quale valga la regola di accoppiamento in senso locale sta nel fatto che per esso sembra possibile stabilire in modo naturale una relazione fra la contrazione della superficie dell'insieme attraente e quella dell'intero spazio delle fasi $\sigma(x)$.

Invero, seguendo l'analisi in [BGG], se $2N$ è la dimensione dello spazio delle fasi e $2(N - M)$ quella dell'insieme attraente si potrà scrivere che la

contrazione dello spazio delle fasi sulla superficie dell'insieme attrattante A è $\sigma(x) = \sigma_0(x) + \sigma_\perp(x)$ ove σ_0 è il tasso di contrazione sull'insieme attrattante e σ_\perp quello sulla parte della varietà stabile del punto x che “è fuori di A ”.

Questo si può interpretare pensando che lo spazio tangente in x consista di $2(N - M)$ direzioni $N - M$ delle quali espansive e $N - M$ contrattive che sono tangenti a A e in $2M$ direzioni *tutte contrattive* che invece riguardano la parte di varietà stabile che esce dall'insieme attrattante e, *inoltre*, appare naturale che le *coppie* di esponenti siano divise in $N - M$ *coppie* relative alle $2(N - M)$ direzioni tangenti a A e nelle $2M$ rimanenti.

Questa non è l'unica possibilità, ma è certamente la più semplice. E se si verifica allora si deduce immediatamente che:

$$34.13 \quad \sigma_0(x) = \frac{N - M}{N} \sigma(x) \quad (34.13)$$

cioè si ha *proporzionalità fra la contrazione totale dello spazio delle fasi e quella dell'elemento di superficie dell'insieme attrattante*.

Poichè $\sigma(x)$ è direttamente accessibile, o almeno più direttamente accessibile dei singoli esponenti di Lyapunov, vediamo il grande potenziale della regola di accoppiamento. Ad esempio combinata con il teorema di fluttuazione del §33 ci dice che, *c.f.r.* (33.8):

$$34.14 \quad \zeta(-p) - \zeta(p) = (1 - \frac{M}{N}) \langle \sigma \rangle_{+p} \quad (34.14)$$

ove $\zeta(p)$ è definito dalla (33.7) in termini della contrazione *totale* (data da σ) dello spazio delle fasi.

La (34.14) fornisce il risultato, forse a prima vista sorprendente, che la pendenza della $\zeta(-p) - \zeta(p)$ in funzione di p *diminuisce* di $1 - \frac{M}{N}$ se la dimensione dell'attrattore diminuisce, ossia se i fenomeni viscosi aumentano. Questo risultato, pur non ancora controllato in alcun esperimento, pare almeno consistente con i risultati degli esperimenti in §6 di [BGG] (che lo hanno ispirato).

Cosa tutto questo ha a che vedere con le (34.1)? Anzitutto se il campo \underline{g} forzante è localmente conservativo (caso possibile solo se il contenitore Ω ha dei buchi!)² si deve osservare che, *c.f.r.* [G10], i sistemi ED e GED rientrano *naturalmente* nei casi in cui la regola d'accoppiamento è stata dimostrata. Il primo è un caso particolare del teorema in [Dr] mentre il secondo lo è del teorema in [DM].

L'osservazione chiave è che le equazioni di Eulero vanno pensate come *metà* delle equazioni che descrivono il moto del fluido: l'altra metà delle equazioni è quella che descrive il campo degli spostamenti $\underline{\delta}(x)$ dei punti del

² Perchè non è possibile definire su un toro un campo vettoriale \underline{g} a media nulla localmente conservativo e non globalmente tale (quindi non banalmente assorbibile nel termine di pressione dell'equazione): perchè un tale campo esista occorre che ci siano dei buchi, cioè regioni escluse al fluido.

fluido incompressibile rispetto alle posizioni che essi hanno in una configurazione di riferimento:

$$34.15 \quad \dot{\underline{\delta}}(x) = \underline{u}(\underline{\delta}(x)), \quad \underline{\dot{u}}(x) + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\partial} p(x) \quad (34.15)$$

come è stato discusso in dettaglio al §7, punto (E), (7.29).

Fatta quest’ osservazione è facile far vedere che, almeno formalmente, le equazioni ED e GED non sono altro che equazioni ottenute imponendo una forza esterna localmente conservativa ed un attrito proporzionale alla velocità nel caso ED oppure, nel caso GED, corrispondente all’ imposizione del vincolo isocinetico cioè al vincolo $\int \underline{u}^2 dx = \text{costante}$ a mezzo del principio di Gauss.

Dunque ci si attende la validità della regola di accoppiamento *per le equazioni (34.15) nello spazio delle fasi a numero doppio di dimensioni* in cui sono anche descritti gli spostamenti $\underline{\delta}(x)$ rispetto ad una configurazione di riferimento, si veda [G10] per i dettagli. Naturalmente gli esponenti di Lyapunov dell’ equazione GED *non* verificheranno *da soli* la regola di accoppiamento perchè molte delle coppie consisteranno in coppie di esponenti di cui uno relativo alla GED e l’ altro relativo ai gradi di libertà addizionali “di spostamento”.

Ma un attento esame delle dimostrazioni delle regole di accoppiamento nei casi in cui sono note, si veda [DM], [WL98], induce a pensare che, nonostante i molti esempi, la regola di accoppiamento *non sia generale*. Ad esempio non pare ragionevole che valga nel caso dell’ equazione GNS. Per poter dunque ottenere informazioni dal teorema di fluttuazione occorre, oltre all’ ipotizzare la validità dell’ assioma C, qualche estensione della regola di accoppiamento che consenta di stabilire una relazione fra il tasso di contrazione dello spazio delle fasi σ e quello della superficie dell’ insieme attraente σ_0 .

La discussione in [G10] propone invero di *definire* nel caso della equazione GNS i numeri c_j come:

$$34.16 \quad c_j = \frac{\lambda_j^+ + \lambda_j^-}{\langle \beta \rangle_+} \quad (34.16)$$

ove $\langle \beta \rangle_+$ è la media rispetto alla distribuzione $\mu_{\eta, gns}$. Nel caso NS si deve invece definire c_j mediante la (34.16) con ν che sostituisce $\langle \beta \rangle_+$. E propone, poi, la seguente generalizzazione della regola di accoppiamento:

Gli esponenti locali di Lyapunov verificano la (34.16) in media e il valore medio è raggiunto molto rapidamente. In tal modo si può considerare la (34.16) come localmente vera e quindi ripetere l’ argomento che collega la contrazione dello spazio delle fasi alla contrazione della superficie dell’ insieme attraente.

Poichè la contrazione del volume nello spazio delle fasi delle equazioni in questione è la stessa sia che si riguardino le equazioni come equazioni per

i soli campi di velocità o anche dei campi di velocità \underline{u} e di spostamento $\underline{\delta}$ (esercizio) si deduce allora che le fluttuazioni della contrazione totale $\sigma(x)$ sullo spazio delle fasi verifica un teorema di fluttuazione e la quantità $\zeta(-p) - \zeta(p)$ è lineare in p .

Il coefficiente di proporzionalità è misurabile dalla *sola* statistica delle soluzioni delle equazioni per il campo \underline{u} e vale $P\langle\alpha\rangle_+$ nei casi delle equazioni GED e $\overline{P}\langle\beta\rangle_+$ nel caso delle equazioni GNS ove P è il numero di coppie di esponenti di Lyapunov con un elemento > 0 e uno < 0 diviso per il numero totale di coppie, mentre \overline{P} è $\sum_j^* c_j / \sum_j c_j$ ove \sum_j^* verte sui soli j cui corrisponde una coppia di esponenti di Lyapunov di segno opposto.

Viste le congetture sull' equivalenza si potrebbe sperare di tradurre le predizioni sulle equazioni GNS o GED, immediatamente, in predizioni per le equazioni NS e ED rispettivamente. Per ED definendo α via la (34.7) e σ via la quarta delle (34.8) corrispondente ci si potrebbe aspettare che le fluttuazioni di σ verifichino un teorema di fluttuazione con pendenza $P\chi$.

E similmente ci si aspetterebbe nel caso NS che, definendo β via la (34.7) e σ via la seconda delle (34.10), allora σ verifichi un teorema di fluttuazione con pendenza $\overline{P}\nu$. *Questo naturalmente quando sono verificate le condizioni di equivalenza delle congetture al punto (A).*

Quanto detto è però reso dubbio dal fatto che il teorema di fluttuazione riguarda la quantità σ , divergenza delle equazioni del moto, che è una quantità non “locale” nello spazio dei momenti (nel senso sopra indicato) ma globale. Nella Meccanica Statistica le analoghe osservabili sono osservabili non locali che sono, spesso, osservabili che hanno distribuzioni differenti *anche in insiemi statistici equivalenti* (si pensi all' energia totale nell' insieme canonico e nel microcanonico).

Forse la relazione menzionata è ragionevolmente valida solo se applicata alla quantità σ_Δ definita come σ ma sostituendo gli integrali su Ω in (34.2) e (34.3) con integrali su un piccolo volume Δ interno al fluido: purtroppo un' analisi soddisfacente di questa idea, *c.f.r.* [G10], manca interamente ma è desiderabile dal momento che potrebbe condurre a previsioni assai “strette” e per le quali non è impossibile concepire l' idea che siano sperimentalmente verificabili.

Ci occupiamo ora di mostrare che esiste una relazione stretta fra le quattro equazioni (34.1). Sviluppando un' idea già in [G11].

(C) *Relazione fra equazioni NS e ED: la formula barometrica.*

Meditando sulle equazioni ED o GED e le equazioni NS o GNS si perviene a pensare che la relazione fra esse sia simile alla relazione che si trova in meccanica statistica fra la distribuzione di equilibrio in un gas a diverse altezze quando il gas è immerso nel campo di gravità.

Localmente un gas in un campo appare semplicemente come un gas omogeneo in equilibrio, ma globalmente (su una scala di lunghezza H sulla quale il potenziale esterno cambia sostanzialmente: $\beta mgH \sim 1$, se β è la temperatura inversa e m la massa delle particelle) si vedrà che la pressione e la densità non sono costanti e per descriverne le variazioni si perviene alla cosiddetta

formula barometrica, c.f.r. [MPr].

Similmente possiamo attenderci che gli stati stazionari delle ED (o equivalentemente delle GED) siano *anche* “localmente” equivalenti a stati stazionari per le NS o GNS: nel senso che se consideriamo osservabili che dipendono dalle componenti del campo di velocità \underline{u}_k con modi k su una certa scala $|k| \sim \kappa$ la cui grandezza va opportunamente determinata in funzione di ε e ε , c.f.r. (A), allora dovremmo essenzialmente non vedere differenza alcuna.

La relazione esatta che determina κ sarà chiamata *formula barometrica*: e dovrebbe non essere difficile determinare la formula barometrica sulla base di considerazioni di natura dimensionale. Si noti che qui “località” va intesa, come in (A),(B) nello spazio dei momenti piuttosto che in quello delle coordinate.

La determinazione della formula barometrica consiste, essenzialmente, nello sviluppo di una teoria analoga a quella di Kolmogorov K41 per le equazioni ED, c.f.r. [G10].

Si può tentare di sviluppare una tale teoria nel caso di un contenitore senza ostacoli e sulla base di qualche ipotesi che al momento mi pare ragionevole. Cambiando le ipotesi potrebbe cambiare il risultato nella sua forma analitica ma l’idea fondamentale alla base della derivazione che segue è indipendente dai dettagli della teoria che viene proposta come analoga alla teoria K41.

Supporremo, a titolo puramente indicativo, come “ragionevole” che nel caso delle ED la distribuzione stazionaria equipartisca l’energia fra i modi, cioè $\langle |\gamma_k|^2 \rangle = \gamma^2$ per tutti i k nel “dominio inerziale” $L^{-1} \ll |k| \ll k_\chi$ ove k_χ è la scala ove viene eseguito il taglio ultravioletto necessario per dare senso matematico alle equazioni, c.f.r. §29 (D). Quindi $\gamma^2(k_\chi L)^3 = \varepsilon$ sarà l’energia totale.

A scopo di confronto con il §29 notiamo che la quantità ivi chiamata ε , (c.f.r. §29, (D)), corrisponde alla $\eta\nu$ di questo paragrafo.

In questo caso la distribuzione di energia (cioè la quantità $K(k)dk$ di energia per unità di volume e fra k e $k + dk$) è $K(k) = \frac{3\varepsilon}{4\pi} \frac{k^2}{k_\chi^3}$, per $k < k_\chi$: assai diversa dalla legge $k^{-5/3}$ di Kolmogorov. È piuttosto analoga alla legge di Rayleigh–Jeans del corpo nero, c.f.r. [Ga].

Nella teoria K41 un ruolo chiave è giocato dalla quantità $v_\kappa^3 \kappa$ che è identica a $\eta\nu$ per tutti i valori $k_0 \ll \kappa \ll k_\nu$. Pertanto calcoliamo il valore di $v_\kappa^3 \kappa$ nel nostro caso.

Troviamo:

$$\frac{v_\kappa^3 \kappa}{\varepsilon \chi} = \frac{((\kappa L)^3 \gamma^2)^{3/2} \kappa}{\varepsilon \chi} = \frac{((k_\chi L)^3 \gamma^2)^{3/2} k_\chi}{\varepsilon \chi} \left(\frac{\kappa}{k_\chi}\right)^{11/2} = \frac{\varepsilon^{3/2} k_\chi}{\varepsilon \chi} \left(\frac{\kappa}{k_\chi}\right)^{11/2} \quad (34.17)$$

34.17

e vediamo che la quantità $v_\kappa^3 \kappa$ dipende da κ nel caso ED. Dato κ la statistica SRB per le equazioni ED in uno stato stazionario con energie totale ε attribuisce a questa quantità lo stesso valore che ha nella statistica SRB per le equazioni NS in uno stato stazionario con vorticità totale η se:

$$34.18 \quad \frac{\varepsilon \chi}{\eta \nu} = \frac{\chi}{\sqrt{\varepsilon} k_\chi} \left(\frac{\kappa}{k_\chi} \right)^{-\frac{11}{2}} \quad (34.18)$$

purchè (naturalmente) κ sia più grande delle “scale di Kolmogorov” k_ν, k_χ .

La “formula barometrica” è allora l’affermazione di equivalenza fra NS e ED sulla scala κ , ossia se si guarda solo alle proprietà del campo di velocità che dipendono da $\underline{\gamma_k}$ per $\frac{1}{2}\kappa < |\underline{k}| < \kappa$, se (34.18) vale e $\kappa \gg k_\nu, k_\chi$.

Se guardiamo su una scala diversa $\kappa' = 2^n \kappa$ per qualche n (grande) allora possiamo attenderci equivalenza fra ED o (GED) e NS (o GNS), ma le coppie ε, η dovranno ora essere tali che l’equazione (34.18) valga sulla nuova scala.

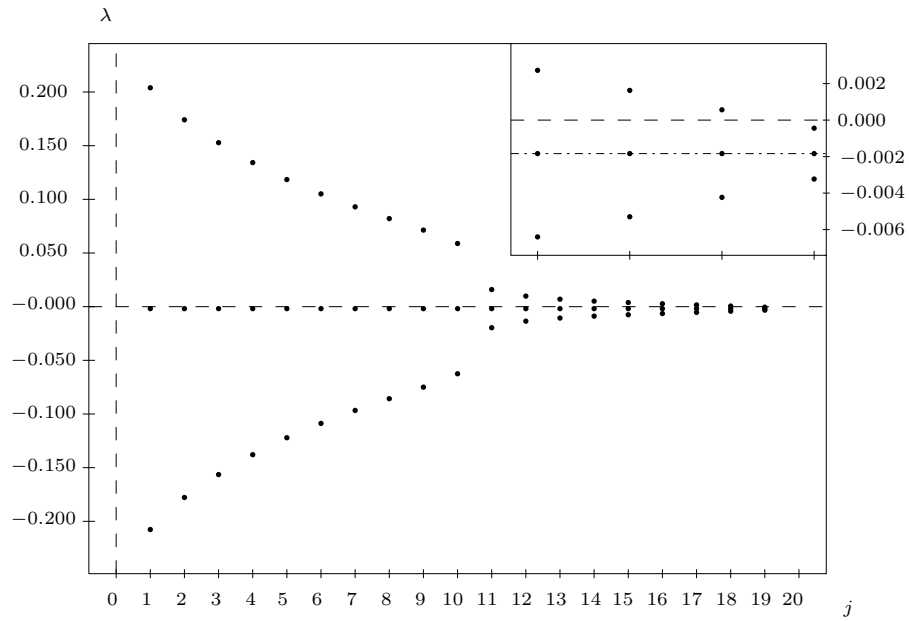
L’ analogia con la usuale formula barometrica per la distribuzione di Boltzmann Gibbs nel campo di gravità giustifica il nome dato alla (34.18). Si vede che $\eta \nu$ gioca il ruolo della gravità, $\varepsilon \chi$ quello del potenziale chimico mentre κ/k_χ quello dell’ altezza.

La formula barometrica è solo un esempio delle conseguenze che si possono trarre dalle congetture di equivalenza degli stati stazionari per varie equazioni che descrivono la dinamica di un dato sistema.

L’ analisi sopra condotta inoltre sembra ben in accordo con lo spirito delle proposte in [SJ] che per primi proposero, in un diverso contesto e con diverse prospettive, una visione che ha qualche similitudine con quanto discusso qui.

Tuttavia perchè sia un’ analisi completa è necessario determinare anche la costante k_χ : che come si è spiegato al §29, (D), non possiamo determinarla senza una teoria ben più dettagliata delle equazioni ED e quindi della formula barometrica resta “solo” l’ esponente $\frac{11}{2}$, perchè la costante moltiplicativa in (34.18) rimane indeterminata.

Bibliografia: [G10], [SJ],[G8],[G7]. L’ importanza della regola d’ accoppiamento nei casi isocinetici al fine dell’ applicazione del teorema di fluttuazione è stata notata nel corso del lavoro d’ interpretazione dei risultati sperimentali in [BGG] da uno degli autori (F.B.).



I 38 esponenti di Lyapunov per un modello di conduzione elettrica, in campo elettromotore ■ assai grande, a 19 gradi di libertà retto da equazioni isocinetiche. La figura piccola è un ingrandimento della coda di quella grande e mostra la regola di accoppiamento e il fatto che a un tale campo il 19-mo esponente è un pò negativo e quindi l'insieme attraente ha dimensione inferiore a quella dello spazio delle fasi; da [BGG].

┐

┐

478

§34: Attrattore di Navier–Stokes.

┐

┐

Bibliografia.

- [AA68] **Arnold, V.I., Avez, A.:** *Ergodic problems of classical mechanics*, Benjamin, New York, 1968.
- [A] **Arnold, V.:** *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, 1979.
- [Al] **Altarelli, G.:** *Interazioni deboli*, in *Dizionario delle scienze fisiche*, ed. Enciclopedia italiana, vol. III, Roma, 1993.
- [An] **Alankus, T.:** *An exact representation of the space time characteristic functional of turbulent Navier Stokes flows with prescribed random initial states and driving forces*, *Journal of Statistical Physics*, **54**, 859–872, 1990.
- [AF] **Adler, R., Flatto, L.:** *Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics*, *Bullettin of the american mathematical society*, **25**, 229–334, 1991.
- [Ba1] **Batchelor, G.:** *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press, 1970.
- [Ba2] **Batchelor, G.:** *Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence*, *Physics of fluids*, **12**, (II supplement), 233–239, 1969.
- [Be] **Becker, R.:** *Teoria dell' elettricità*, Sansoni, Firenze, 1950.
- [Bo70] **Bowen, R.:** *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*, *American Journal of Mathematics*, **92**, 725–747, 1970. And: *Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphisms*, *American Journal of Mathematics*, **92**, 907–918, 1970.
- [Bo72?] **Boldrighini, C.:** *Introduzione alla fluidodinamica*, Quaderno CNR, Roma, 1972.
- [Bo84] **Boltzmann, L.:** *Über die Eigenschaften monzyklischer und anderer damit verwandter Systeme*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", ed. F.P. Hasenöhl, vol. III, Chelsea, New York, 1968, (reprint).
- [Bo97] **Boltzmann, L.:** *Zu Hrn. Zermelo's Abhandlung "Ueber die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge"*, engl. trans. in S. Brush, "Kinetic Theory", **2**, 238.
- [BF] **Boldrighini, C., Franceschini, V.:** *A five dimensional truncation of the plane incompressible Navier Stokes equation*, *Communication in Mathematical Physics*, **64**, 159–170, 1979.
- [BG] **Benfatto, G., Gallavotti G.:** *Renormalization group*, Princeton University Press, 1995.
- [BGW] **Bourgain, J. Golse, F., Wennberg, S.:** *The ergodisation time for linear flows on tori: application to kinetic theory*, *Communications in*

- Mathematical Physics, 1998.
- [BCM] **Benedetto, D., Caglioti, E., Marchioro, C.:** *On the motion of sharply concentrated vorticity filament*, preprint, Roma, 1995.
- [BGG] **Bonetto, F., Gallavotti, G., Garrido, P.:** *Chaotic principle: an experimental test*, mp_arc@math. utexas. edu, #96-154, 1996, in stampa su Physica D.
- [BGS] **Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn J.M.:** *Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; a Method for Computing all of Them. Part 1: Theory*, Meccanica, **15**, 9-20, 1980; and *Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems; a Method for Computing all of Them. Part 2: Numerical Applications*. Meccanica **15**, 21-30 (1980).
- [BJPV] **Bohr, T., Jensen, M.H., Paladin, G., Vulpiani, A.:** *Dynamical systems approach to turbulence*, Cambridge University Press, 1998.
- [BPPV] **Benzi, R., Paladin, G., Parisi, G., Vulpiani, A.:** *Multifractal and intermittency in turbulence*, in "Turbulence in spatially extended systems", ed. R. Benzi, C. Basdevant, S. Ciliberto, Nova Science Publishers, Commack (NY), 1993, p. 163- 188.
- [Ch] **Chorin, A.:** *The evolution of a turbulent vortex*, Communications in Mathematical Physics, **83**, 517- 535, 1982.
- [Ch2] **Chorin A.:** "Hairpin removal in vortex interactions", UCB preprint nov. 1988.
- [CD] **Calogero, F., Degasperis, A.:** *Spectral transforms and solitons*, Amsterdam, North Holland, 1982.
- [CE] **Collet, P., Eckmann, J.P.:** *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhauser, Cambridge (MA), 1980.
- [CF] **Constantin, P., Foias, C.:** *Navier Stokes Equations*, Chicago Lectures in Mathematics series, University of Chicago Press, 1988.
- [CG99] **Cohen, E.G.D., Gallavotti, G.:** *Note on Two Theorems in Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Journal of Statistical Physics, **96**, 1343-1349, 1999.
- [CW] **Craig, W., Worfolk, P.:** *An integrable normal form for water waves in infinite depth*, Physica D **84** (1995) pp. 513-531. E anche Craig, W.: *Birkhoff normal forms for water waves*, Mathematical Problems in Water Waves, Contemporary Mathematics, AMS (1996), pp. 57 - 74.
- [CEG] **Collet, P., Epstein, H., Gallavotti, G.:** *Perturbations of geodesic flows on surfaces of constant negative curvature*, Communications in Mathematical Physics, **95**, 61-112, 1984.
- [CKN] **Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L.:** *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier- Stokes equations*, Communications on pure and applied mathematics, **35**, 771- 831, 1982.
- [CWT] **Constantin, P., Weinan E., Titi, E. S.:** *Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation*, Communications Mathematical Physics, **165**, 207, 1994.
- [Dr] **Dressler, U.:** *Symmetry property of the Lyapunov exponents of a class of dissipative dynamical systems with viscous damping*, Physical Review, **38A**, 2103-2109, 1988.

- [DC] **Doering, C. R., Constantin, P.**: *Energy dissipation in shear driven turbulence*, Physical Review Letters, **69**, 1648–1651, 1992.
- [DM] **Dettman, C.P., Morriss, G.P.**: *Proof of conjugate pairing for an isokinetic thermostat*, Physical Review **53 E**, 5545–5549, 1996.
- [DS] **Dunford, N., Schwartz, I.**: *Linear operators*, Interscience, 1960.
- [DoS1] **Doliwa, A., Santini, P.**: *An elementary geometric characterization of the integrable motion of a curve*, Physics Letters, **185A**, 373–384, 1994.
- [DoS2] **Doliwa, A., Santini, P.**: *Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz–Ladik hierarchy*, Journal of Mathematical Physics, **36**, 1259–1268, 1995.
- [DZ] **Dyachenko, A.I., Zakharov, V.E.**: *Is free surface hydrodynamics an integrable system*, Physics Letters **A190**, 144–148, 1994.
- [DGM] **de Groot, S., Mazur, P.**: *Non equilibrium thermodynamics*, Dover, 1984, (reprinted).
- [DLZ] **Dyachenko, A.I., Lvov, Y.V., Zakharov, V.E.**: *Five-wave interaction on the surface of deep fluid*, Physica D, **87**, 233–261, 1995.
- [E] **Eckmann, J. P.**: *Roads to turbulence in dissipative dynamical systems*, Reviews of Modern Physics, **53**, 643–654, 1981.
- [Eb] **Ebin, D.**: *Motion of slightly compressible fluids in a bounded domain. I*, Communications on pure and applied mathematics, **35**, 451–485, 1982.
- [Ey] **Eyink, G. L.**: *Energy dissipation without viscosity in ideal hydrodynamics. I*, Physica D, **78**, 222–240, 1994.
- [EE11] **Ehrenfest, P., Ehrenfest, T.**: *The conceptual foundations of the statistical approach in Mechanics*, Dover, New York, 1990, (reprint).
- [EM] **Esposito, R., Marra, R.**: *Incompressible fluids on three levels: hydrodynamic, kinetic, microscopic*, RIMS conference on Mathematical analysis of phenomena in fluids and plasma dynamics. Kyoto, 1993.
- [ER] **Eckmann, J.P., Ruelle, D.**: *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Reviews of Modern Physics, **57**, 617–656, 1981.
- [ECM1] **Evans, D.J., Cohen, E.G.D., Morriss, G.P.**: *Viscosity of a simple fluid from its maximal Lyapunov exponents*, Physical Review, **42A**, 5990–5997, 1990.
- [ECM2] **Evans, D.J., Cohen, E.G.D., Morriss, G.P.**: *Probability of second law violations in shearing steady flows*, Physical Review Letters, **71**, 2401–2404, 1993.
- [F1] **Feigenbaum, M.**: *Quantitative universality for a class of non linear transformations*, Journal of Statistical Physics, **19**, 25, 1978.
- [F2] **Feigenbaum, M.**: *The transition to aperiodic behavior in turbulent systems*, Communications in Mathematical Physics, **77**, 65, 1980.
- [Fr1] **Franceschini, V.**: *Two models of truncated Navier Stokes equations on a two dimensional torus*, Physics of Fluids, **26**, 433–447, 1983.
- [Fr2] **Franceschini, V.**: *A Feigenbaum sequence of bifurcations in the Lorenz model*, Journal of Statistical Physics, **22**, 397–406, 1980.
- [Fri] **Friedman, A.**: *Stochastic differential equations and applications*, Vol 1, (Academic Press).
- [FK] **Furstenberg, H., Kesten, H.**: *Products of random matrices*, Annals of Mathematics and Statistics, **31**, 457–469, 1960.

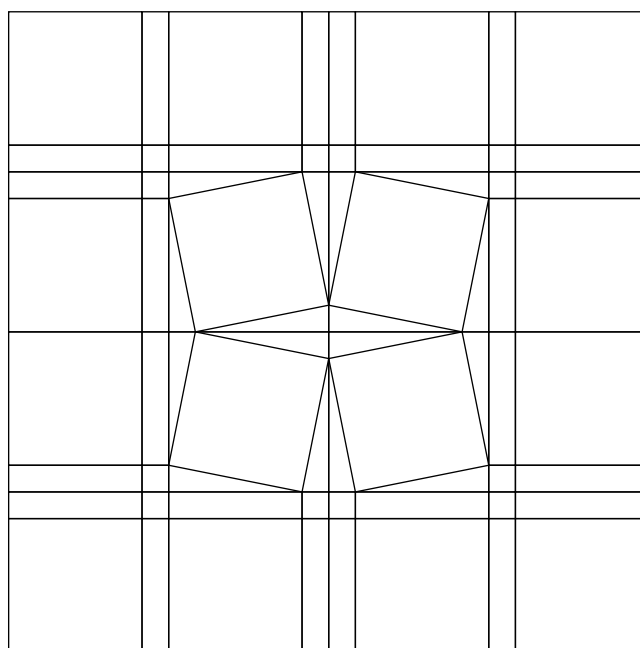
- [FP67] **Foias, G., Prodi, C.**, Sur le comportement global des solutions des équations de Navier–Stokes, Rendiconti del Seminario Matematico di Padova, **39**, 1–34, 1967.
- [FP] **Frisch, U., Parisi, G.**: in *Turbulence and predictability*, p. 84–87, a cura di M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi, North Holland, 1984.
- [FT] **Franceschini, V., Tebaldi, C.**: *Sequences of infinite bifurcations and turbulence in a five mode truncation of the Navier Stokes equations*, Journal of Statistical Physics, **21**, 707–726, 1979, e *A seven mode truncation of the plane incompressible Navier Stokes equation*, Journal of Statistical Physics, **21**, 707–, 1979.
- [FZa] **Franceschini, V., Zanasi, R.**: *Three dimensional Navier Stokes equations truncated on a torus*, Nonlinearity, **4**, 189–209, 1992.
- [FZi] **Franceschini, V., Zironi, F.**: *On constructing Markov partitions by computer*, Journal of Statistical Physics, **40**, 69–91, 1985.
- [FGN] **Franceschini, V., Giberti, C., Nicolini, M.**: *Common periodic behavior in larger and larger truncations of the Navier Stokes equations*, Journal of Statistical Physics, **50**, 879–896, 1988.
- [FSG] **Fenstermacher, F., Swinney, H., Gollub, J.**: *Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow*, J. Fluid Mechanics, **94**, 103–128, 1979.
- [Ga] **Galgani, L.**: *The quest for Planck’s constant in classical physics*, in Probabilistic methods in mathematical physics (F.Guerra, M.Loffredo, C.Marchioro eds.), World Scientific (singapore, 1992).
- [G1] **Gallavotti, G.**: *The elements of Mechanics*, 1983, Springer Verlag- (Texts and monographs in Physics).
- [G2] **Gallavotti, G.**: *Aspetti della teoria ergodica qualitativa e statistica del moto*, "Quaderni dell’Unione Matematica Italiana", vol. 21, Pitagora editrice, Bologna, 1981. Copie possono essere acquistate scrivendo a U.M.I., Dip. Matematica, Università di Bologna, P.zza di Porta S. Donato, 5, 40127, Bologna, o a Editrice Pitagora, Via Zamboni 57, 40127 Bologna (Lit. 8000).
- [G3] **Gallavotti, G.**: *Quasi integrable hamiltonian systems*, ed. K. Osterwalder, R. Stora, Les Houches, XLIII, "Phénomènes Critiques, Systèmes aleatoires", p. 539–624, North Holland, 1986.
- [G4] **Gallavotti, G.**: *The Dirichlet problem and the Perron–Frobenius theorem*, Bollettino Unione Matematica Italiana, (6), **1B**, 1029–1038, 1982.
- [G5] **Gallavotti, G.**: *Some rigorous results about 3D Navier Stokes*, in "Turbulence in spatially extended systems", p.45–74, ed. R. Benzi, C. Basdevant, S. Ciliberto, Nova Science Publishers, Commack (NY), 1993.
- [G6] **Gallavotti, G.**: *Trattatello di Meccanica Statistica*, Quaderni del CNR, vol. 50, Firenze, 1995. Una copia (gratuita) di questo volume può essere richiesta a: CNR-GNFM, V. S. Marta 13 a, 50139 Firenze.
- [G7] **Gallavotti, G.**: *Topics on chaotic dynamics*, in Third Granada Lectures in Computational Physics, Ed. P. Garrido, J. Marro, in Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, **448**, p. 271–311, 1995.
- [G8] **Gallavotti, G.**: *Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond*, Journal of Statistical Physics. **78**, 1571–1589, 1995.

- [G9] **Gallavotti, G.:** *Extension of Onsager's reciprocity to large fields and the chaotic hypothesis*, Physical Review Letters, **77**, 4334–4337, 1996.
- [G10] **Gallavotti, G.:** *Dynamical ensembles equivalence in fluid mechanics*, Physica D, **105**, 163–184, 1997, e *Equivalence of dynamical ensembles and Navier Stokes equations*, Physics Letters, **223**, 91–95, 1996.
- [G11] **Gallavotti, G.:** *Chaotic principle: some applications to developed turbulence*, in mp_arc@math.utexas.edu, #95-232, 1995, in stampa su Journal of Statistical Physics.
- [G12] **Gallavotti, G.:** *Reversible Anosov maps and large deviations*, Mathematical Physics Electronic Journal, MPEJ, (<http://mpej.unige.ch>), **1**, 1–12, 1995.
- [G13] **Gallavotti, G.:** *Modern theory of the billiards. An introduction*, in Global Analysis and its applications, vol. II, ed. P. De la Harpe, International Atomic Energy Commission, Vienna, 1974, p. 193–202.
- [Ga99a] **Gallavotti, G.:** *Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, 1999.
- [Ga99b] **Gallavotti, G.:** *Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov*, chao-dyn #9907004.
- [Ge] **Gentile, G.:** *A large deviation theorem for axiom A flows*, in stampa su Forum Mathematicum.
- [Gh] **Ghirsanov, V.:** *On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures*, Theory of Probability and Applications, **5**, 285–301 (1960).
- [Gr] **Griffiths, R.:** *Frenkel-Kontorova models of commensurate incommensurate phase transitions*, in *Fundamental problems in Statistical Mechanics, VII*, p. 69–110, ed. H. van Beijeren, 1990.
- [GC1] **Gallavotti, G., Cohen, E.G.D:** *Dynamical ensembles in nonequilibrium statistical mechanics*, Physical Review Letters, **74**, 2694–2697, 1995.
- [GC2] **Gallavotti, G., Cohen, E.G.D:** *Dynamical ensembles in stationary states*, Journal of Statistical Physics, **80**, 931–970, 1995.
- [GGP] **Gelfand, I., Graev, M., Piateckii-Shapiro, I.:** *Representation theory and automorphic functions*, Saunders, Philadelphia, 1969.
- [GZa] **Giberti, C., Zanasi, R.:** *Behavior of a three-torus in truncated Navier Stokes equations*, Physica, **65D**, 300–312, 1993.
- [H] **Hasimoto, H.:** *A soliton on a vortex filament*, Journal of Fluid Mechanics, **51**, 477–485, 1972.
- [He82] **Herman, M.:** ??????????????
- [HHP] **Hoolian, B.L., Hoover, W.G., Posch, H.A.:** *Resolution of Loschmidt's paradox: the origin of irreversible behaviour in reversible atomistic dynamics*, Physical Review Letters, **59**, 10–13, 1987.
- [Ho99] **Hoover, W. G.:** *Time reversibility, Computer simulation, and Chaos*, World Scientific, 1999.
- [K] **Kato, T.:** *On classical solutions of the two dimensional non stationary Euler equation*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **25**, 188–200, 1967.
- [Ka] **Katznelson, Y.:** *An introduction to harmonic analysis*, Dover, 1976.
- [Kil] **Kintchin, A.I.:** *Continued fractions*, Noordhoff, Gröningen, 1963.

- [Ki2] Kintchin, A.I.: *Mathematical foundations of information theory*, Dover, 1957.
- [Ki3] Kintchin, A.I.: *Mathematical foundations of Statistical Mechanics*, Dover, 1949.
- [Kr1] Kraichnan, R.H.: *Remarks on turbulence*, **Advances in Mathematics**, 16, 305–331, 1975.
- [Kr2] Kraichnan, R.H.: *Kolmogorov's hypotheses and eulerian turbulence theory*, **Physics of Fluids**, 7, 1723–1734, 1964.
- [Kr3] Kraichnan, R.H.: *Statistical dynamics of two-dimensional turbulence*, **Journal of Fluid Mechanics**, 67, 155–175, 1975.
- [Kr4] Kraichnan, R.H.: *Inertial ranges in two-dimensional turbulence*, **Physics of fluids**, 10, 1417–1423, 1967.
- [KM1] Kleinerman, S., Majda, A.: *Singular limits of quasilinear hyperbolic flows with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*, **Communications in Pure and Applied Mathematics**, 34, 481– 524, 1981.
- [KM2] Kleinerman, S., Majda, A.: *Compressible and incompressible flows*, **Communications in Pure and Applied Mathematics**, 35, 629–651, 1982.
- [L] Leray, J.: *Sur le mouvement d' un liquide visqueux remplissant l' espace*, **Acta Mathematica**, 63, 193- 248, 1934.
- [La] Lamb, H.: *Hydrodynamics*, sesta edizione, Cambridge University Press, 1932.
- [Le93] Lebowitz, J.L.: *Boltzmann's entropy and time's arrow*, **Physics Today**, 32–38, 1993. And *Microscopic Reversibility and Macroscopic Behavior: Physical Explanations and Mathematical Derivations*, in 25 years of non-equilibrium statistical mechanics, ed. J. Brey, J. Marro, J. Rubi, M. San Miguel, *Lecture Notes in Physics*, 445, Springer, Berlin, 1995.
- [Le] Ledrappier, F.: *Some relations between dimension and Lyapunov exponents*, **Communications in Mathematical Physics**, 81, 229, 1981.
- [Li92] Lilly, D., K.: *New trends in large eddy simulations of turbulence*, **Annual Review of Fluid Mechanics**, A4, 633–???, 1992.
- [Ln] Lanford, O.: *Time evolution of large classical systems*, in “Dynamical systems, theory and applications”, p. 1–111, ed. J. Moser, *Lecture Notes in Physics*, vol. 38, Springer Verlag, 1974
- [Lo] Lorenz, E.: *Deterministic non periodic flow*, **J. of the Atmospheric Sciences**, 20, 130- 141, 1963.
- [LR] Laskar, J., Robutel, P.: *The chaotic obliquity of the planets*, **Nature**, 361, 608–612, 1993.
- [LL] Landau, L., Lifchitz, E.: *Mécanique des fluides*, MIR, Mosca, 1971.
- [LM] Lyons, R.J.L., Magenes, E.: *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, 1972.
- [LFL] Libchaber, A., Fauve, S., Laroche, C.: *Two parameter study of the routes to chaos*, **Physica D**, 7, 73–84, 1983.
- [Ma] Marchioro, C., *An example of absence of turbulence for any Reynolds numberb*, **Communications in mathematical Physics**, 105, 99–

- 106, 1986. E *An example of absence of turbulence for any Reynolds number: II*, **Communications in mathematical Physics**, 108, 647–651, 1987.
- [MS99] Mattingly, J.C., Sinai Ya.G.: *An elementary proof of existence and uniqueness theorem for the Navier Stokes Equations*, submitted to **Annals of mathematics**, 1998.
- [Mi] Miranda, C.: *Partial differential equations of elliptic type*, Springer Verlag, Berlino, 1970.
- [MPr] Marchioro, C., Presutti, E.: *Thermodynamics of particle systems in the presence of external macroscopic fields: I classical case*, **Communications in Mathematical Physics**, 27, 146–154, 1972.
- [MP1] Marchioro, C., Pulvirenti, M.: *Vortex methods in two dimensional fluid dynamics*, Lecture N. in Math., vol. 203, Springer Verlag, 1984.
- [MP2] Marchioro, C., Pulvirenti, M.: *Mathematical theory of incompressible non viscous fluids*, In stampa, 1992.
- [N] Nelson, E.: *Feynman integrals and the Schrödinger equation*, **Journal of Mathematical Physics**, 5, 332–343, 1964.
- [O] Onsager, L.: , **Supplemento Nuovo Cimento**, 6, 279, 1949.
- [Os] Oseledec, V.: *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, **Transactions of the Moscow Mathematical Society**, 19 197–221, 1968.
- [Pe1] Pesin, Y.: *Lyapunov characteristic exponents and ergodic properties of smooth dynamical systems with an invariant measure*, **Soviet Mathem. Doklady**, 17, 196–199, 1976. E più in dettaglio, *Invariant manifold families which correspond to non vanishing characteristic exponents*, **Math. USSR Izvestia**, 10, 1261–1305, 1976.
- [Pe2] Pesin, Y.: *Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties*, **Ergodic theory and dynamical systems**, 12, 123–151, 1992.
- [Pe3] Pesin, Y.: *On the notion of dimension with respect to a dynamical system*, **Ergodic theory and dynamical systems**, 4, 405–420, 1984.
- [PS] Pumir, A., Siggia, E.: *Vortex dynamics and the existence of solutions to the Navier Stokes equations*, **Physics of Fluids**, y, (x,x+21), 1987.
- [Ra] Raghunathan, M.: *A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem*, **Israel Journal of Mathematics**, 32, 356–362, 1979.
- [Ri] Riela, G.: *A new six mode truncation of the Navier Stokes equations on a two dimensional torus: a numerical study*, **Nuovo Cimento**, 69B, 245, 1982.
- [R1] Ruelle, D.: *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, **Publications Mathématiques de l' IHES**, 50, 27–58, 1979. E: *Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert space*, **Annals of Mathematics**, 115, 243–290, 1982.
- [R2] Ruelle, D.: *Chaotic evolution and strange attractors*, **Accademia Nazionale dei Lincei**, Roma, 1987 (notes by S. Isola), printed by Cambridge University Press, 1989.

- [R3] Ruelle, D.: *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*, Academic Press, 1989.
- [R4] Ruelle, D.: *Thermodynamic formalism*, Addison Wesley, 1978.
- [R5] Ruelle, D.: *Positivity of entropy production in non equilibrium statistical mechanics*, *Journal of Statistical Physics*, **85**, 1-25 (1996). E *Positivity of entropy production in the presence of a random thermostat*, *IHES preprint*, 1996, mp_arc@math.utexas.edu, #96-167.
- [R6] Ruelle, D.: *Measures describing a turbulent flow*, *Annals of the New York Academy of Sciences*, **357**, 1-9, 1980.
- [RT] Ruelle, D., Takens, F.: *On the nature of turbulence*, *Communications in mathematical Physics*, **20**, 167, 1971.
- [SM99] Scotti, A., Meneveau, C.: *A fractal model for large eddy simulation of turbulent flow*, *Physica D*, **127**, 198-232, 1999.
- [S] Sinai, J.: *Topics in ergodic theory*, Princeton U. Press, 1994.
- [Sa] Saltzman, B.: *Finite amplitude free convection as an initial value problem*, *Journal of Atmospheric Science*, **19**, 329-341, 1962.
- [Sc] Scheffer, V.: *Hausdorff dimension and the Navier Stokes equations*, *Communications in Mathematical Physics*, **55**, 97-112, 1977. And *Boundary regularity for the Navier Stokes equation in half space*, *Communications in Mathematical Physics*, **85**, 275-299, 1982.
- [Sm] Smale, S.: *Differentiable dynamical systems*, *Bullettin of the American Mathematical Society*, **73**, 747-818, 1967.
- [See] Seeley, R.: *Extensions of C^∞ functions defined in half space*, *Proceedings American Mathematical Society*, **15**, 625-626, 1964.
- [So] Sobolev, S.L.: *Applications of Functional analysis in Mathematical Physics*, *Translations of the American Mathematical Society*, vol 7, 1963, Providence.
- [SJ] She Z.S., Jackson, E.: *Constrained Euler system for Navier Stokes turbulence*, *Physical Review Letters*, **70**, 1255-1258, 1993.
- [T] Taylor, G.I.: , *Proceedings of the Royal Society of London*, **A151**, 421, 1935.
- [VW] van de Water, W.: *Experimental study of scaling in fully developed turbulence*, in "Turbulence in spatially extended systems", ed. R. Benzi, C. Basdevant, S. Ciliberto, Nova Science Publishers, Commack (NY), 1993.
- [Y] Young, L.S.: *Dimension, entropy and Liapunov exponents*, *Ergodic theory and dynamical systems*, **2**, 109, 1982.
- [YO86] Yakhot, V., Orszag, S.A.: *Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory*, *Journal of Scientific Computing*, **1**, 3-51, 1986.
- [Wa] Waleffe, F.: *The nature of triad interactions in homogeneous turbulence*, *Physics of fluids*, **4A**, 350-363, 1990.
- [WL98] Woitkowski, M.P., Liverani, C.: *Conformally Symplectic Dynamics and Symmetry of the Lyapunov Spectrum*, *Communications in Mathematical Physics*, **194**, 47-60, 1998.

*Pavimento pitagorico*

Indice dei nomi			
A		Giove	305
		Gledzer	427
		Graffi	154
		H	
Aristotele	246		
Arnold	76, 309	Hölder continuità	143
Avogadro	40	Hasimoto	135
B		Hausdorff	199, 214
		Hopf	258, 271, 273, 304
Biot–Savart	132	I	
Birkhoff	337		
Boltzmann	436		
Bowen	356	Iperione	305
Brasile	41	Ipparco	305
C		J	
Caffarelli	214	Jeans	422
Calderon–Zigmund	209	Judovic	155
Campanino	396		
Cantor	200, 314	K	
Cauchy	6		
Clausius	10		
Clebsch	67, 73	Kaplan	359
Copernico	246	Kato	155
Cramer	62	Keplero	41
Curie	9	Kohn	214
D		Kolmogorov	371, 410, 416, 424, 428, 429
		Kouchnirenko	375
		L	
D'Alembert	443		
Dante	451		
Dolce Stil Novo	275	Landau	271, 273
Dressler	473	Laplace	246
E		Leray	179, 182, 187, 189, 190, 193, 202
		Lobachevsky	302
		Lorenz	238, 246, 256
Einstein	421	Loschmidt	437
Eulero	16	Luna	42
F		M	
Fedone	500	Manneville	268
Feigenbaum	268, 269, 281, 282	Manning	387
Fejér	291	Marmore	308
Frenet	135	Marte	305
Funzione di Green	129	Mather	396
Funzione di Green periodica	129	Maxwell	10
G		N	
		Navier	16, 18
Gauss	438, 443	Neumann	60

Indice dei nomi

489

Newton	41	Von Neumann	337
Nirenberg	214	W	
O		Wiener	144
Ohkitani	427	Wolibner	155
Onsager	9, 14, 462	Y	
Oseledec	336, 342	Yamada	427
P		Yorke	359
Pesin	336		
Platone	500		
Poincarè	208		
Poincaré	246, 273, 302		
Pomeau	268		
Portogallo	41		
Prigogine	14		
R			
Ragunathan	342		
Raileigh	237		
Rayleigh	435		
Ruelle	246, 248, 256, 342, 356, 390, 391, 396, 457		
Ruelle-Takens	269		
S			
Saturno	305		
Serrin	190		
Shannon	370		
Sinai	356, 371, 372, 389, 392, 437, 453		
Smale	331, 449		
Sobolev	117, 208		
Socrate	500		
Steward	420		
Stokes	16, 18		
Stuart	73		
Swatch	308		
T			
Taylor	416, 420		
Teoria di Kolmogorov	468		
Terra	42		
Thomson	67		
Tolomeo	246, 273		
V			
Vandermonde	62		
Vitali	201		

Indice analitico		
a		caos 266*, 324
		cascata di energia 414, 429, 430
		cautela 114
		ciambella bifora 302
		cifra 366
albero	148	cifra di stringa 366
algorithm.doc	371	cilindro 367
algoritmo costruttivo	174	codice simbolico 365*, 380
algoritmo dell' attrito	91	coefficiente di trasporto 436, 462
algoritmo esterno	136	coefficienti stechiometrici 11*
algoritmo spettrale	103, 105	collisione 284
algoritmo vorticoso	123	collisione di orbite 264, 282
allacciamento in fase	264	colore di rumore 401, 405
amico	51	compasso 303
analogia giroscopica	103, 109, 111, 238	complessità 364, 366, 369, 372*, 380
anello di fumo	67, 133	complessità di successioni 368
angolo-azione	80	completa additivita' 199
annichilazione	253	condizione al bordo 106
annichilazione di coppia	277	condizione di Dirichlet 106
approssimazione debole	125	conducibilità termica 10
approssimazione esterna	123, 126	congettura ED 471
argomento dimensionale	21*	congettura NS 471
ascii	371	cono 361
assioma A	330*, 351, 356, 389, 445, 446, 449, 450	conservazione della massa 4*
assioma B	449, 450	conservazione del momento 5*
assioma C	449, 472	conservazione energia 6*
assoluta continuità	351, 354	conservazione quantità di moto 4*
astrologia	370	considerazione dimensionale 19
astronomia	246	contenitore grande 191
attrattività vaga	259, 262	continuità Hölderiana 393, 394
attrattore	358, 359, 441, 442, 445, 446	continuo 3*
attrattore caotico	324	continuo fluido 4*
autoregolizzazione	159, 170, 172	continuo omogeneo 3*
autovalore	98	continuo solido 4*
autovettore	98	convergenza debole 114
b		convezione 34*
		corpo nero 422, 477
		correlazione obliqua 422, 429
		corrente termodinamica 9*
		costante di Feigenbaum 269
bacino di attrazione	268, 278, 319, 358	covarianza 143, 401*, 401, 408
base 2	313	creazione di coppia 277, 282
base 3	313	creazione di entropia 457
base adattata	243	critica copernicana 246
base dinamica	335, 349	cumulante 463
base n	364	curva aleatoria 138
biforcazione	257, 279, 284	
biforcazione di Hopf	258, 260, 263, 273	d
biforcazione di sdoppiamento	265, 282	
bilancio dell' entropia	8	dado 379, 389
biliardo	295, 345	dado equo 379
c		dado iniquo 380
		dato casuale 320
calore	7	decomposizione baricentrica 325
calore specifico	10	decomposizione ergodica 325
cammino medio	10*, 232	delta di Dirac 184, 291
cammino ottico	295	densità di entropia 3
campo di velocità	3*	densità di massa 3
		derivata funzionale 71

derivata generalizzata	59, 117, 120	equazione di Navier–Stokes	16, 18, 20, 28, 231
derivata sostanziale	9*	equazione di Navier Stokes	410
determinante di Vandermonde	62	equazione di Navier–Stokes	437
diavolo	265, 286	equazione di Navier Stokes	466
diffeomorfismo	76, 255*, 319, 351	equazione di Navier–Stokes	467
dimensione apparente	416	equazione di Newton	231
dimensione del moto	244	equazione di Rayleigh	237, 435
dimensione di Hausdorff	199*, 199, 201, 205, 214, 359, 362, 380, 441	equazione di Saltzman	233
dimensione di Kaplan–Yorke	359	equazione di Schrödinger non lineare	135, 142
dimensione di Lyapunov	359, 363, 395	equazione di stato	3*, 6, 16
dimensione d'informazione	358*, 363, 395, 416, 441	equazione di Stokes	113, 170, 407, 408, 413
dimensione frattale	199, 214, 244, 359, 416	equazione ED	468
dinamica cadenzata	306*	equazione ellittica	113
dinamica simbolica	385*, 385, 445	equazione fenomenologica	231
disco di Poincaré	302	equazione GED	468
discretizzazione	107, 403	equazione GNS	439, 467
dissipazione massima	411	equazione regolarizzata	162, 181
distribuzione	114	equazione troncata	232
distribuzione assolutamente continua	312, 329, 390	equilibrio stratificato	34
distribuzione di Gibbs	355	equilibrio termodinamico	6*
distribuzione di Liouville	453	equivalenza reversibile–irreversibile	437
distribuzione di Maxwell	10	equivalenza statistica	471
distribuzione di probabilità	322	ergodicità	369
distribuzione ergodica	336, 373*	ergodicità	315, 322
distribuzione gaussiana	143, 408*	ergodico	322, 368
distribuzione invariante	320	errore irreparabile	459
distribuzione SRB	330, 453, 456, 460	esistenza globale	159
disuguaglianza cinematica	207, 208	esperimento numerico	284
disuguaglianza dell'energia	208	esponente di Lyapunov	335*, 336, 473, 475, 476
disuguaglianza di Calderon–Zygmund	209	esponente di Lyapunov locale	353, 473*, 476
disuguaglianza di Hölder	209	f	
disuguaglianza di Ledrappier	359	fenomenologia della turbolenza	410
disuguaglianza di Poincaré	208	figura magica	302
disuguaglianza di Sobolev	208	filamento di vorticità	131
dynamic inequality	215	filamento tenue	133
e		fluidi non omogenei	3
eccezionalità delle singolarità	189	fluido bidimensionale	69
elicità	111, 428	fluido incoerente	75
elio	10	fluido incompressibile	17*, 18
ellissoide	115	fluido isoentropico	67
enciclopedia britannica	371	fluido profondo	80, 83
enciclopedia italiana	371	fluido viscoso	17*
energia interna	6	flusso adimensionale di energia	211
enstrofia	70*, 112, 418	flusso di Couette	411
entropia	6, 8, 364, 366, 369, 370, 371, 373, 457	flusso di taglio	411
entropia media	373	flusso geodetico	295
equazione costitutiva	3*, 16, 18, 231	flusso irrotazionale	68
equazione del calore	170	flusso potenziale	68, 83
equazione della vorticità	70	forma di Dirichlet	114, 120
equazione d'Eulero dissipativa	421*	formalismo termodinamico	333
equazione di continuità	4*, 54	forma normale	259
equazione di Eulero	16, 17*, 20, 24, 413	formula barometrica	477
equazione di Hamilton	77, 79, 251	formula di Biot Savart	132, 134

formula di Frenet	135	insieme attraente vago	257
formula di Fubini	355	insieme basilare	331
formula di Ghirsanov	403	insieme boreliano	199, 321
formula di Green–Kubo	462, 464	insieme canonico	476
formula di Pesin	395	insieme cilindrico	367, 374
formula di Stokes	22	insieme di Cantor	200, 314, 362, 380
formula SRB	453	insieme invariante	319
forza di volume	3*	insieme microcanonico	476
forza termodinamica	9*, 462	insieme misurabile	321
frattale	420	insieme statistico	438, 471
frequency spectrum	291	instabilità	432
funzione analitica	21	integrabilità	127, 134
funzione cilindrica	394	integrale funzionale	426
funzione di correlazione	290, 307, 323	integrale primo	127
funzione di Green	124	integrazione funzionale	420
funzione di stato	6	intensità adimensionale	212
funzione locale	394	intermittenza	414
funzione quasi periodica	290	internet	371
g		interpretazione giroscopica	112
gas	355	intervallo diadico	315
gas rarefatto	10	iperbolicità approssimata	362
gatto di Arnold	309, 314, 325, 382	ipotesi caotica	452, 461
generatore casuale	311, 319	ipotesi di Batchelor	417
genericità	250	ipotesi ergodica	441, 453
geodetica	302	isoentropico	17
geometria non euclidea	295	isomorfismo	367*
giroscopio	103, 109, 110, 111, 240	isteresi	272, 277, 281, 284, 400, 437
grado di libertà apparente	416	k	
grado di libertà	244, 248	kinematic inequality	215
grado di libertà effettivo	244	l	
grande deviazione	461	lagrangiana	75
grandezza adimensionale	51	laminare	248
gruppo	321	laplaciano a divergenza nulla	106
gruppo dei diffeomorfismi	76	legge 5/3	410, 415, 426, 432
gruppo dell' ottagono	302	legge dell' azione di massa	14
gruppo di rinormalizzazione	212, 407	legge di Keplero	41
gruppo SL2R	303	legge di Kolmogorov	410, 415, 416, 419
h		legge di Lavoisier	11
hamiltoniana di Clebsch-Stuart	73	legge di Rayleigh–Jeans	477
i		legge di scala	419
idrostatica	32	legge di sforzo	5
indipendenza razionale	290*	legge di Thomson	428
informazione	370	limite termodinamico	355
insieme attraente	256, 278, 280, 283, 284, 285, 286, 317, 319*, 319, 352, 358, 400, 416, 429, 430, 441, 442, 445, 446, 473	linea di corrente	9*, 37, 82
insieme attraente assioma A	330	linea di flusso	133
insieme attraente minimale	319	linea principale	278
insieme attraente normale	329, 330, 390	luogo delle singolarità	199
insieme attraente strano	243, 280, 283, 284, 285, 286, 329, 352, 360	m	
		macchia rossa	305
		mappa di Poincaré	275
		marea	41

marea di Luna	42	numero di Péclet	51
marea di Sole	42	numero di Pitagora	300
massa atomica	10	numero di Prandtl	50, 234
matrice di covarianza	401	numero di Rayleigh	237
matrice di stabilità	279	numero di Reynolds	50, 183, 233, 277, 284, 400, 407, 412, 416, 419, 437
matrice di stabilità	241, 249, 255, 257, 261, 273	numero di Reynolds locale	202, 211
matrice mescolante	374	numero di rotazione	262
matrice transitiva	374	numero d'oro	300
media di Cesaro	393		
mescolamento	323	o	
mescolamento topologico	351		
mescolante	322		
metafisica	313	obliquità	420, 424, 429
metodo dell' attrito	91	omogeneità locale	207
metodo del riscaldamento	24, 52	omografia piana	301
metodo del troncamento	105	onda di superficie	80
metodo spettrale	103, 105, 174	onda piccola	79
metrica di Lobachevsky	302	onda sonora	80
metrica di Poincaré	302	operatore adimensionale	211
miscuglio statistico	325	operatore di Laplace	106, 184
misura boreliana	321	operatore energia cinetica	211
misura di Hausdorff	199, 205, 214	ordine imperscrutabile	247
misura di Lebesgue	313, 329, 379	oscillatore armonico	80
misura di Liouville	296, 326, 345, 400	osservabile locale	438
modello a strati	426	osservazione cadenzata	305
modello atomico	3	osservazione completa	365
modello di Lorenz	233, 235, 243, 283, 381		
modello GOY	427, 430	p	
modello NS_5	239		
modello NS_7	239	paradigma del caos	309
modello $NS^{(M)}$	286	paradosso di Loschmidt	437
modello troncato	239	paradosso di Zenone	305
modello troncato NS	243	parentesi di Poisson	127, 128
modo eccitato	244, 245	partizione	371*
modo inerziale	413	partizione generante	371*
modo normale	82	pavimentazione markoviana	389
modo viscoso	413	pavimento generante	365
moltiplicatore di Lagrange	75, 116	pavimento markoviano	456
moto browniano	144, 420, 421, 429	perfidia	428
moto caotico	268, 283	pianeta	41
moto celeste	246	piano di Lobachevsky	302
moto erratico	268	polo	448, 449
moto geodetico	76	polo attrattivo	449
moto hamiltoniano	303	porzione di superficie	317
moto laminare	248, 413	porzione di superficie regolare	364
moto periodico	243, 244	potenza adimensionale	211
moto quasi periodico	243, 244, 245, 246, 262, 264, 271, 286, 290	potenziale di Clebsch	67, 70, 72, 80
moto stazionario	244	potenziale vettore	54
moto strano	245, 246	primo principio	7
multifrattale	420, 421, 429	principio d' azione	75
		principio del minimax	116, 120
n		principio di conservazione difficoltà	365, 428
		principio di Curie	9
non località adimensionale	212	principio di d' Alembert	443
numero di Avogadro	40	principio di Gauss	438, 443, 465, 468, 475
numero di Grashof	50	principio di Ruelle	390, 391, 400, 426, 430, 445
numero diofantino	291		

principio minimax	468	scala di lunghezza	191, 232
problema di Dirichlet	78, 128	scala di tempo	258, 472
problema di due vortici	128, 129	scala viscosa	410, 412
problema di Neumann	60, 78, 109	scenario degli altri casi	271
problema di Stokes	103, 108	scenario del caos	246, 266
problema di tre vortici	129	scenario dell' intermittenza	268, 277
processo aleatorio	433	scenario dello sdoppiamento	268, 269, 277
processo di Markov	374, 375, 388	scenario di Landau	271
processo gaussiano	401*	scenario di Pomeau–Manneville	268
processo stocastico	404	scenario di Ruelle–Takens	269, 277, 292
produzione di entropia	8*, 14	scenario quarto	271
proprietà illusoria	18	schema di Bernoulli	373, 374, 375, 380, 390
proprietà diofantina	308	secondo principio	8
proprietà generica	252, 262	seme casuale	311
proprietà ricorrente	306	seme di numeri casuali	310
proprietà stabile	252	semigrupp	321
punto errante	330, 352, 451	serie di Taylor	21
punto fisso	241, 430	sghembezza	420, 424
punto non errante	330	simmetria	251, 257, 266
punto periodico	255	simmetria dimenticata	255
punto singolare	317	simmetria per inversione temporale	446, 456
punto vagante	330, 352	simplesso	325
q		singularità	189
quadratura	127, 134, 135	singularità in NS	199, 207
quasi periodico	129	singularità spazio–temporale	207
r		singularità temporale	200
raggio di curvatura	135	singularità spazio–temporale	202
rallentamento diurno	42	sistema assioma A	330*
rappresentazione irriducibile di SL ₂ R	304	sistema caotico	389
reazioni chimiche	3*	sistema di Anosov	329, 330, 332*, 389, 394, 448, 450
reciprocità di Onsager	9, 462	sistema dinamico	319, 329, 378
regola di accoppiamento	473, 475, 476	sistema dinamico continuo	289, 322
regola di Cramer	62	sistema dinamico discreto	322
regolarità a tratti	317	sistema dinamico metrico	373, 379
regolarizzazione	162, 179, 180, 182, 208, 232	sistema dinamico regolare	333
regolarizzazione di Leray	179	sistema dinamico simbolico	367
relazione costitutiva	3*	sistema dinamico topologico	319
relazione di Clausius Maxwell	10, 50	sistema dissipativo	457*
repulsività vaga	257, 264, 271	sistema ergodico	323
reversibilità	339*, 439, 446, 472	sistema iperbolico	329, 389
ricoprimento di Vitali	204	sistema reversibile	339*
risonanza	264, 270, 274	sistema transitivo	389
rottura spontanea di simmetria	257, 431	situazione disperata	208
rumore colorato	405	solenoide	362
s		soluzione debole	113, 114, 159, 161, 171, 181, 187, 200, 202
saggezza	333	soluzione di Leray	189, 195, 200, 208
satellite	41	soluzione termostatica	237
scala del diavolo	265, 271, 286	spazio delle fasi	247, 303
scala di Kolmogorov	410, 412, 413, 428, 430	spazio separabile	252
		spettro continuo	293, 296, 307, 368, 388
		spettro di potenza	289, 290, 292, 307
		spinta di Archimede	46
		spostamento	3*
		stabilità strutturale	394, 451
		statistica di Gibbs	391
		statistica di una stringa	369
		statistica ergodica	323, 324

statistica mescolante	323	teorema di Peixoto	264
statistica SRB	329	teorema di Perron–Frobenius	388, 396
statistica su insieme attraente	320, 322	teorema di Poincaré	273
stima locale di Leray	182	teorema di regolarità	145, 187
stima uniforme	182	teorema di regolarità NS	145
storia	310, 364, 378	teorema di ricoprimento	201
storia bilatera	364	teorema di Robbin	450
storia di un' osservabile	289	teorema di Scheffer	213
storia quasi periodica	290	teorema di Shannon–McMillan	369
stringa di cifre	366	teorema di Sinai	296, 389
successione di cifre	366	teorema di Smale	331, 449
successione ergodica	368	teorema di stabilità strutturale	395
successione mescolante	368	teorema di Thomson	67, 123, 420, 428
suono	20	teorema di Torricelli–Barrow	161
superficie libera	77	teorema di traccia	117
supporto di una distribuzione	337, 359*	teorema di unicità	145
sviluppo binario	315	teorema di unicità NS	145
sviluppo di Taylor	257	teorema di Wiener	144
sviluppo in orbite periodiche	358, 391	teorema di Young	359, 395
t		teorema ergodico additivo	314, 337
		teorema ergodico moltiplicativo	336
		teorema globale di Leray	189
		teorema H	457
taglio ultravioletto	105, 232, 286	teoria CKN	207
tarallo	362	teoria dei gas	231
tavola dinamica	277, 278	teoria della biforcazione	247
tcp	447	teoria di campo formale	405
temperatura	3, 6	teoria di campo locale	405
tensore degli sforzi	3*, 16	teoria di Kolmogorov	421, 428, 467
tensore di conducibilità	3*	teoria di Leray	179, 207
teorema CKN	214	teoria K41	416, 425
teorema del calore	436, 453	teoria locale	145
teorema della varietà centrale	260	termine di attrito	410
teorema di approssimabilità	174	termine di trasporto	410
teorema di Ascoli–Arzelà	394	termine inerziale	410
teorema di autoregolazione	165	termoconduzione	35
teorema di Baire	255	termodinamica	16
teorema di Bernoulli	37, 68	tipo di biforcazione	279
teorema di Birkhoff	314, 320, 322, 337, 374	toro	290
teorema di Borel–Cantelli	334, 340	toro 3–dimensionale	271
teorema di Cauchy	6	toro invariante	245, 262, 263
teorema di esistenza	145, 187	torsione	135
teorema di esistenza NS	145	transitività topologica	331, 351
teorema di Fejér	291	transversality	331
teorema di fluttuazione	457, 460, 474	trasformata di Fourier	304
teorema di fluttuazione dissipazione	462	trasformazione canonica	128
teorema di Grobman–Hartman	274	trasformazione di Poincaré	261, 266, 273, 275, 306
teorema di Hasimoto	135, 142	trasformazione espansiva	378
teorema di Hopf	260	trasformazione iperbolica	382
teorema di Kolmogorov–Sinai	373	trasformazione regolare	317
teorema di Kouchnirenko	375	trasversalità	450
teorema di Kupka–Smale	255	tratto di superficie	317
teorema di Lasota–Yorke	396	tratto di superficie regolare	375
teorema di Ledrappier–Young	395	triade	110, 112, 238
teorema di Leray	202, 203	troncamento	174, 180, 238, 469
teorema di Leray locale	187	tubino	134
teorema di Leray–Serrin	190, 193, 203	turbolenza	233, 413, 426, 430
teorema di Mañé	450	turbolenza omogenea	421
teorema di Manning	387	turbolenza sviluppata	410
teorema di Oseledec	336		

		Indice delle citazioni
u		[A] 76, 83, 129, 130
		[AA] 304, 316, 324, 372, 376, 396, 450
		[AA68] 327
ubiquità del moto strano	389	[AF] 396
ubiquità del moto strano	246	[Al] 447
uguaglianza quadrangolare	115	[An] 408
ultravioletto	105	[Ba1] 416, 417, 420, 425
universalità	282	[Ba2] 425
universo	447	[BCM] 136, 144
		[Be] 83
v		[BG] 407, 449, 450, 451, 452, 453
		[BG95] 214
variabile aleatoria	143	[BGG] 399, 453, 461, 466, 474, 478, 479
varietà instabile	352, 354, 394, 456	[BGS] 338
varietà instabile δ -locale	352	[BGW] 301
varietà instabile globale	350, 360	[BJPV] 427, 428, 434
varietà instabile r -locale	349	[BKM74] 42
varietà stabile	352, 386, 394, 456	[Bo] 357
varietà stabile δ -locale	352	[Bo70] 389
varietà stabile globale	350, 360	[Bo72] 177
varietà stabile r -locale	349	[Bo84] 436, 437
varietà centrale	260	[Bo97] 437, 439
velocità	3	[BPPV] 429, 431, 432, 433, 434
velocità del suono	20	[CD] 135, 144
vincolo anolonomo	438, 443	[CE] 269, 275
vincolo gaussiano	472, 473	[CEG] 295, 303, 304
vincolo isocinetico	473	[CF] 65
vincolo olonomo	443	[CG99] 461
viscosità	10, 18*	[Ch] 140
viscosità cinematica	18*	[Ch2] 140
viscosità collosa	468	[CKN] 205, 206, 227
viscosità dinamica	18*	[CW] 79, 83
visione aristotelica	246	[CWT] 416
vorticità	70*, 171	[DC] 411, 412, 425
		[DGM] 9, 15
		[DGM84] 13
z		[DLZ] 79, 83
		[DM] 473, 474, 475
zip	371	[DoS1] 134, 144
		[DoS2] 144
		[Dr] 473, 474
		[DS] 199, 206, 252, 318
		[DZ] 79, 83
		[E] 268, 269, 270, 275
		[Eb] 27, 30
		[ECM1] 473
		[ECM2] 452, 461
		[EE11] 327
		[EM] 30, 53, 436, 443, 444
		[EM83] 48
		[ER] 246, 275, 356, 357, 359, 363, 395, 396
		[Ey] 416
		[F1] 269, 275
		[F2] 269, 275
		[FGN] 286, 287
		[FP] 429
		[FP67] 177
		[Fr1] 274, 284, 287

[Fr2]	283, 284, 287	[LY]	396
[Fr]	282, 287	[Ma]	242, 427
[FT]	242, 274, 280, 284, 285, 287	[Mi]	113, 122
[G10]	438, 444, 471, 474, 475, 476, 477, 478	[MP1]	130
[G1]	130	[MP]	126
[G11]	476	[MPr]	477
[G1]	239, 242	[MS98]	177
[G12]	459, 466	[MS99]	175
[G1]	247, 257, 259, 260, 273, 274, 287, 304	[N]	144
[G13]	304	[O]	416
[G]	140	[Os]	346, 359
[G2]	304, 316, 324, 329, 346, 357, 363, 369, 375, 376, 392, 396, 453	[Pe1]	350, 359
[G3]	130	[Pe2]	359, 360, 363
[G4]	113, 396	[Pe3]	363
[G5]	227	[Pe]	339
[G6]	389, 436, 438, 439, 471	[PS]	206
[G7]	392, 396, 438, 444, 453, 478	[R1]	346, 357, 363
[G8]	436, 438, 439, 444, 471, 478	[R2]	246, 275, 346, 356, 437, 453
[G9]	461, 464	[R3]	255, 260, 274, 275, 331, 332, 333, 346, 352, 362, 363, 450
[Ga14]	127	[R3], p. 169	332
[Ga]	477	[R4]	337, 363
[Ga81]	327, 445	[R5]	457
[Ga92]	422	[R6]	356, 391
[Ga99a]	327	[Ra]	346
[Ga99b]	246, 273	[Ri]	287
[GC1]	391, 444, 452, 453, 457, 459, 466	[RT]	246, 255, 260, 270, 275
[GC2]	391, 444, 459, 466	[RT71]	270
[Ge]	461	[S]	296, 357, 363, 389, 392, 437, 453
[GGP]	295, 303, 304	[Sa]	236
[Gu]	2	[Sc]	206
[GZa]	271, 275	[See]	62, 65
[H]	134, 144	[Sh]	2
[He82]	346	[SJ]	468, 471, 478
[HHP]	437	[Sm]	331, 332, 346, 396, 449, 450
[Ho99]	437	[So]	60, 65, 117, 122
[K]	155	[So??]	209
[Ka]	206, 291, 304	[St??]	209
[Ki1]	376	[T]	411
[Ki2]	370, 376	[VW]	420, 430
[Ki]	304	[Wa]	111, 122
[KM]	29, 30	[WL98]	473, 475
[Kr1]	411	[Y]	359, 395
[Kr2]	414, 426	[YO86]	401, 407, 408
[Kr3]	425		
[Kr4]	425		
[KY]	359		
[L]	197		
[La]	70, 83		
[LA]	443, 444		
[Le]	359		
[Le93]	437		
[LFL]	271		
[LL]	15, 23, 42, 50, 51, 53, 80, 83, 245, 246, 275, 421, 423, 425		
[LM]	113		
[Ln]	436		
[Lo]	230, 233, 234, 236, 238, 241, 243, 246, 382		
[LR]	305		

Non intendo affermare che la descrizione che ho dato dell' anima e delle sue funzioni sia esattamente giusta – un uomo di senno non potrebbe proprio dirlo. Ma sostengo che, accettata l' immortalità per dimostrata, si possa pensare, non impropriamente o con leggerezza, che qualcosa del genere sia vero,(Socrate, (Fedone)).