Nota Interna n. 347
25 novembre 1971

Istituto di Fisica "G.Marconi"
Università di Roma

G.Gallavotti:

"ALCUNI RISULTATI RIGOROSI IN MECCANICA STATISTICA E LORO APPLICAZIONI ALLA FENOMENOLOGIA DELLE TRANSIZIONI DI FASE"

ALCUNI RISULTATI RIGOROSI IN MECCANICA STATISTICA E LORO APPLICAZIONI ALLA FENOMENOLOGIA DELLE TRANSIZIONI DI FASE*)

G. Gallavotti

Istituto di Fisica, Università di Roma
Istituto di Matematica, Università di Roma

Introduzione

E' affermazione corrente che, secondo le leggi della Meccanica Statistica, i sistemi finiti di particelle non presentano transizioni di fase: nel quadro di una teoria microscopica sarebbe possibile osservare tali fenomeni solo nel limite termodinamico (volume $\to \infty$ e densità o potenziale chimico fissi).

E' un fatto comune, inoltre, che la menzionata affermazione provochi una certa repulsione a molti fisici che sanno bene che oggetti come bicchieri di acqua, camere a condensazione etc. hanno una loro inconfutabile realtà.

Da un altro punto di vista, l'impossibilità di transizioni di fase per sistemi finiti provoca vari altri gravi inconvenienti: ad esempio appare difficile, nell'ambito di una teoria svolta nel li-

---

*) Testo della Conferenza tenuta al Congresso della S.I.F. (L'Aquila, 27 ottobre 1971).

mite termodinamico, dare una descrizione microscopica di oggetti come la superficie di separazione tra due fasi e di fenomeni come la coesistenza, in regioni separate, di fasi diverse etc.

Le spiegazioni più comuni di solito fornite per giustificare la non esistenza di transizioni di fase in sistemi finiti sono di due tipi:

1) tutti i sistemi sono infiniti e una completa descrizione microscopica di un sistema finito necessiterebbe di una completa descrizione delle "pareti" e ciò porterebbe in ogni caso alla considerazione di un sistema infinito.

2) I sistemi macroscopici sono praticamente infiniti e pertanto le nette discontinuità caratteristiche delle transizioni di fase appaiono, nei sistemi finiti, come zone di rapida variazione di alcuni parametri di stato rispetto a variazioni di altri parametri di stato. Ad esempio, il plateau caratteristico della curva $(P, V)_T$ sarebbe leggermente inclinato e avrebbe una pendenza dell' $o(N_{Av}^{-2/3})$ tranne che in una regione dell'ordine di $o(N_{Av}^{-2/3})$ vicino alle estremità del plateau, in cui tale pendenza varierebbe da ~ 0 a $\sim \chi_{\text{liquido}}$ o χ_{vapore}.

Queste due spiegazioni, sebbene contengano i germi della "verità", sono ancora per molti aspetti insoddisfacenti e particolarmente per quanto riguarda la descrizione dei fenomeni di coesistenza delle fasi.

Il proposito di questa relazione è di esporre un altro punto di vista che, come si vedrà, offre una spiegazione più fondamentale delle difficoltà finora discusse e permette di porre in forma precisa il problema della teoria microscopica della coesistenza di fasi differenti e, inoltre, pone un certo numero di problemi "nuovi" interessanti sia da un punto di vista teorico che sperimentale.

Per evitare di restare nella generalità e per fare un discorso preciso fino in fondo ci si limiterà a studiare i problemi di cui sopra nel modello più semplice della Meccanica Statistica: il modello di Ising per i materiali ferromagnetici e antiferromagnetici non conduttori.

Il problema delle transizioni di fase nel modello di Ising.

Il modello di Ising consiste in un sistema di spins classici $\sigma_i = \pm 1$ $i = 1,2,3.....N^2$ (o N^3) disposti su un reticolo quadrato Λ bidimensionale (o tridimensionale). Se $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2 \dots)$ denota una "configurazione" di spins, l'energia associata a $\underline{\sigma}$ è data da:

$$H_N(\underline{\sigma}) = -J \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i + B_N(\underline{\sigma})$$

ove $\sum_{(ij)}$ è estesa alle coppie di immediati vicini; h è il campo magnetico esterno e $B_N(\underline{\sigma})$ è un termine che descrive l'interazione con le pareti e dipende dalle condizioni al contorno. Ad esempio, se si assume che il quadrato Λ sia circondato da spins orientati in senso positivo:

$$B_N(\underline{\sigma}) = -J \sum_{i \in \text{bordo di } \Lambda} \sigma_i$$

Più in generale il termine $B_N(\underline{\sigma})$ sarà soggetto alla condizione:

$$\max_{\underline{\sigma}} \frac{|B_N(\underline{\sigma})|}{|\Lambda|} \xrightarrow[\Lambda \to \infty]{} 0$$

ove $|\Lambda|$ denota il volume di Λ ($|\Lambda| = N^2$ o N^3) e $\Lambda \to \infty$ significa che il lato N di Λ tende all'infinito.

In base alle leggi della Meccanica Statistica l'energia libera nell'insieme gran canonico è data da:

$$\beta f_N(\beta,h) = \frac{1}{|\Lambda|} \log \sum_{\underline{\sigma}} \exp -\beta H_N(\underline{\sigma})$$

e la magnetizzazione per unità di volume risulta:

$$m(\beta,h)_N = \frac{\partial f_N(\beta,h)}{\partial h}$$

L'energia libera può anche essere calcolata a partire dalla funzione di partizione nell'insieme canonico in cui la magnetizzazione totale è fissa:

$$g_N(\beta,m) = \frac{1}{|\Lambda|} \log \sum_{\sum_i \sigma_i = m|\Lambda|} \exp -\beta H_N(\underline{\sigma})$$

e si ha:

$$\beta f_N(\beta,h) \sim \max_{0 \le m \le 1} (\beta h m + g_N(\beta,m))$$

Come è ben noto il fattore di Boltzmann $\exp -\beta H_N(\underline{\sigma})$ ha l'interpretazione di probabilità relativa della configurazione $\underline{\sigma}$ nell'insieme considerato (canonico o gran canonico).

Ora, se $N < \infty$, è chiaro che $f_N(\beta,h)$ è una funzione analitica di β e di h in un intorno dell'insieme $\beta > 0$ e h reale: dunque la funzione $m(\beta,h)_N$ non può presentare, per alcun valore di β, discontinuità in h. E questo è, in sostanza, l'argomento su cui si basa l'affermazione che i sistemi finiti non presentano transizioni di fase. (Vedi fig.a).

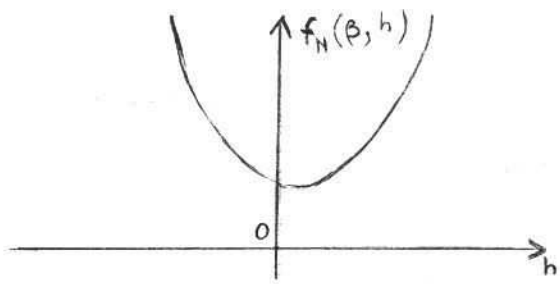

Fig. a)

Anzichè accettare una tale conclusione, sarà opportuno soffermarsi su alcune considerazioni di carattere fisico.

Una delle proprietà più interessanti del fenomeno delle transizioni di fase è il fatto che, se esse hanno luogo, allora la lunghezza di correlazione (ossia la distanza oltre la quale due spins divengono essenzialmente indipendenti) diviene infinita.

E' dunque chiaro che, in tale circostanza, può accadere che il termine di superficie $B_N(\underline{\sigma})$ che descrive le condizioni al bordo non sia più trascurabile a dispetto del fatto che $\max_{\underline{\sigma}} \frac{|B_N(\underline{\sigma})|}{|\Lambda|} \to 0$; tale termine, anzi, potrebbe divenire altrettanto importante che gli altri termine dell'hamiltoniana almeno per quello che riguarda certe grandezze come, ad esempio, la magnetizzazione. E' però molto importante osservare la delicatezza del fenomeno in questione: infatti la presenza di un termine di superficie piuttosto che un altro non potrà influire sull'energia libera che, invero, risulta indipendente dalla condizione al bordo, nel limite $N \to \infty$: infatti (aggiungendo a $f_N(\beta, h)$ un altro indice B o o corrispondente al caso in cui il termine di superficie viene scelto uguale a B o a zero):

$$|\beta f_{N,B}(\beta,h) - \beta f_{N,o}(\beta,h)| \leq \beta \max_{\underline{\sigma}} \frac{|B_N(\underline{\sigma})}{|\Lambda|} \xrightarrow[\Lambda \to \infty]{} 0$$

E' opportuno osservare che è su questa disuguaglianza che si basa una altra infelice affermazione che sostiene che ciò che accade sulle pareti di un sistema è inessenziale per la sua termodinamica purchè il sistema sia abbastanza grande.

Se dunque, come viene suggerito dalle precedenti osservazioni, fosse vero che grandezze macroscopiche come $m(\beta, h)$, $\langle \sigma_i \rangle$ $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$, $\langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle$ etc. dipendono dal termine di superficie $B_N(\underline{\sigma})$ e, inoltre, la dipendenza da tale termine non sparisse nel limite termodinamico $\Lambda \to \infty$, si avrebbe a disposizione una naturale definizione di transizione di fase per un sistema finito. Si potrebbe

infatti dire che, se per certi valori dei parametri termodinamici (ad esempio β e h) il sistema presenta una instabilità rispetto al cambiamento delle condizioni al contorno, (instabilità che non sparisce nel limite $N \to \infty$), allora il sistema presenta una transizione di fase.

I risultati rigorosi noti sul modello di Ising confermano la congettura ora fatta sul meccanismo delle transizioni di fase e permettono di pensare come generale il fenomeno dell'instabilità rispetto alle condizioni al bordo in connessione con una transizione di fase. Infatti, considerando, nel quadro del modello di Ising, le due condizioni al contorno + e - definite da:

$$B^{+}(\underline{\sigma}) = -J \sum_{i \in \text{contorno}} \sigma_i$$

$$B^{-}(\underline{\sigma}) = J \sum_{i \in \text{bordo di } \Lambda} \sigma_i$$

(tali condizioni al bordo corrispondono, da un punto di vista fisico, a situazioni in cui la scatola Λ sia circondata da spins fissi e uguali, rispettivamente, a +1 o -1) e denotando $f(\beta, h) = \lim_{N \to \infty} f_N(\beta, h)$ (come già osservato tale grandezza è indipendente dalla condizione al bordo $B^{\pm}(\underline{\sigma})$) si definisca la magnetizzazione "spontanea" come:

$$m^{+}(\beta) = \left. \frac{\partial f(\beta, h)}{\partial h} \right|_{h=0^{+}} .$$

Si può allora dimostrare che (utilizzando i simboli $\langle \rangle_{+,\Lambda}$, $\langle \rangle_{-,\Lambda}$ per indicare i valori medi nell'insieme gran canonico in cui si usa

la condizione al bordo $B^+(\underline{\sigma})$ o $B^-(\underline{\sigma})$ rispettivamente);

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \left| \langle \sigma_i \rangle_{\pm,\Lambda} - m^+(\beta) \right| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Lambda\to\infty} \left| m_{N,B^\pm}(\beta,0) \mp m^+(\beta) \right| = 0$$

e, inoltre, $m^+(\beta) \neq 0$ se β è abbastanza grande (bassa temperatura).

Dunque si vede che, sebbene l'energia libera non dipenda dalle condizioni al bordo, le funzioni di correlazione ne possono dipendere in modo drammatico, almeno se β è grande, ossia se il sistema infinito descritto dall'energia libera $f(\beta, h)$ ha una transizione di fase nel senso stretto della parola (cioè la derivata destra e quella sinistra dell'energia libera rispetto al campo magnetico esterno (magnetizzazione) sono differenti).

Questo risultato rigoroso può essere precisato molto di più sia dal punto di vista fisico che da quello matematico.

Sia $\underline{\sigma}$ configurazione di spins contenuti nella scatola Λ che si penserà circondata da uno strato di spins fissi e dello stesso segno; e si tracci a metà distanza fra ogni coppia di spins opposti, un segmento di separazione di lunghezza 1. E' chiaro che, essendo gli spins al bordo fissi e identici, l'insieme delle linee tracciate è tale che esse si raggrupperanno in contorni $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ chiusi, semplici e disgiunti (c.f.r. fig. 1). E' anche chiaro che, fissata la condizione al bordo,

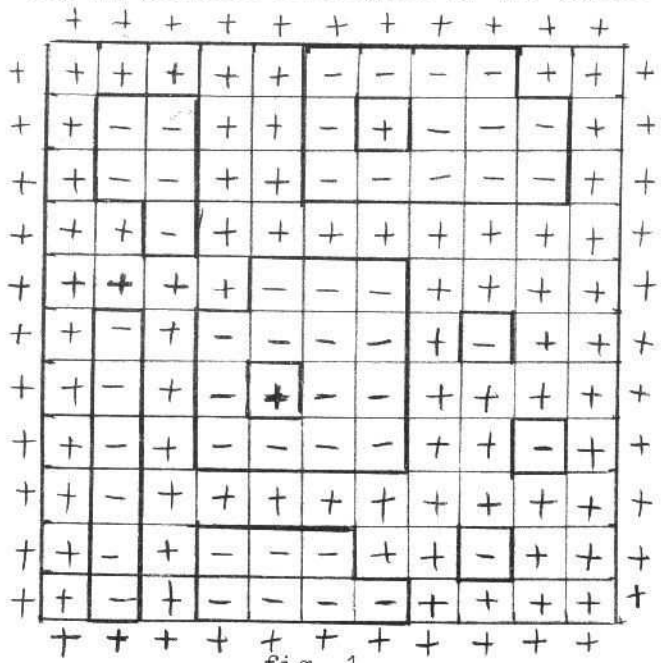

fig. 1

esiste una corrispondenza biunivoca fra tali insiemi di contorni e le configurazioni di spins e, inoltre, se h = 0, l'energia della configurazione descritta dall'insieme di contorni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ è data da:

$$H_N^+(\underline{\sigma}) = -J \text{ (numero di coppie di punti adiacenti del reticolo) } + 2J \sum_i |\gamma_i|$$

ove $|\gamma|$ = lunghezza del contorno γ.

Una identica espressione vale per $H_N^-(\underline{\sigma})$; si osservi, però, che la famiglia di contorni associata ad una stessa configurazione $\underline{\sigma}$ cambia se si cambia la condizione al bordo.

Un classico risultato rigoroso è fornito dal seguente teorema:

Se β è abbastanza grande esistono numeri positivi $\pi(\gamma) \leq e^{-\beta|\gamma|}$ tali che una configurazione $\underline{\sigma}$ presa a caso fra le configurazioni possibili nell'insieme gran canonico conterrà, con una probabilità che tende ad 1 per $N \to \infty$, un numero di contorni congruenti ad un dato contorno γ dato da $K_{(\gamma)}(\underline{\sigma})$ tale che:

$$|K_{(\gamma)}(\underline{\sigma}) - \pi(\gamma)|\Lambda|| \leq C e^{-\beta|\gamma|}\sqrt{|\Lambda|} \qquad C>0$$

per tutti i γ simultaneamente.

E' chiaro che questa affermazione significa che ci sono pochi contorni e quindi se, ad esempio, la condizione al bordo è fissata in B^+, una tipica configurazione di spins è tale che la massima parte degli spins è orientata in senso positivo ed in questo mare di spins positivi si trova un piccolo numero di spins negativi (in effetti dal teorema precedente segue che la probabilità di trovare uno spin in x è piccolissima o, più precisamente,

$$\leq \sum_{\gamma \text{ circonda } x} e^{-\beta|\gamma|} \leq \sum_{p=4}^{\infty} 3^p p^2 e^{-\beta p} \qquad \text{se } \beta \text{ è grande).}$$

Piuttosto che continuare ad illustrare l'evidente significato fisico di questi risultati e la loro importanza per la comprensione del fenomeno delle transizioni di fase nei sistemi finiti converrà ora discutere come sia possibile descrivere il fenomeno della coesistenza delle fasi da un punto di vista microscopico.

Il fenomeno della coesistenza delle fasi nel caso del modello di Ising a due dimensioni.

La conoscenza intuitiva dei fenomeni che accadono nelle transizioni di fase classiche è basata, di solito, sulle proprietà della transizione di fase liquido-gas: tale transizione è sperimentalmente studiata in situazioni che corrispondono all'insieme canonico (cioè a numero totale di particelle fisso) e in presenza di un campo esterno (forza di gravità).

L'importanza di tali condizioni è ovvia: il campo esterno produce una situazione, non invariante per traslazioni, in cui le fasi sono separate: il fatto che il numero totale di particelle è fisso determina invece la frazione di volume occupata da ciascuna delle fasi.

Nel quadro del modello di Ising sarà, pertanto, conveniente discutere il fenomeno della coesistenza delle fasi nell'insieme canonico, ossia, restringendosi alla considerazione delle configurazioni di spins $\underline{\sigma}$ tali che:

$$\sum_i \sigma_i = m\,|\Lambda| \qquad m = \alpha m^+ + (1-\alpha)(-m^+)$$

$$m^+ = \left.\frac{\partial f(\beta,h)}{\partial h}\right|_{0^+} \qquad 0 < \alpha < 1$$

ove m^+ è la magnetizzazione spontanea (tale scelta di m corrisponde a porsi nella regione orizzontale del diagramma di stato $(f,m)_T$).

Si osservi, per completezza, che sebbene ci si possa aspettare che i fenomeni descritti in questo schema corrispondano alle nostre idee intuitive sulle transizioni di fase tuttavia tale schema non corrisponde ad una situazione sperimentale reale per fenomeni ferromagnetici perchè non è sperimentalmente possibile fissare il numero totale di spins di un dato segno.

L'aver fissato m ancora non determina il fenomeno della separazione delle fasi in due regioni diverse: per ottenerla è necessaria anche una causa esterna (come il campo gravitazionale nel caso di sistemi di particelle) che favorisca l'occupazione di una parte del volume a mezzo di una sola fase. Una tale asimmetria può essere causata in due modi: a mezzo di un campo magnetico esterno uniforme (in tutto analogo al campo gravitazione) oppure a mezzo di un campo magnetico asimmetrico agente solo sugli spins vicini al bordo della scatola (tale seconda condizione dovrebbe essere equivalente alla prima a causa del fatto, già discusso, che in presenza di transizioni di fase la lunghezza di correlazione diviene infinita).

Da un punto di vista matematico risulta più semplice il secondo modo di introdurre la causa esterna che favorisce la separazione delle fasi perchè essa corrisponde ad una rottura della simmetria fra spin + e spin - nei pressi del bordo della scatola anzichè su tutto il volume Λ .

Per semplificare ulteriormente il problema si considererà solo il caso bidimensionale e si supporrà che la scatola Λ sia un rettangolo di base N e altezza $H = N^{\delta}$ $\delta \geq 1$ e che i due lati verticali del rettangolo siano identificati: ossia si imporranno condizioni periodiche sulle righe orizzontali.

Il bordo di Λ consiste ora delle sole due basi ed è su di esse che bisogna ancora specificare le condizioni di bordo. Le

condizioni al bordo che saranno prese in esame sono di due tipi: (+,+) e (+,−): nel primo caso si fissano come positivi gli spins delle due basi di Λ mentre nel secondo si fissano come positivi gli spins sulla base superiore e come negativi quelli sulla base inferiore. La condizione al bordo (+,+) è simmetrica e perciò tende a favorire la formazione di una fase pura con magnetizzazione m^+: pertanto sarà naturale considerarla (nell'insieme canonico) solo nel caso che la magnetizzazione totale sia stata fissata uguale alla magnetizzazione spontanea m^+. La condizione al bordo (+,−) invece, favorisce la separazione delle fasi e sarà naturale considerarla nel caso dell'insieme canonico in cui $m = \alpha m^+ + (1-\alpha)(-m^+)$ $0<\alpha<1$: in questo caso ci si aspetta che il sistema formi una fase con magnetizzazione m^+ aderente alla superficie superiore di Λ ed una fase con magnetizzazione $-m^+$ aderente alla base inferiore e inoltre la fase + si dovrebbe estendere fino ad una distanza α H dalla base superiore per poi mutarsi nella fase − attraverso un'abbastanza ben definita linea di separazione. E' importante osservare che è ancora possibile descrivere le configurazioni di spins a mezzo di contorni tracciati secondo la stessa regola descritta a proposito delle condizioni al bordo "aperte" e, ancora, i contorni associati ad una configurazione saranno semplici, chiusi e disgiunti. Questa volta però, a causa delle condizioni periodiche imposte sulle righe orizzontali, alcuni contorni "gireranno" attorno a Λ ed altri no. E' conveniente distinguere fra i contorni che si avvolgono intorno a Λ e gli altri: $(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$ saranno i contorni che si avvolgono intorno a Λ e $(\gamma_1,\dots,\gamma_p)$ gli altri contorni. Dunque una configurazione di spins sarà descritta in termini dei contorni $(\lambda_1,\dots,\lambda_s,\gamma_1,\dots,\gamma_p)$ ad essa associati.

Evidentemente, se si considera la condizione al bordo (+,+) il numero di contorni di tipo λ associati ad una configurazione

di spins deve essere pari, mentre, se si considera la condizione (+,-), tale numero deve essere dispari ed in particolare ≥ 1.

Le convenzioni ora fatte permettono di enunciare e discutere un teorema che fornisce una descrizione precisa del fenomeno della coesistenza di due fasi.

Se β è abbastanza grande, una configurazione $\underline{\sigma} = (\lambda_1 \cdots \lambda_p, \gamma_1 \cdots \gamma_s)$ presa a caso nell'insieme canonico con condizione al bordo $(\div,-)$ e magnetizzazione $m = \alpha\, m^+ + (1-\alpha)(-m^{\div})$, $0 < \alpha < 1$, ha le proprietà 1),2),3),4) descritte in seguito con una probabilità che tende ad 1 per $N \to \infty$:

1) $\underline{\sigma}$ contiene un solo contorno di tipo λ e

$$\big| |\lambda| - (1 + \varepsilon(\beta) N \big| < o(N)$$

ove $\varepsilon(\beta)$ è una opportuna funzione che tende esponenzialmente a zero per $\beta \to \infty$.

2) se Λ_λ è la parte di Λ sopra la linea λ e $\Lambda'_\lambda = \Lambda - \Lambda_\lambda$ si ha:

$$\big| |\Lambda_\lambda| - \alpha |\Lambda| \big| < \varkappa(\beta) |\Lambda|^p \qquad p < 1$$

$$\big| |\Lambda'_\lambda| - (1-\alpha)|\Lambda| \big| < \varkappa(\beta) |\Lambda|^p$$

ove $\varkappa(\beta)$ tende a zero esponenzialmente per $\beta \to \infty$.

3) Se $M_\lambda = \sum_{i \in \Lambda_\lambda} \sigma_i$ si ha:

$$\big| M_\lambda - \alpha |\Lambda| m^+ \big| < \varkappa(\beta) |\Lambda|^p$$

ed una simile equazione è valida per $M'_\lambda = M - M_\lambda = m|\Lambda| - M_\lambda$

4) la lunghezza massima del perimetro di ciascuno dei contorni di tipo γ è inferiore a $\frac{1}{333} \log |\Lambda|$. Inoltre se $|\gamma| \leq \frac{1}{333} \log |\Lambda|$

e se $K_\gamma^\lambda(\underline{\sigma})$ denota il numero di contorni congruenti ad un dato contorno γ e situati al di sopra di λ si ha:

$$\left| K_\gamma^\lambda(\underline{\sigma}) - \pi(\gamma)\,\alpha^{|\Lambda|} \right| \leq e^{-\beta J|\gamma|}\, o(|\Lambda|)$$

ove $\pi(\gamma) \leq e^{-2\beta J|\gamma|}$ è stato già introdotto a proposito della discussione delle proprietà delle transizioni di fase in sistemi finiti. Un simile risultato vale, per ragioni di simmetria, per il numero $K_\gamma'^\lambda(\underline{\sigma})$ dei contorni congruenti a γ ma situati sotto λ .

E' evidente che il teorema ora discusso non solo dà una dettagliata descrizione del fenomeno della separazione delle fasi ma anche fornisce una precisa definizione microscopica della linea di separazione fra due fasi pure.

Se si usa la condizione al bordo $(+,+)$ e si fissa $m = m^+$ un teorema assai simile a quello ora discusso è valido:

1) viene rimpiazzato da 1');

1') nessun contorno di tipo λ è presente (fase pura);

2) e 3) divengono superflui e 4) subisce ovvie modifiche per quanto riguarda i contorni corti (ossia tali che $|\gamma| < \frac{\lg|\Lambda|}{333}$).

Una importante applicazione del teorema in questione sta nel fatto che esso fornisce la possibilità di dare una definizione microscopica della tensione superficiale fra le due fasi pure: si è visto che se si considerano gli insiemi canonici con condizione al bordo $(+,+)$ e magnetizzazione $= m^*$ oppure con condizione al bordo $(+,-)$ e magnetizzazione $m = \alpha m^+ - (1-\alpha) m^+$, allora le rispettive funzioni di partizione $Z^{++}(m^+)$ e $Z^{+-}(m)$ differiranno essenzialmente a causa della presenza della linea (aleatoria) λ presente nelle configurazioni di un insieme ed assente in quelle dell'altro. Sarà dunque naturale definire la tensione superficiale in termini del diverso comportamento asintotico di $Z^{++}(m^+)$ e $Z^{+-}(m)$ come:

$$\tau(\beta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \frac{Z^{+-}(m)}{Z^{++}(m^+)}$$

Tale limite può essere calcolato esplicitamente per $T = \beta^{-1}$ piccolo e $\tau(\beta)$ risulta una funzione analitica di β che, estrapolata fino alla temperatura critica si annulla per β uguale al valore critico $\beta_c = \frac{1}{T_c}$.

A conclusione, conviene discutere un importante problema, aperto sia da un punto di vista teorico che sperimentale.

La distribuzione canonica con condizione al contorno $(+,-)$ e magnetizzazione $m = \alpha m^+ + (1-\alpha)(-m^+)$ fornisce, fra l'altro, la distribuzione di probabilità della linea di separazione λ fra le due fasi. Il teorema prima enunciato, in accordo con l'idea intuitiva che ci si fa della superficie di separazione di due fasi, dice che tale superficie è "quasi diritta" a bassa temperatura (poichè $\varepsilon(\beta)$ è piccolo). Si pone ora, in modo naturale, la questione se tale linea è diritta nel senso, più preciso, seguente: si supponga di sapere che λ passa per un punto q di Λ ; si dirà allora che λ è rigida (o diritta) se la probabilità P che λ passi per il punto q' opposto a q sul cilindro Λ non tende a zero per $N \to \infty$; si dirà che λ non è rigida se $P \to 0$ per $N \to \infty$.

Il problema della rigidità o meno di λ è tuttora aperto sia a due dimensioni che a tre dimensioni (o più) ed è interessante esporre le correnti congetture sull'argomento.

Esiste evidenza molto forte verso l'affermazione che λ non è diritta in due dimensioni: la linea λ preferisce acquistare "l'eccesso" di lunghezza $\varepsilon(\beta)N$ piegandosi piuttosto che rimanendo essenzialmente diritta e formando, con densità $\sim\varepsilon(\beta)$ dei piccoli rigonfiamenti (cfr. fig. 2a) e 2b) rispettivamente):

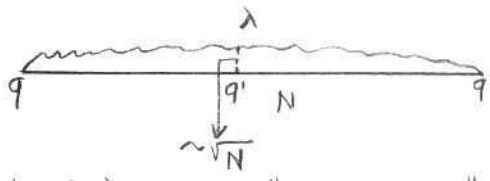

fig 2a) : caso "non rigido"

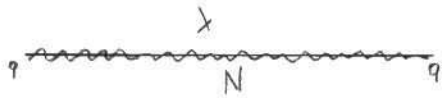

fig 2b) caso "rigido"

inoltre l'altezza quadratica media al centro di λ dovrebbe essere $\propto \sqrt{N}$

Nel caso tridimensionale si può formulare il problema in modo analogo e la linea λ diviene una superficie λ tale che $|\lambda| - (\varepsilon(\beta)+1)N^2 | < O(N)$ ove N è il lato di base della scatola rettangolare Λ e $\varepsilon(\beta)$ tende a zero esponenzialmente per $\beta \to \infty$ Ci si domanda se fissando il "bordo"(che ora è un quadrato Q analogo al punto q del caso bidimensionale) di λ ad una certa altezza, accada o no che λ contenga il centro del quadrato Q con una probabilità P che non tende a zero per $N \to \infty$.

In questo caso esiste forte evidenza che λ sia rigida almeno a bassa temperatura, ma resta la possibilità che esista una temperatura critica oltre la quale la superficie non è più rigida e che tale temperatura critica sia inferiore a quella della tansizione di fase "primaria". Sono evidenti l'interesse e la singolarità di una tale possibilità.

La rigidità o meno della superficie λ può essere, in linea di principio, studiata attraverso l'esame delle proprietà ottiche della superficie nel caso realistico di una transizione di fase del tipo liquido-gas. Dunque la questione della rigidità e della esistenza di una temperatura critica per tale rigidità sembra essere di interesse anche per il fisico sperimentale.

Da un punto di vista sperimentale non sembra che ci si sia mai posto tale problema ed è da osservare che una eventuale esperienza non dovrebbe necessariamente essere condotta in zona critica per la transizione di fase "primaria" e quindi non dovrebbe essere troppo difficile da eseguire nel caso delle transizioni di fase classiche (come liquido-gas).

BIBLIOGRAFIA

1) D.Ruelle, Statistical Mechanics, Benjamin, 1969.

2) R.B.Griffiths, "Rigorous Results and Theorems" in corso di pubblicazione su "Phase transitions and Critical points" a cura di C.Domb e M.E.Green, Academic Press.

3) R.A.Minlos, Ja.G.Sinai, Math.USSR Sbornik (traduzione inglese), 2, 335, 1967; R.A.Minlos, Russian Math. Surveys (traduzione inglese) 23, 137, 1968.

4) D.Abraham, G.Gallavotti, A.Martin-Löf, Lettere al Nuovo Cimento 2, 143, 1971 e preprint; G.Gallavotti, A.Martin-Löf, preprint in corso di pubblicazione su Comm.Math.Phys.; G.Gallavotti, S.Miracle preprint in corso di pubblicazione su Phys.Rev.

5) Alcune delle idee esposte in questo articolo sono state comunicate privatamente all'autore da parte di J.Lebowitz e A.Martin-Löf.