Ordine, Disordine, Informazione

GIOVANNI GALLAVOTTI*

Sommario: *Il moto si presenta in forma ordinata o caotica. Impiegato alla produzione o trasformazione di energia è maggiormente efficiente se ordinato, ma la sua tendenza a divenire caotico sotto l'azione di perturbazioni, anche piccole, rende necessario comprendere i meccanismi alla base della generazione e del mantenimento dei moti caotici e la loro natura. Utile è in questo la teoria dell'informazione che consente di classificare quantitativamente ordine e caos. La ricerca svolta negli ultimi lustri ha cercato di connettere questi tre campi e generato nuove idee, metodi e non inaspettatamente, controversie.*

1 I moti regolari. Le origini

I sistemi meccanici vengono descritti, dal punto di vista scientifico, come *trasformazioni*, che denotiamo brevemente con S, che ad ogni osservazione dello stato, denotato x, associano lo stato $x' = Sx$ in cui il sistema si verrà a trovare all'osservazione successiva. Lo *stato* è inteso come l'insieme delle coordinate necessarie alla completa descrizione del sistema nel corso del tempo, tale cioè da consentire almeno in linea di principio, di dedurre in base alle leggi della fisica gli stati successivi da quello iniziale. Si assume, quindi, un punto di vista *deterministico* in cui il presente determina il futuro generando a partire dallo stato iniziale x gli stati successivi, cioè la successione $x = x_0, x_1 = Sx_0, x_2 = S^2x_0, x_3 = S^3x_0, \ldots$ ottenuta iterando la trasformazione S. Il tempo appare dunque come indice discreto che numera gli istanti in cui, secondo una cadenza prestabilita, vengono eseguite le osservazioni.

Può anche essere utile immaginare che il tempo t sia un indice continuo, e qui talvolta lo faremo, e in tal caso l'evoluzione dello stato sarà descritta da una funzione della variabile continua t, $t \to x(t) = S_t x$: si deve però tener presente che *sempre* le osservazioni avvengono in tempi discreti e quando

*Dipartimento di Fisica e INFN: *La Sapienza*, P.le A. Moro 2, 00185, Roma. Posta-e . `giovanni.gallavotti@roma1.infn.it`

qualche evento prefissato convenzionalmente, che chiamo *evento cadenzante*, si verifica. Come ad esempio quando una lancetta d'orologio indica il numero 12 o, in astronomia, sempre ad esempio, quando un pianeta occulta una stella fissa o ha luogo un'eclisse.

La ricerca contemporanea sul problema dei moti che, sotto l'azione di forze esterne e interne, si generano nei sistemi meccanici (quali meccanismi di ruote e carrucole o gas di atomi o fluidi, sottoposti a forze esterne) trova le sue radici nell'idea aristotelica che i moti possano essere sempre considerati come composti da moti circolari uniformi.

Il motivo di questa concezione della cinematica è la perfezione e semplicità del moto circolare uniforme (del quale il caso del moto rettilineo uniforme deve essere pensato come un caso limite) che fa dire a Tolomeo (100-175 d.C.), [1, p.140]:
"*pensiamo che il compito e scopo del matematico dovrebbe essere descrivere tutti i fenomeni celesti in termini di moti circolari uniformi e che la forma più propria della loro tabulazione sia una che ne pone in evidenza i moti uniformi separandoli dai moti non uniformi che apparentemente hanno luogo*".

L'idea è assai più antica di Ipparco (194-120 a.C.) dal quale, per semplicità di esposizione, conviene prendere le mosse. Il primo passo è aver chiaro cosa veramente si debba intendere per moto composto da moti circolari uniformi. Questa infatti è ben lungi dall'essere una nozione vaga e qualitativa e, nella scienza greca, acquistò un significato precisissimo e quantitativo che è riassunto in tutto il suo sorprendente rigore nell'opera di Tolomeo.

La definizione di *moto composto da* n *moti circolari uniformi* con velocità angolari $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, in uso nell'*Almagesto*, diventa nella terminologia contemporanea un moto *quasi periodico*. Tale è un moto in cui una qualunque delle coordinate di uno qualunque fra i punti del sistema considerato, osservata al variare del tempo t, può essere univocamente determinata come una funzione della posizione, che denotiamo $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, di n punti su n cerchi di raggio 1 e questi punti si muovono ruotando a velocità costanti indicate con $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. In tal modo al tempo t il sistema inizialmente nello "stato" $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sarà nello stato che denotiamo $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1 + \omega_1 t, \ldots, \varphi_n + \omega_n t) \equiv \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} t$.

Il moto con inizio nello stato $\boldsymbol{\varphi} = (0, \ldots, 0)$ può dunque essere rappresentato da

$$x(t) = f(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t) \equiv f(\boldsymbol{\omega} t) \tag{1.1}$$

ove $f(\boldsymbol{\varphi}) \equiv f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ è una funzione di n angoli, variabili fra 0 e 2π (o fra 0^o e 360^o). Si deve pensare che lo stato del sistema sia determinato dai valori assunti dagli n angoli. Dire, dunque, che una grandezza osservabile x evolve come in Eq.(1.1) equivale a dire che il moto del sistema corrisponde semplicemente al moto circolare uniforme dei punti che, variando su n cerchi, ne rappresentano lo stato: in modo che per rappresentarlo sarà sufficiente tabulare le posizioni degli angoli $\boldsymbol{\varphi}$ al variare del tempo (realizzando la citata prescrizione tolemaica sui moti circolari uniformi). Si dirà allora che il moto è *composto da n moti circolari uniformi*, o più semplicemente che è *quasi periodico a n frequenze.*

In realtà nell'astronomia greca è sempre chiaro che il moto del sistema solare, concepito come moto quasi periodico, è solo uno in una famiglia più vasta in cui la generica coordinata x evolve nel tempo come:

$$x(t) = f(\varphi_1 + \omega_1 t, \ldots, \varphi_n + \omega_n t) \tag{1.2}$$

Dunque tutte le n-ple $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ vengono considerate come descriventi stati possibili del sistema, dei quali forniscono le coordinate.

Il moto osservato è quello che corrisponde, convenzionalmente, allo stato iniziale $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ ossia $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = 0$; ma anche gli altri sono possibili e sono realizzati in corrispondenza di diversi dati iniziali e, inoltre, ci si può avvicinare ad essi quanto si vuole pur di attendere abbastanza se, come è lecito supporre senza ledere la generalità, le n velocità sono *indipendenti* nel senso che nessuna può avere un'armonica (ossia un suo multiplo intero) esprimible come una somma di armoniche delle altre (cioè una combinazione a coefficienti interi delle altre).

Riassumendo: dire che i moti di un sistema sono composti da n moti circolari uniformi, di velocità angolari $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ equivale a dire che è possibile descrivere completamente gli stati del sistema (rilevanti per il problema dinamico in studio) mediante n angoli $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ il cui moto, inoltre, è semplicemente circolare uniforme con opportune velocità angolari $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Questo è infatti manifestamente equivalente a dire che qualsiasi grandezza, evolvendo nel tempo, ammette una rappresentazione del tipo Eq.(1.2).

Nella fisica greca non si avevano metodi per il calcolo delle coordinate d'angolo $\boldsymbol{\varphi}$ in termini delle quali il moto assumesse carattere circolare uniforme, ossia per il calcolo delle coordinate φ_i e delle funzioni f, in termini di coordinate con significato fisico diretto (e.g. coordinate polari o cartesiane dei vari punti del sistema). Quindi l'astronomia (e più in generale la fisica) greca consistè nell'ipotesi che tutti i moti potessero avere la forma Eq.(1.2) e nel ricavare, poi, dalle osservazioni sperimentali le funzioni f e i parametri $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}$ adatti alla descrizione dei moti dei pianeti e stelle, con una precisione che, anche ai nostri occhi, appare meravigliosa e quasi incredibile.

Dopo Newton, con lo sviluppo dell'analisi infinitesimale, è divenuto naturale e abituale immaginare i problemi dinamici come sviluppantisi a partire da condizioni iniziali anche assai diverse da quelle di interesse in ogni problema particolare. Ad esempio è comune immaginare sistemi solari in cui il raggio dell'orbe di Giove sia doppio di quello che effettivamente è, in cui la Luna sia ad una distanza dalla Terra diversa da quella osservata, etc. Situazioni di questo genere possono essere incluse nello schema greco semplicemente immaginando che le coordinate $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *non siano* un sistema completo di coordinate, ma che ne siano necessarie altre per descrivere anche i moti degli stessi pianeti che avessero inizio in situazioni radicalmente diverse da quelle in cui prima o poi verrebbero a trovarsi evolvendo a partire dai dati attuali (e che corrispondono a stati con arbitrari valori delle coordinate $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$).

Per avere una descrizione completa anche di questi altri moti del sistema occorrono altre coordinate, le denotiamo $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_m)$, che sono però costanti nel tempo e servono quindi solo a specificare i valori dei parametri diversi da quelli realizzati in natura. Ovviamente si dovrà pensare che le $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ stesse siano funzioni delle $\mathbf{A}$ e, anzi, converrebbe prendere le ω_i stesse come parte delle coordinate A_i, specialmente ove si potesse vedere che $m = n$ e mostrare che le ω_i sono coordinate indipendenti.

Si immagina quindi che il moto più generale abbia la forma:

$$x(t) = f(A_1, \ldots, A_m, \omega_1 t + \varphi_1, \ldots, \omega_n t + \varphi_n) \tag{1.3}$$

ove $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ sono funzioni delle $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ e le $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}) = (A_1, \ldots, A_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ forniscono un sistema *completo* di coordinate.

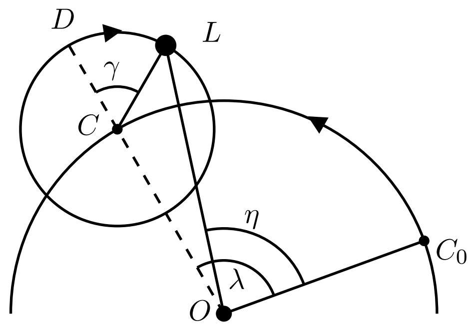
Nell'astronomia greca non esiste cenno ad una relazione fra m ed n: probabilmente solo perché non vi è cenno alle coordinate $A_1, \ldots, A_m$ dal momento che (per quanto ci è pervenuto) dipendeva esclusivamente dalle osservazioni e dunque non potevano concepire lo studio di moti in cui le $A_1, \ldots, A_m$ (e.g. i raggi delle orbite dei pianeti, le inclinazioni delle orbite, etc) fossero diversi dai valori osservati.

A questo proposito è importante notare che la meccanica newtoniana mostra che deve essere $n \le m = 3N = \{$numero di gradi di libertà$\}$ del sistema, se N è il numero di corpi, anche se può accadere che le $n < m$ frequenze ω_i non possano essere prese esse stesse come coordinate sostitutive delle A_i perché possono non essere indipendenti fra loro. Ciononostante questa relazione fra m ed n è da considerarsi uno dei successi della Meccanica newtoniana (direttamente verificabile anche nelle più complesse teorie dell'Almagesto).

Ritornando all'astronomia greca è utile dare un esempio di come concretamente si procedesse alla determinazione di $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, di $\omega_1, \ldots, \omega_n$ e f. Un esempio semplice è fornito dalla teoria della Luna di Ipparco, [2, p.192].

In generale i moti dei corpi celesti appaiono, in prima approssimazione, come moti circolari uniformi attorno al centro della Terra. Ossia *in media* la posizione del corpo celeste può essere ricavata immaginandolo in moto uniforme su un cerchio, (*l'oblico cerchio che i pianeti porta*, X, Par.), con centro sulla Terra e *solidale con la sfera delle Stelle fisse*, che a sua volta ruota attorno alla Terra uniformemente.

Questo moto medio veniva chiamato *moto deferente*: ma il corpo celeste non occupa quasi mai la posizione media, bensì si discosta di "*poco*" da essa talora sopravanzandola e talora rimanendo indietro.



Luna di Ipparco

Nel caso del moto in longitudine della Luna (ossia della proiezione del moto lunare sul piano dell'orbita apparente del Sole, l'eclittica) che in figura è determinato dall'angolo η la rappresentazione più semplice di queste oscillazioni rispetto al moto medio è a mezzo di due moti circolari, uno su un cerchio di raggio $CO = R$, *deferente*, e uno su un cerchietto di raggio $CD = r$, *epiciclo*.

Il centro dell'epiciclo ruota sul deferente con velocità costante ω_0 (angolo λ) e la Luna L ruota sull'epiciclo con velocità costante $-\omega_1$ (angolo γ). La posizione η in longitudine della Luna è quindi determinata da due angoli λ e γ che ruotano con velocità angolare uniforme e dal rapporto $\frac{r}{R}$. È quindi quasi periodico e, evidentemente, η *non* varia uniformemente.

La teoria di Ipparco del moto in longitudine della Luna è dunque un esempio di moto quasi periodico a un deferente, un epiciclo e due frequenze: Ipparco determinò i parametri ω_0, ω_1 e $\frac{r}{R}$ dalla durata osservata dei mesi lunari anomalistico e sinodico e da tre osservazioni di eclissi di Luna. Si rivela sufficiente (combinata con una parallela teoria del moto in latitudine) per la previsione delle eclissi, ma dà effemeridi (di "poco") incorrette quando la Luna è in posizione di quadratura.[3].

2 Moti regolari (o ordinati)

La teoria della gravitazione universale, di Newton, consentì di porre le basi per una teoria unitaria dei fenomeni meccanici, e celesti in particolare, e Laplace ottenne in forma analitica quantitativa perchè e come i moti celesti si possano rappresentare in termini di cicli ed epicicli. Da allora si cercò di ridurre ogni qualsiasi moto di un sistema meccanico ad uno quasi periodico, decomponibile in deferenti ed epicicli.

Non è però impossibile pensare che, nella decadenza del pensiero scientifico seguita all'abbandono di Alessandria da parte degli scienziati ellenistici e legata anche ai tragici eventi politici del V secolo (persecuzioni degli ebrei, assassinio di Ipazia, ...), sia rimasto solo quanto fosse "utile", come appunto la *Sintassi Matematica* di Tolomeo, mentre quello che era servito per compilarla, insieme alle compilazioni precedenti e da essa "superate", è andato perduto. Sebbene Tolomeo stesso non ci dia indicazioni in proposito, si veda la citazione alla fine di questo articolo riguardo all'iotesi dell'*equante*, *forse* le complesse costruzioni di Tolomeo per la rappresentazione in cicli dei moti dei pianeti avevano una base teorica che le giustificava e selezionava, fra tante altre ugualmente possibili se il solo scopo del loro sviluppo fosse stato di "salvare i fenomeni", [3].

Ben considerando il commento di Copernico, [4, p.108], alla impostazione di Tolomeo:
Essendomi pertanto reso conto di questo [cioè della non completa razionalità dello schema tolemaico]*, andavo spesso meditando se per caso non si potesse trovare un più razionale sistema di circoli con i quali fosse possibile spiegare ogni diversità apparente; circoli, s'intende, mossi tutti in se stessi con moto uniforme, come richiede la regola del movimento assoluto,*
è opportuno non dimenticare che le fondamentali scoperte di Keplero e la successiva altrettanto fondamentale teoria di Newton, conseguenti anche alla nuova metodologia copernicana e all'opera di Galileo, non scalfirono affatto la concezione del moto come composto da moti circolari uniformi. Anzi ancor recentemente in uno dei manuali più consultati, il trattato di fisica teorica di Landau e Lifshitz degli anni 1950, la turbolenza nei fluidi viene presentata come dovuta al fenomeno per cui, al crescere della forza che sollecita il moto del fluido (ad esempio la velocità del vento alla superficie del mare, o l'attrazione lunare generante le maree), compaiono sempre più armoniche di alcune frequenze di oscillazione, producendo un moto all'apparenza disordinato (questo punto di vista è stato "modificato" nelle edizioni successive al 1970 dai curatori delle nuove edizioni).

Nella meccanica moderna hanno dunque ancora un ruolo di primo piano i sistemi i cui moti possono essere rappresentati alla maniera classica, Eq.(1.2). Sono ora chiamati *sistemi con moto ordinato* o *integrabile*.

Più precisamente un sistema si definisce *integrabile* e a ℓ gradi di libertà se ogni suo stato possibile viene individuato da ℓ coordinate indipendenti e dal loro tasso di variazione per unità di tempo, cioè da 2ℓ coordinate che denotiamo $(x_1, \ldots, x_{2\ell})$ e tali coordinate evolvono nel tempo restando esprimibili in termini di funzioni X_i come, cfr Eq.(1.3),

$$x_i = X_i(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{A})t), \tag{2.1}$$

ove $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_\ell)$ non variano con il tempo, sono le *costanti del moto*, e $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell)$ sono invece angoli che variano nel tempo descrivendo ℓ cerchi unitari a velocità costanti $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{A}) = (\omega_1(\mathbf{A}), \ldots, \omega_\ell(\mathbf{A}))$.

In prima approssimazione i sistemi meccanici più semplici e interessanti sono integrabili in questo senso e rientrano così fra i sistemi descrivibili tramite moti circolari uniformi. La meccanica di Newton, fornì in aggiunta il metodo per trovare le espressioni delle funzioni X_i a partire da un semplice principio generale. E Laplace, [5], potè così mostrare come la teoria del mondo potesse essere ottenuta dalla legge di gravitazione: le espressioni ottenute da Laplace erano approssimate, ma sembrava che almeno in linea di principio fossero indefinitamente migliorabili, se necessità lo avesse richiesto.

Fu proprio nel momento del massimo trionfo di questo punto di vista che l'opera di Boltzmann e Poincarè, sul finire del XIX secolo, cominciò a mettere in evidenza che non tutti i moti possono essere rappresentati come generati da un sistema di motori (tale era il nome spesso usato per gli angoli $\boldsymbol{\varphi}$, o meglio per la causa *ignota* che ne sosteneva la rotazione) rotanti con velocità uniformi e collegati tramite meccanismi di ruote e pulegge ai punti di cui si studia il moto, [6].

La caratteristica dei moti descritti da cicli ed epicicli, cioè *quasi periodici*, la cui violazione porta a concepire moti diversi è la loro "predicibilità". Questa è una nozione quantitativamente molto precisa: e implica che dati iniziali vicini evolvono deterministicamente restando vicini molto a lungo.

Supponiamo che sia necessario aspettare un tempo T perché una grandezza prescelta, osservata su due moti con dati inizialmente molto vicini, assuma valori differenti di una quantità prefissata, che chiamerò D. Allora, se il moto è quasi periodico, per osservare una differenza doppia occorrerà attendere un tempo totale doppio, per una quadrupla occorrerà un tempo totale quadruplo, per una otto volte maggiore sarà necessario attendere un tempo totale otto volte maggiore ecc. Il tempo di attesa per raggiungere una variazione multipla di D del fattore 2^n varia cioè aumentando proporzionalmente a $2^n T$ stesso, cioè in *progressione aritmetica*, propietà chiamata *predicibilità*, e come vedremo questo è molto diverso da quanto avviene in altri moti che, per contrasto, sono chiamati *disordinati* o *caotici*.

3 Moti disordinati, reversibilità e ricorrenza

Con Poincarè diventò chiaro (ai pochi che ne apprezzarono questo aspetto dell'opera) che invece esistono moti per cui, assunta come unità di tempo il tempo T necessario perchè la differenza fra due osservazioni divenga il doppio di un valore prefissato D, allora è necessario attendere ulteriormente solo il doppio di questo tempo per vedere la differenza quadruplicata e per vedere due osservazioni discostarsi di una distanza ottuplicata basta attendere solo il triplo del tempo iniziale: il tempo di attesa perché venga raggiunta una variazione multipla di D del fattore 2^n varia cioè aumentando proporzionalmente a nT, anziché a $2^n T$: si dice allora che differenze iniziali si amplificano al crescere del tempo in *progressione geometrica*, o esponenzialmente, invece che in progressione aritmetica.

Ora dal lavoro di Poincarè e poi dei matematici e fisici del XX secolo emerge che sono proprio i moti caotici a dominare i fenomeni che coinvolgono sistemi anche semplici: tanto che si annidano perfino nei moti dei pianeti che su scale di tempo astronomiche saranno, o sono stati, soggetti a movimenti del tutto inaspettati sulla base delle teorie tolemaico-laplaciane (quali il rovesciamento dell'asse di rotazione di Venere, la variazione di molti gradi dell'asse di rotazione di Marte, la caduta del satellite Phobos su Marte, e peggior fato attendono forse la Luna o Mercurio, [7]).

La visione quasi periodica ben si coniugava con il determinismo che le leggi di Newton postulavano per tutti i moti, di poche o molte particelle. Tuttavia una teoria più approfondita della fisica newtoniana, che a secondo delle circostanze prevede sia moti quasi periodici che moti caotici, ci dice che anche i moti caotici sono deterministici, sebbene sia molto difficile prevederne l'evoluzione futura. Inoltre entrambi i tipi di moto hanno la proprietà sorprendente di *reversibilità*: ossia i moti *inversi*, in cui tutti i punti si muovono a ritroso ripercorrendo le traiettorie percorse nel passato con velocità opposte a quelle osservate in un dato moto, sono anche moti perfettamente possibili.

Quindi entrambe le concezioni del moto paiono *in contrasto* con alcuni aspetti assai familiari della realtà: ad esempio sappiamo bene che certi fenomeni si svolgono solo in un verso: l'esempio della tazzina che cadendo da un tavolo va in frantumi è un esempio tipico. Sebbene accettando la fisica newtoniana *sia possibile* organizzare il moto iniziale dei pezzi in cui si è rotta in modo che risalga dal pavimento al tavolo ricomponendosi, tuttavia nessuno si aspetta di osservare una tale meraviglia. Così vedere un recipiente d'acqua riscaldarsi spontaneamente in una sua metà raffreddandosi nell'altra sembrerebbe quanto meno strano: *e tuttavia non sarebbe contraddittorio* rispetto alle leggi della fisica newtoniana.

Insomma come la concezione antica della natura del movimento anche quella più moderna appare incompatibile con certe osservazioni comuni, pur essendo ricca di capacità predittiva e sorgente di applicazioni importanti e interamente basate sulla teoria deterministica newtoniana del moto (si pensi al funzionamento dei bastimenti, agli aereoplani o ai meccanismi semplici o complessi che si possono trovare su un locomotore o una nave).

È interessante che la risoluzione di questa contraddizione fra reversibilità dei moti, ordinati o disordinati, e la manifesta irreversibilità dei fenomeni che ci circondano sia possibile e conduca a vedere come possibile che un moto possa essere disordinato e ordinato al tempo stesso.

Il dualismo non sfuggì a Boltzmann, anzi ne catturò l'interesse al punto che tutta la sua opera fu dedicata alla questione. Pur movendo da una concezione dei moti come moti addirittura periodici e negando, in sostanza, la necessità, se non come artificio utile, dei moti quasi periodici o caotici volle dedurre l'irreversibilità macroscopica (che osserviamo tutti i giorni nei sistemi dotati di un minimo di complessità). E questo come *conseguenza necessaria* della meccanica microscopica che invece è reversibile, sia nella versione antica che in quelle moderne.

E Boltzmann riuscì nell'impresa, che parrebbe impossibile "*per la contradizion che nol consente*" (XXVII, In.) di dedurre leggi che governano i fenomeni irreversibili, portando allo stabilimento dell'equilibrio termodinamico, a partire da leggi microscopiche reversibili e, fin dall'inizio delle sue ricerche, da leggi microscopiche conducenti addirittura a moti ordinati, anzi periodici. Le sue idee, veramente rivoluzionarie gli costarono aspre critiche, e non solo da parte del logico matematico Zermelo (lo stesso Poincaré è forse da annoverare fra i critici), e polemiche che, continuando sorprendentemente ancor oggi, affliggono i ricercatori contemporanei. Rivediamo allora come sia stato affrontato il paradosso onde mettere in luce il senso in cui ordine e disordine, reversibilità e irreversibilità, possano coesistere nello stesso moto.

Per comprendere il pensiero e la fisica di Boltzmann occorre anzitutto tener presente che la sua è una teoria dell'equilibrio e dell'avvicinamento all'equilibrio: è una teoria che, a partire da una concezione della materia come aggregato di atomi, vuole spiegare come mai una sostanza, ad esempio acqua, più calda in una sua parte che in un'altra, evolva verso uno stato in cui la temperatura è ovunque la stessa (ammesso che sia racchiusa in un contenitore isolato o a contatto con un ambiente esso stesso a temperatura costante). Questo è certo un particolare fenomeno irreversibile pur, di gran lunga, non il più generale e conviene prenderlo ad esempio.

Il punto fondamentale è che nei sistemi che consistono di molte particelle o di molte parti (come la materia costituita da atomi che obbediscono alle leggi di Newton) non solo i moti si possono svolgere nelle due direzioni del tempo ma molto di più può essere supposto, ed è questa l'*ipotesi ergodica* di Boltzmann: cioè che un moto con un certo dato iniziale evolva assumendo ciclicamente *tutti gli stati microscopici possibili* e compatibili con l'energia del sistema (che è sempre conservata e costante). Però si deve notare che la stragrande maggioranza degli stati microscopici corrisponde a stati macroscopici indistinguibili fra loro: non ha importanza se vicino, in scala atomica, a un dato punto si trovi un atomo o che velocità abbiano gli atomi situati vicino ad un punto dato perchè è una proprietà irrilevante per osservazioni macroscopiche,

È si possibile (in linea di principio) aggiustare i dati iniziali di un sistema in modo che l'evoluzione produca effetti sorprendenti, quali una creazione spontanea di differenza di temperatura fra due metà di un recipiente di acqua a partire inizialmente da uno stato che apparentemente ha un'unica temperatura.

Tuttavia questi stati avrebbero una vita brevissima e ben presto si trasformerebbero nuovamente in stati microscopici cui corrispondono le consuete proprietà di equilibrio (temperatura costante, nel caso dell'esempio): poi il sistema proseguirebbe la sua evoluzione microscopica (assai complessa e osservabile solo su scale di lunghezza fuori delle nostre capacità visive e, salvo casi eccezionali, neanche con l'aiuto di un microscopio) senza che macroscopicamente si noti nulla di interessante. E questo per un tempo di durata davvero inimmaginabile (misurabile, in un semplice esempio di Boltzmann, in un numero di "*età dell'Universo*" rappresentato da 1 seguito da un miliardo di miliardi di zeri!) al termine del quale si potrà osservare il ritorno del sistema allo stato iniziale anomalo in cui si crea una differenza di temperatura fra le parti e in modo spontaneo (se si sarà risusciti a mantenere il sistema assolutamente isolato in un contenitore perfetto per un tale tempo, cosa anch'essa *inconcepibile*, anche se tale non parve a Zermelo). Questa "*fluttuazione*" o "*cambiamento*", durerà pochissimo e il ciclo ricomincerà.

Dunque il ritorno spontaneo in uno stato fuori equilibrio termico è un fenomeno possibile ma che avviene su scale di tempo non osservabili a causa della loro lunghezza: la dinamica reversibile dà luogo a fenomeni *apparentemente* irreversibili. E questo è strettamente legato alla caoticità del moto microscopico: che implica che i fenomeni di avvicinamento all'equilibrio avvengano con rapidità geometrica ossia in modo da svolgersi in *poche* unità del tempo minimo necessario per osservare un cambiamento sensibile dello stato macroscopico (grazie alla crescita con rapidità esponenziale delle differenze iniziali), laddove la periodicità del moto avviene sulle scale di tempo inimmaginabilmente lunghe sulle quali si osserva la reversibilità (che possiamo chiamare "scale dei ricorsi storici").

La conclusione è che la caoticità dei moti è possibile non solo nei moti che sono intrinsecamente caotici su tutte le scale di tempo (scoperti da Poincaré) ma, come mostrato da Boltzmann, anche quando strettamente parlando tutti i moti sono periodici. Un moto periodico, senza contraddizione, può apparire caotico e irreversibile su scale di tempo osservabili mentre la periodicità può avere periodo talmente lungo da non essere da prendere neppure in considerazione.

Tuttavia nello studio della meccanica è quasi sempre conveniente riguardare i moti caotici come intrinsecamente tali e usare modelli che abbiano questa proprietà, riservando i moti regolari ai sistemi il cui moto appare come regolare sulle scale di tempo osservabili (e non sulle fantastiche scale di tempo delle ricorrenze), [6].

4 La complessità

Si pone dunque il problema della descrizione delle proprietà dei moti intrinsecamente irregolari, caotici. E una prima nozione rilevante è quella della misura della loro *complessità*. La possibilità di fornirne una misura quantitativa, pur avendo avuto segni di sviluppo in precedenza, è certamente da far risalire a Shannon, [8].

Si pose allora, dapprima, il problema di misurare la complessità non già di un moto ma di una successione (infinita) di simboli σ, tratti da un insieme finito A di $k \geq 2$ simboli che chiameremo "*alfabeto*". A prima vista scollegato dalla teoria del moto, è il problema che nasce, ad esempio, se si vuol misurare la complessità di un linguaggio, come la complessità della lingua italiana.

In questo caso la successione infinita potrebbe essere il testo $\mathcal{T}$ ottenuto prendendo tutti i libri della Biblioteca Nazionale di almeno 50 pagine (non per limitare il tempo necessario ma per includere solo testi che più probabilmente hanno coerenza di contenuto e propretà di linguaggio) e allineandone i rispettivi contenuti in una sola riga (in ordine arbitrario ma senza smembrare i testi in modo che restino comprensibilmente leggibili). È una successione finita ma che può essere considerata infinita a tutti gli effetti pratici, o quasi, e tratta da un alfabeto a 37 simboli (le 26 lettere, comprese k, j, x, y, w, lo spazio bianco, gli accenti acuto e grave, i punti esclamativo e interrogativo, 6 segni d'interpunzione (virgola, punto, punto e virgola, due punti, due caporali, le virgolette), ignorando gli altri).

Tornando al problema generale, della definizione di complessità manifestata da una stringa infinita $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ di simboli estratti da un alfabeto A fissato, si immagini di costruire una successione di simboli di A lanciando un dado (onesto) con k facce e registrando successivamente i risultati. Si ottiene una successione, che chiameremo "testo", e che intuitivamente è la più complessa possibile. Il numero di stringhe finite, che chiameremo "parole" o "frasi", di lunghezza N che appaiono nel testo con frequenza positiva sarà k^N, ossia il numero massimo possibile, e ciascuna con uguale frequenza $\frac{1}{k^N}$ (se, come supposto, il dado è onesto).

Però è evidente che i testi reali non sono casuali: il testo $\mathcal{T}$, dei libri della Biblioteca Nazionale, è costruito obbedendo a molte regole che limitano il numero di parole che possono apparire in esso. Non troveremo mai la stringa "aqcua" né la "a squola li maestro": ossia non le troveremo se non per rarissimi errori di stampa che sono trascurabili, dovendo apparire con frequenza a tutti gli effetti nulla, a meno che non siano sistematici.

Quindi una misura della complessità potrebbe essere il numero h^N di stringhe possibili di lunghezza N: ci si può aspettare che $h^N \ll k^N$ almeno per N molto grande; per il che basta che $h < k$.

Naturalmente se si tengono in conto gli errori di stampa, le ridondanze, e le parole o simboli resi, dal contesto, irrilevanti ai fini della comprensione, allora il numero delle stringhe a priori possibili può essere di gran lunga maggiore, fissata la lunghezza N dei testi che si è disposti a leggere, di quello nel corrispondente testo *emendato* da errori sistematici e soprattutto da ridondanze. L'idea di Shannon fu di cercare di definire la complessità di una stringa infinita $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ di simboli che avesse le proprietà "naturali"

(1) che in $\boldsymbol{\sigma}$ ogni stringa finita $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ di lunghezza p, arbitraria, appaia con una frequenza di apparizione ben definita (eventualmente nulla), detta proprietà di *stazionarietà*.
(2) che due stringhe finite $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ appaiono in posti con indici a distanza m con una frequenza che, *se mediata su* m, è uguale al prodotto delle frequenze di $\boldsymbol{\xi}$ e di $\boldsymbol{\gamma}$, detta proprietà di *indipendenza in media* o *ergodicità*.

Sono due proprietà che è certamente ragionevole supporre per il testo $\mathcal{T}$

"italiano" su menzionato, almeno finché si considerano stringhe di lunghezza moderata. Queste appaiono con frequenza definita: ad esempio il numero di volte in cui la lettera *a* è scritta nel testo diviso per la lunghezza del lunghissimo testo è un numero ben definito (a meno di un errore che ci si aspetta essere dell'ordine dell'inverso della radice quadrata della lunghezza totale del testo $\mathcal{T}$). Così pure la frequenza della stringa *cosa*, oppure della stringa *quando*, e più in generale di quasi tutte le parole del dizionario è ben definita in $\mathcal{T}$. Così pure la frequenza di apparizione della coppia *qc* pur essendo nulla se le due lettere sono unite, salvo errori di stampa, diventa uguale a quella del prodotto della frequenza di q e di quella di c se si conta la frequenza di apparizione di q seguito, *dopo* m *segni*, da c e se ne calcola la media su m.

Ma è chiaro che il numero di stringhe di lunghezza N che si possono incontrare con frequenza positiva sarà probabilmente inferiore di gran lunga a 37^N. Ad esempio il numero di stringhe di una decina di caratteri possibili sarebbe *a priori* enorme $37^{10} \simeq 5 \cdot 10^{15}$ ma il numero realmente osservabile sarà assai minore sebbene anche esso enorme: questo perchè le stringhe devono obbedire a regole precise per poter apparire con frequenza positiva: regole di grammatica, di ortografia, e poi il tutto deve (o dovrebbe) avere un senso.

Tutto questo viene tradotto in termini precisi dal *teorema di Shannon*

Data una stringa infinita $\boldsymbol{\sigma}$*, in un alfabeto a* k *simboli, che verifica le proprietà (1) e (2) esiste un numero* h*,* $1 \le h \le k$*, tale che, dato a piacere un numero positivo* ε*, le stringhe* $\mathcal{S}$ *di lunghezza* N *possono essere divise in due gruppi* $\mathcal{S}_{rare}$ *e* $\mathcal{S}_{frequenti}$*. Le stringhe frequenti hanno frequenze di apparizione comprese fra* $(h+\varepsilon)^{-N}$ *e* $(h-\varepsilon)^{-N}$*,* [cioè tutte quasi uguali] *e* [quindi] *sono in numero compreso fra* $(h-\varepsilon)^N$ *e* $(h+\varepsilon)^N$ *mentre la totalità delle rimanenti è costituita da stringhe con frequenze di apparizione così basse da avere una somma* $< \varepsilon$*.*

Quindi se $h < k$ il numero h, detto *entropia* o *informazione* del testo, ci dice che per N grande si potrebbe comprimere il testo, perdendo solo una piccola parte (ε) della sua informazione, semplicemente scartando le stringhe "rare": e sarebbe possibile accorciarlo con poca perdita d'informazione. Se si volesse trascrivere un testo di entropia h (scritto in un alfabeto di $k \ge h$ simboli) in forma compressa si potrebbe comprimerne la lunghezza originaria N in M tale che $k^M \simeq h^N$. Si guadagnerebbe quindi un fattore $\frac{M}{N} = \frac{\log h}{\log k}$ in lunghezza, purché N sia grande e *naturalmente* non fossimo interessati a "leggere" tratti di lunghezza $\gg N$. Questo bene illustra il perchè del nome di "informazione" dato a h, o più spesso al suo logaritmo.

È opportuno ricordare qui, per evitare confusione, che spesso si dà il nome di entropia o informazione a $s = \log h$ o talvolta a $s = \log_2 h$: qui usiamo la forma "esponenziale". Quindi $h > 1$ è lo stesso che $s > 0$ e se $h > 1$ si dice che la successione $\boldsymbol{\sigma}$ ha *complessità positiva*.

Si può anche dire che la quantità di *informazione* contenuta in un testo è intrinsecamente definita e non dipende da come lo si scrive ma da quello che è scritto in esso. Una valutazione molto grossolana, ma certamente impressionante, dell'entropia di un testo molto lungo (ad esempio un libro in formato testo) è fornita dai codici di compressione di comune uso nei calcolatori elettronici, che riducono facilmente testi comuni in testi più corti.

Un testo elettronico italiano o inglese che usa normalmente i 128 caratteri ASCII viene normalmente convertito in un alfabeto a 256 caratteri, gli ASCII estesi, e ridotto di un circa $\frac{1}{3}$ senza perdere informazione alcuna, neppure gli errori di stampa, con i comuni programmi `zip` o `gzip`. E questi algoritmi di compressione sono solo basati sullo studio delle frequenze di apparizione di stringhe molto corte, anche perchè è molto difficile costruire la compressione, in modo soddisfacentemente rapido, sulla base di stringhe lunghe più di cinque o sei simboli.

5 Ipotesi caotica e informazione

I concetti a fondamento della teoria della complessità sono alla base dei tentativi per una comprensione razionale dei moti caotici quali quelli che si manifestano nella turbolenza nei fluidi o, più in generale, nella termodinamica dei sistemi di molte particelle.

Risale all'inizio degli anni '70 la proposta di Ruelle, [9], poi estesa ad una ipotesi più generale detta "*ipotesi caotica*", [6], di pensare che esistano due paradigmi, ossia due modelli semplici, che catturano gli aspetti essenziali dei moti possibili. È questa una sostanziale estensione dell'ipotesi ergodica che permetteva solo di interpretare i fenomeni di equilibrio o di avvicinamento all'equilibrio.

Il primo paradigma è quello dei moti quasi periodici mossi da un certo numero di *motori*, nel senso classico del termine del §1, che fa da modello per i moti dei sistemi più semplici quali il pendolo, gli oscillatori armonici o anche i pianeti soggetti a moto kepleriano. Sono i moti dei sistemi *integrabili*, nel senso del §1.

Il secondo è quello assai meno familiare, ma ben noto e studiato, dei cosiddetti sistemi *iperbolici*: in questi è ancora possibile che ogni loro punto si possa concepire come situato su un complicato gioco di leve che sono però mosse da motori che producono movimenti caotici nel senso descritto precedentemente: ossia moti in cui la distanza fra dati inizialmente molto vicini va crescendo esponenzialmente nel tempo.

Non è questo il luogo per una descrizione e definizione matematicamente precisa di un sistema iperbolico, [10]: dirò solo della sua proprietà chiave. Immaginiamo il sistema meccanico come costituito da punti materiali mossi da forze mutue e da forze esterne schematizzate come applicate a “leve e pulegge” agenti anch'esse sui punti del sistema. Se il sistema è iperbolico si può pensare di eliminare qualcuna delle forze esterne e agire sulle leve così liberate lanciando *a caso* un dado e movendole opportunamente in una direzione o un'altra e di una quantità prefissata, in funzione del risultato ottenuto dal lancio (invece che facendo ruotare con moto uniforme le dette leve come nella rappresentazione dei moti ordinati).

Il moto così ottenuto, certamente casuale per costruzione, nondimeno può essere visto come un moto possibile del sistema: nel senso che reintroducendo le forze esterne eliminate è possibile assegnare condizioni iniziali cui segue una evoluzione che riproduce il moto casuale prima costruito. È anche molto facile, a scopo di eseguire sperimentazioni sulla possibilità di questo notevole fenomeno, generare un tale tipo di moto via simulazione elettronica avendo a disposizione un generatore di numeri casuali (presente su tutti i calcolatori).

L'*ipotesi caotica* dice

sebbene si possano concepire matematicamente anche moti diversi dai due “estremi” menzionati, regolare e caotico, tuttavia questi due modelli sono “generalmente” sufficienti alla descrizione dei fenomeni di equilibrio e non equilibrio nei sistemi meccanici: i cui moti sono quindi di uno dei due tipi.

Una conseguenza è che, *quindi*, i moti caotici sono da pensare come generati a caso: è però solo una casualità apparente perchè in realtà il moto è deterministico, proprio come in realtà è deterministica la successione di numeri casuali generata da un calcolatore. Ci si avvicina dunque ad una altra antica concezione del moto tramandataci da “*Democrito, che 'l mondo a caso pone*”, (IV, In.).

La connessione con la teoria dell'informazione avviene naturalmente. Dato un sistema dinamico caotico, ossia una legge di evoluzione S che trasforma gli stati x del sistema osservati a cadenza predefinita generando un moto caotico, allora i risultati delle osservazioni hanno una complessità definita e mai superiore a un valore opportuno h, $1 \le h < +\infty$, detto appunto "entropia" o "informazione" della dinamica, almeno se si ignorano moti con stati iniziali che richiedono particolari accorgimenti per essere generati (tecnicamente il cui insieme ha "volume nullo" nell'insieme di tutti gli stati): è questa una proprietà matematica generale dei sistemi iperbolici.

Invero si immagini di eseguire misure per osservarne l'evoluzione e che i risultati delle misure prescelte diano ad ogni osservazione eseguita un numero finito di risultati possibili $\sigma = 1, 2, \ldots, k$. Si associa così ad ogni stato iniziale la "*storia*" delle misure, ossia i loro risultati successivi σ_i, $i = 1, 2, \ldots$. È questa una successione $\boldsymbol{\sigma}$ che nei sistemi caotici, e escludendo dati iniziali non costruibili se non via particolari accorgimenti, ha frequenze definite ed è ergodica, nel senso del §4. Ad essa si può dunque applicare il teorema di Shannon e quindi definire un'entropia $h \geq 1$ che, essenzialmente, conti il numero di risultati diversi che si possono presentare eseguendo N misure, se N è molto grande: tale numero è approssimativamente h^N.

Però le successioni di simboli che si possono ottenere dipendono dalle osservazioni che si eseguono. Un'osservazione si deve immaginare consistere nel fissare una suddivisione degli stati in insiemi E_σ, $\sigma = 1, 2, \ldots, k$, e poi riconoscere in quale di queste parti sia contenuto lo stato x osservato. L'osservazione n-ma fornisce allora il simbolo σ_n dell'insieme E_{σ_n} in cui si viene a trovare lo stato $x_n = S^n x$ in cui x evolve.

Questo è in realtà proprio quello che si fa di regola quando si eseguono osservazioni: schematicamente si ha a disposizione uno strumento con un "quadro" suddiviso in settori che chiamiamo qui σ, in numero finito k, e su di esso è situata una "freccia" che, in funzione del risultato della n-ma misura eseguita, indica uno dei settori generando così una successione $\boldsymbol{\sigma}$ di "risultati" $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ove σ_i è il risultato ottenuto quando l'i-mo evento che cadenza l'esecuzione delle misure lo genera. La successione $\boldsymbol{\sigma}$ ha nome *storia* del moto sui settori del quadro.

Dunque cambiando le misure o raffinandole, ad esempio infittendo la suddivisione in quadranti del quadro sul quale se ne leggono i risultati, si otterranno a parità di dati iniziali storie diverse e con numeri di simboli possibili ogni volta differente e che può essere reso grande a piacere.

È quindi importante che *a dispetto di questa ambiguità sia invece impossibile* generare successioni di osservazioni a complessità arbitrariamente grande se si restringe l'attenzione ai sistemi che verificano l'ipotesi caotica e a moti i cui dati iniziali non richiedono particolari accorgimenti per essere generati (cioè non sono in uno speciale insieme di volume nullo). Invero il teorema di Kolmogorov-Sinai, [10], in questo caso dice

Le storie di osservazioni successive eseguite sul moto di un sistema dina-

mico verificante l'ipotesi caotica sono successioni con entropia $\le h$*. La quantità* h *non può essere superata eseguendo misure di maggior precisione ed è raggiunta nelle misure che sono abbastanza raffinate perchè due punti che abbiano la stessa storia debbano necessariamente coincidere.*

Pensando il linguaggio che esprime una lunga deduzione logica (ad esempio un trattato filosofico) come una successione concatenata di lettere dell'alfabeto generate da un processo mentale controllato da regole logiche si può allora dire, per il teorema appena citato e a conferma di quanto forse chiunque di buon senso penserebbe, che la complessità del testo non dipende dalla lingua usata né dall'ampollosità di chi espone: ha sempre la stessa complessità da chiunque e comunque venga espressa (pur di saperla intendere).

6 Ordine nel caos

Elementi unificanti, quindi di ordinamento, nella concezione dei moti caotici seguono dal teorema precedente o da altri risultati della teoria matematica, [10], dei sistemi iperbolici.

Ne consegue, infatti, che dal moto di un sistema caotico non si può "estrarre informazione" più di quanta ne contenga intrinsecamente: a nulla vale raffinare la precisione delle misure, almeno se si studia il sistema abbastanza a lungo. Raffinare le misure può essere conveniente quando se ne eseguono un numero N non grande; ma se si è disposti a eseguirne abbastanza non è assolutamente conveniente una grande precisione: alla lunga l'informazione che cumulativamente si raccoglierebe sarebbe la stessa (per i teoremi di Shannon e di Kolmogorov-Sinai). Dunque la quantità h fornisce una precisa misura della complessità dei moti.

Inoltre nei sistemi verificanti l'ipotesi caotica e non regolari il valore di h è strettamente > 1. Mentre nel caso dei sistemi a moto regolare *non esiste* alcuna misura che generi successioni a complessità $h > 1$. Anzi il numero totale di stringhe di lunghezza N generabili dall'evoluzione di un sistema a moti ordinati cresce non più velocemente che proporzionalmente a N. Laddove un qualsiasi sistema caotico, per quanto poco complesso ossia per quanto h possa essere vicino a 1, genera stringhe di lunghezza N in numero $\sim h^N$ che cresce *esponenzialmente con* N.

Infine è assai notevole che tutti i sistemi caotici che hanno uguale entropia h sono "codificabili" gli uni negli altri: ossia esiste un codice, cioè un cambiamento delle coordinate, che *trasforma gli uni negli altri* ed è atto a descrivere tutti i dati iniziali salvo, al solito, un insieme di dati eccezionali e realizzabili solo con particolari accorgimenti (c.f.r. §5). E allora si vede bene in che senso i moti ordinati e quelli disordinati siano due vaste classi con proprietà "universali". Questo è un caso particolare di un altro dei pilastri della teoria dell'informazione e della teoria dei codici: il *teorema di Ornstein*, [11].

Per quel che concerne il fenomeno dell'irreversibilità l'interpretazione non ne diviene immediatamente più facile alla luce dell'ipotesi caotica. In generale gli stati rilevanti per le proprietà statistiche dei moti sono soggetti ad essere ristretti ad un insieme di stati assai più piccolo degli stati iniziali possibili, detto *attrattore*. Tutti i dati iniziali evolvono verso l'attrattore e vi restano. E la spiegazione qualitativa della irreversibilità nei moti caotici generali resta la stessa di quella proposta da Boltzmann per lo studio dei fenomeni di equilibrio: ossia il sistema passa attraverso tutti gli stati microscopici possibili, che ora sono però solo quelli che si trovano sull'attrattore, mentre macroscopicamente nulla cambia o meglio ogni fluttuazione avviene su scale di tempo superastronomiche.

Nei fenomeni fuori dall'equilibrio si manifesta irreversibilità anche perchè, sebbene le fluttuazioni che allontanano il sistema dal suo stato stazionario possano avvenire insieme a quelle che lo allontanano in un senso opposto seguendo cioè le stesse traiettorie con velocità opposta, tuttavia le due possibilità non avvengono ora con uguale frequenza (rarissima comunque), a differenza di quanto avviene nei sistemi in equilibrio, cioè non soggetti a forze che compiono lavoro e a termostati che assorbono il calore generato.

7 Commento sui paradigmi di ordine e caos

Uno dei successi dell'ipotesi caotica è stato di stabilire che almeno in certe classi di sistemi vi è una relazione universale fra la frequenza con cui certe fluttuazioni possono aver luogo e quella con cui le fluttuazioni opposte avvengono. Tali frequenze sono identiche nei sistemi in equilibrio mentre sono diverse in situazioni fuori dell'equilibrio, e in vari casi la differenza è controllata da una quantità che è stata collegata alla nozione di *creazione di entropia*: il problema di definire cosa intendere per entropia in sistemi fuori dell'equilibrio è in realtà un problema aperto e l'ipotesi caotica, che sembra essere accettata da alcuni con un entusiasmo pari solo alla revulsione che suscita in altri, ha portato a proposte di soluzioni servite almeno a riaccendere una discussione che sembrava sopita da decenni.

In proposito non è senza interesse meditare ancora su quanto Tolomeo afferma a proposito di formulazione e utilizzo di ipotesi, [1, p.422]:
"*... possiamo accedervi, poichè sappiamo che questo tipo di procedimento*

non rigoroso non pregiudicherà il fine desiderato, purché non finisca con il risultare in alcun errore osservabile; e sappiamo anche che ipotesi fatte senza dimostrazione, purchè solo si trovino in accordo con le osservazioni, non avrebbero potuto essere trovate senza un opportuno procedimento metodologico, sebbene sia difficile spiegare come si sia pervenuti alla loro concezione (perché, in generale, la causa dei principi primi è, per natura, o non esistente o di difficile descrizione)".

L'*ipotesi ergodica* propone che un sistema isolato evolva nel tempo passando per tutti gli stati microscopici possibili. Sulla sua base Boltzmann pervenne alla riconciliazione del determinismo e reversibilità delle leggi della meccanica con le osservazioni macroscopiche che invece suggeriscono una direzione privilegiata della *freccia del tempo* e il divenire perpetuo verso un futuro che è distinto dal passato. È dunque notevole e importante che l'ipotesi ergodica stessa non sia in contrasto ma invece risulti una conseguenza dell'ipotesi caotica: la quale quindi la estende a un campo più generale di ricerche nel quale sorprendentemente sono mancati sviluppi concettuali in gran parte degli ultimi sessanta anni. Essa consente di estendere inalterato lo schema concettuale sviluppato da Boltzmann che riconcilia determinismo e reversibilità microscopiche con le apparenti casualità e irreversibilità macroscopiche, [12].

Ci si possono allora aspettare ricadute tecnologiche qualora l'ipotesi caotica venga riconosciuta come principio valido? *Direi di no:* il suo interesse è puramente concettuale e non potrà certo superare (e credo neppure uguagliare) l'importanza altrettanto teorica dell'ipotesi ergodica che, ciononostante, è stato uno dei motori che hanno mosso la ricerca in meccanica statistica e nella teoria dei sistemi dinamici. E questo a un punto tale che, forse, nessuna delle teorie più orientate verso rilevanti applicazioni nel campo della fisica della materia eviti un riferimento, pur fugace, a questa fondamentale ipotesi. Cioè l'ipotesi ergodica spesso fornisce una parte essenziale al quadro concettuale in cui si inseriscono idee alla base di applicazioni la cui concretezza potrebbe far credere che nulla abbiano a che vedere con questioni di natura sostanzialmente filosofica come quelle qui discusse. È forse questo un ruolo che la nuova ipotesi può, anche se in forma più modesta, ricoprire.

References

[1] G.J. Toomer. *Ptolemy's Almagest.* Springer Verlag, New York, 1982.

[2] O. Neugebauer. *The exact sciences in antiquity.* Dover, New York, 1969.

[3] G. Gallavotti. Quasi periodic motions from Hypparchus to Kolmogorov. *Rendiconti Accademia dei Lincei, Matematica e applicazioni*, 12:125–152, 2001 e chao-dyn/9907004.

[4] N. Copernico. *De hypothesibus motuum caelestium a se constitutis commentariolus.* UTET, in *Opere* a cura di F. Barone, Torino, 1979.

[5] P.S. Laplace. *Traité de Mécanique Céleste (Collected papers of P.S. Laplace).* Bachelier, Paris, 1828-29.

[6] G. Gallavotti. *Statistical Mechanics. A short treatise.* Springer Verlag, Berlin, 2000.

[7] J. Laskar and P. Robutel. The chaotic obliquity of the planets. *Nature*, 88:608 – 612, 1993.

[8] C. Shannon. The mathematical theory of communication. *Bell Systems Technology Journal*, 27:379–423 and 623–656, 1948.

[9] D. Ruelle. What are the measures describing turbulence. *Progress in Theoretical Physics Supplement*, 64:339–345, 1978.

[10] G. Gallavotti, F. Bonetto, and G. Gentile. *Aspects of the ergodic, qualitative and statistical theory of motion.* Springer Verlag, Berlin, 2004.

[11] D. Ornstein. *Ergodic Theory, randomness and dynamical systems*, volume 5 of *Yale Mathematical Monographs.* Yale University Press, New Haven, 1974.

[12] G. Gallavotti. Heat and fluctuations from order to chaos. *European Physics Journal B, EPJB*, 61:1–24, 2008.