

Fluidodinamica: i nuovi aspetti

GIOVANNI GALLAVOTTI*

Sommario: *I problemi del moto dei fluidi sono ben illustrati nel caso dei fluidi viscosi incomprimibili: la teoria della nascita della turbolenza ha subito un rivolgimento nel XX secolo divenendo per qualche lustro il centro di indagini teoriche e sperimentali. E pur non avendo ancora raggiunto una sistemazione teorica soddisfacente lascia ormai nuovamente il posto a ricerche sulla turbolenza sviluppata e la sua relazione con i fenomeni caotici.*

1 Fluidi e loro modelli

“Fluida” è ogni sostanza che può assumere la forma del suo contenitore senza che sia necessario compiere lavoro. Quindi, in condizioni normali, l’acqua, il vapore, l’aria, l’alcool sono fluidi.

I fluidi sono esempi di “continui”: e prima dell’affermazione dell’atomismo, definitiva solo un secolo fa, erano considerati infinitamente divisibili, come pure ogni altra forma di materia (quali i solidi o i vetri). Anzi il vuoto stesso era considerato non esistente e, quindi, come una sostanza continua anche se non visibile.

Gli studi di Archimede, Stevino, Torricelli, Bernoulli portarono a stabilire le equazioni che reggono i moti dei fluidi ideali, ossia non viscosi, e non. Con le equazioni ebbero inizio la fluidodinamica teorica moderna e le sue applicazioni più avanzate, dalle previsioni meteorologiche, alla progettazione di profili alari, allo studio delle correnti marine.

Eulero ottenne, 250 anni fa, le equazioni per un fluido ideale immaginando di decomporlo in parti assai piccole; ciascuna occupante un “elemento di volume” v con densità ρ (e quindi massa $m = \rho v$) ed assimilabile a un punto materiale soggetto alle leggi della dinamica newtoniana: l’elemento di volume situato nel punto generico \mathbf{x} interno al contenitore ha dunque una massa m , una velocità \mathbf{u} e un’accelerazione \mathbf{a} e, se \mathbf{F} è la forza totale che agisce sull’elemento di volume, allora $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ (legge di Newton).

*Dipartimento di Fisica e INFN: *La Sapienza*, P.le A. Moro 2, 00185, Roma. Posta-e
giovanni.gallavotti@roma1.infn.it

Per una completa caratterizzazione dello stato istantaneo di un fluido sono inoltre necessari, tranne che nel caso semplice di fluidi incomprimibili, altri dati quali la pressione p e la temperatura T di ogni elemento di volume.

Sia \mathbf{F} che \mathbf{a} e \mathbf{u} hanno 3 componenti, secondo le direzioni degli assi cartesiani, denotate rispettivamente F_j, u_j, a_j con $j = 1, 2, 3$ (o a volte $j = x, y, z$), e lo stato istantaneo del fluido è determinato da funzioni del posto \mathbf{x} , dette “campi”, che esprimono velocità \mathbf{u} , densità ρ oltre che pressione p e temperatura T dati come funzioni del posto \mathbf{x} .

La forza \mathbf{F} è la somma di varie forze: la forza peso $m \mathbf{g} = \rho v \mathbf{g}$, ove \mathbf{g} è l’accelerazione di gravità, eventuali altre forze $m \mathbf{f} = \rho v \mathbf{f}$ proporzionali al suo volume v e alle forze (“di pressione”) che gli elementi di fluido contigui esercitano sulla sua superficie, ortogonalmente ad essa almeno in assenza di viscosità. Quest’ultima forza è proporzionale alla variazione per unità di lunghezza della pressione p fra punti della superficie opposti rispetto al centro dell’elemento di volume. È analiticamente espressa, in termini del “gradiente di pressione” $\text{grad } p$, le cui 3 componenti secondo gli assi cartesiani sono denotate $\frac{\partial p}{\partial x_j}$, come $-v \text{ grad } p$. Cioè $\mathbf{F} = \rho v (\mathbf{g} + \mathbf{f}) - v \text{ grad } p$.

Quindi l’accelerazione \mathbf{a} di un elemento di volume v con centro in \mathbf{x} è data, traducendo esplicitamente la legge di Newton $m \mathbf{a} = \mathbf{F}$, dalla relazione $\rho v \mathbf{a} = \rho v (\mathbf{g} + \mathbf{f}) - v \text{ grad } p$ ossia, nel caso di fluido incomprimibile quale in buona approssimazione l’acqua o l’aria in condizioni normali e con densità ρ indipendente dal punto, dividendo i due membri della relazione per $m = \rho v$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

ove la seconda relazione esprime, in forma analitica, la conservazione del volume dovuta all’incomprimibilità. Cioè vincola la velocità ad essere tale che la somma delle sue variazioni di volume per unità di lunghezza, per dilatazioni o contrazioni nelle tre direzioni spaziali, sia nulla. In tal modo l’elemento di fluido v pur potendosi deformare mantiene lo stesso volume e quindi la stessa massa. Poichè la variazione di volume per unità di tempo dovuta a una differenza della componente j della velocità è proporzionale alla variazione per unità di lunghezza della detta componente, solitamente denotata $\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$, la condizione si scrive $\text{div } \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ e si dice che vincola la velocità \mathbf{u} ad avere “divergenza nulla”.

Le Eq.(1.1), note come *equazioni di Eulero* per un fluido incomprimibile, vanno corredate di “condizioni al contorno” esprimenti il fatto che il fluido è confinato in un dato contenitore Ω : in assenza di attrito tali condizioni devono esprimere semplicemente che la velocità del fluido in un punto della

frontiera di Ω è tangente alla frontiera stessa.

Di poco diverse sono le equazioni del moto di un fluido incomprimibile in cui fenomeni dissipativi non siano trascurabili: nel caso più semplice in cui lo scorrimento di un elemento di fluido su uno adiacente generi una forza, contraria allo scorrimento e proporzionale al gradiente di velocità, le equazioni divengono

$$\mathbf{a} = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} + \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

ove $\Delta \mathbf{u}$ ha componente nella direzione j data da $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$ e misura quantitativamente la differenza per unità di lunghezza della forza di attrito che si esercita sulle due facce del volume ortogonali alla direzione j . Su ciascuna faccia tale forza per unità di massa è proporzionale, tramite il coefficiente di viscosità ν , al gradiente di velocità stesso $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ (dove la notazione). Le Eq.(1.2) sono note come *equazioni di Navier-Stokes* incomprimibili. Anche le condizioni al contorno cambiano se c'è attrito fra il fluido e le pareti del contenitore; nel caso in cui il fluido aderisca alle pareti la condizione è che la sua velocità \mathbf{u} sia, nei punti delle pareti, uguale a quella delle pareti stesse.

Le equazioni Eq.(1.1),(1.2) sono quattro equazioni nelle quattro incognite $\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})$. Ma nei fluidi reali spesso l'incomprimibilità è una approssimazione non accettabile e allora la $\text{div } \mathbf{u} = 0$ va sostituita con un'equazione che esprima analiticamente che l'elemento di fluido pur variando di volume deve mantenere la stessa massa. È l'*equazione di continuità* (che non scriviamo e che ora sostituisce la $\text{div } \mathbf{u} = 0$); e poichè ora la densità non è costante si dovrà aggiungere una relazione che esprima la densità in funzione della pressione, l'*equazione di stato*. Questa ultima relazione non è sempre possibile senza coinvolgere anche la temperatura dell'elemento di volume e quindi diviene necessario aggiungere l'equazione di *trasporto del calore* che descrive come la temperatura T nei vari punti del fluido varia nel tempo. Si ottengono così 6 equazioni nelle 6 incognite ρ, \mathbf{u}, T, p , che naturalmente vanno anche corredate di opportune condizioni al contorno.

Si vede dunque che la descrizione del moto di un fluido comprimibile è notevolmente più complessa di quello dei fluidi incomprimibili e si immagina facilmente una conseguente maggiore difficoltà della teoria corrispondente: però i principali problemi concettuali e applicativi si manifestano già, e sono quasi sempre a tutt'oggi non completamente risolti, nel caso dei fluidi incomprimibili. Pertanto qui la discussione sarà ristretta ai fluidi viscosi incomprimibili e ai loro modelli.

A dispetto dell'apparente semplicità, le equazioni di Eulero e di Navier-

Stokes incomprimibili sono assai difficili da un punto di vista matematico, e addirittura sono stati indetti bandi per ingenti premi riservati a chi saprà risolvere il problema dell'esistenza e unicità di soluzioni delle Eq.(1.2) intese come precisato tecnicamente nei bandi stessi.

2 Problemi sui fondamentali

La difficoltà dei problemi matematici è però secondaria rispetto alle difficoltà che si rivelano fondamentali da un punto di vista concettuale e fisico.

La fluidodinamica, che per i fisici è la teoria e la fenomenologia del moto dei fluidi soggetti a forze, deve spiegare quantitativamente fenomeni complessi quali la turbolenza. E la prima difficoltà risiede nell'esistenza di *molte scale* di lunghezza e di tempo sulle quali si manifestano i fenomeni.

Osservare la superficie di un fiume rivela immediatamente che i mulinelli e i gorgi hanno una struttura che si ripete su varie scale di lunghezza: gorgi osservati da vicino appaiono composti da gorgi più piccoli, i quali a loro volta appaiono composti da gorgi più piccoli e così via. E talvolta le strutture che si osservano su varie scale sono *autosimili*, cioè sono le stesse a meno di un fattore di scala; ma non sempre, come si può osservare sulla superficie del mare vista da un aereo.

E una volta compreso che i fenomeni si producono, uguali o diversi, su varie scale si comprende anche che raffinando le osservazioni prima o poi si raggiunge una scala ove i fenomeni e i loro modelli matematici devono cambiare radicalmente. Saranno certamente diversi quando, affinando le osservazioni, si raggiungerà la scala molecolare ove la natura non continua della materia diventa osservabile; ma possono diventare diversi assai prima, se la dissipazione dovuta alla viscosità diventa sempre più importante al diminuire della scala sulla quale il moto del fluido viene osservato.

L'attrito (viscosità) che si esercita fra due strati di fluido che scorrono l'uno sull'altro a velocità diverse tende a uguagliare le velocità portando il fluido in una situazione di quiete rispetto al contenitore, a meno che il fluido non sia soggetto a forze che lo tengono in moto: in ogni caso tendono a ugualizzare le velocità di elementi di fluido adiacenti. Come detto nel §1 l'attrito è una forza proporzionale, in prima approssimazione, al gradiente di velocità e quindi la forza totale di viscosità applicata ad un elemento di fluido è proporzionale alla variazione del gradiente stesso (la forma precisa è data dal termine $\Delta \mathbf{u}$ nelle equazioni di Navier Stokes).

Dunque osservando il moto su scale di lunghezza ℓ sempre più piccole ci si aspetta che le variazioni del gradiente di velocità fra superfici opposte

di elementi di fluido di dimensione ℓ diminuiscano al diminuire di ℓ : con il risultato che su scale abbastanza piccole il moto del fluido dovrebbe apparire localmente in moto *laminare*, ossia come un semplice moto traslatorio, senza vortici né disordine alcuno.

Quindi, per un fisico, prima del problema matematico, appare necessario stabilire se veramente le equazioni possano essere considerate come un modello di un moto di un fluido dato, e entro quali limiti.

Questo significa anzitutto stabilire che un fluido inizialmente descritto da un campo di velocità che su piccola scala di lunghezza, ma comunque molto grande rispetto alla scala molecolare, è laminare ed evolve poi secondo le equazioni del moto mantenendo nel tempo questa proprietà. Ma questo non è affatto chiaro.

E visto che l'intuizione che suggerisce che il moto divenga laminare su piccola scala è basata sull'effetto dell'attrito viscoso di scorrimento si deve temere che almeno le equazioni di Eulero possano, talvolta, predire evoluzioni in cui vortici e irregolarità del campo di velocità raggiungano in un tempo osservabile dimensioni atomiche. Invero se si considera più in generale un fluido comprimibile non viscoso, descritto da equazioni più complesse delle Eq.(1.1), si possono dare esplicitamente esempi in cui, pur inizialmente senza struttura su scala microscopica, il moto sviluppa vortici su scala atomica in un lasso di tempo breve.

Oltre questa prima difficoltà si pone il problema della corrispondenza fra le soluzioni delle equazioni e le osservazioni dei moti dei fluidi. Qualora, per teorema matematico o per modifica delle equazioni, sia stato stabilito che, per i dati iniziali di interesse, il moto resta sempre laminare su scale di lunghezza maggiori della scala atomica, si pone il problema di prevederne qualitativamente le proprietà su tempi lunghi e di calcolarle quantitativamente a priori, almeno per quanto necessario per le osservazioni e misure che si intende eseguire.

L'eventuale mancanza di una scala sulla quale la viscosità prevalga e il moto sia laminare si può manifestare solo dopo che sia trascorso un tempo abbastanza grande: perchè si può stabilire in modo rigoroso che un dato iniziale regolare (ossia laminare su scala abbastanza piccola) resta tale per un tempo finito (la cui durata si può stimare in funzione del dato iniziale stesso). Esiste quindi, per ogni dato iniziale regolare, un primo istante $t_s \leq +\infty$ in cui la laminarità su piccola scala viene a mancare. Fisicamente questo significa che si osservano ormai variazioni apprezzabili del gradiente di velocità su scale dell'ordine delle scale atomiche. Se $t_s < +\infty$ si dice che la soluzione delle equazioni "*sviluppa una singolarità*". Questa eventualità implica, dal punto di vista fisico, che le equazioni Eq.(1.2) non sono più

adatte a descrivere il moto per tempi più lunghi di t_s e occorre uno studio più accurato delle basi fisiche del fenomeno per trovare equazioni più consone alla sua descrizione teorica.

Qualora, dunque, non si riesca a stabilire la laminarità del moto su scale piccole, si pone anche la questione della stima di una scala di tempo $\bar{t}_s < t_s$ sulla quale certamente *non si manifestano* “singolarità”. Infine si pone la questione se, almeno entro tale tempo \bar{t}_s , si riescano a prevedere qualitativamente e calcolare quantitativamente le proprietà delle soluzioni e, inoltre, se entro tale tempo si abbia aderenza fra previsioni e osservazioni, ossia se le previsioni delle equazioni siano conformi alla natura delle cose.

Come si è detto già il primo problema, detto il problema della *regolarità* delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes è in realtà un problema aperto. Quindi tutte le questioni ora poste possono essere trattate solo su base euristica o fenomenologica.

3 Equazioni di NS e fenomenologia della turbolenza

Una prima osservazione è l’invarianza delle equazioni di Navier-Stokes per “trasformazioni di scala” qualora la forza \mathbf{f} , di intensità $F \stackrel{def}{=} \max |\mathbf{f}|$, che mantiene il fluido in moto agisca “sulla scala L del contenitore”, ossia le sue variazioni per unità di lunghezza (cioè $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$), siano proporzionali a FL^{-1} e così di seguito per le “variazioni delle variazioni” di ogni ordine, cioè le variazioni “di ordine k ” siano proporzionali a FL^{-k} . In linguaggio matematico e se la costante di proporzionalità non cresce troppo velocemente con k , cioè se resta limitata proporzionalmente (al più) a $k!$, si dice che \mathbf{f} è analitica su scala L e tale proprietà è assai spesso un’ipotesi lecita e debole.

Allora la teoria dell’equazione Eq.(1.2) per un fluido con viscosità ν sottoposto ad una forza di volume di intensità F agente su scala L e racchiuso in un contenitore immobile di dimensione L (ad esempio un contenitore sferico di raggio L) è completamente equivalente alla teoria della stessa equazione per un fluido di viscosità $\nu = 1$ in un contenitore di ugual forma ma di dimensione $L = 1$ e forza di ugual forma ma intensità $F = R^2$ con $R = \frac{LU}{\nu}$ se $U = \sqrt{LF}$. Dunque il moto di un fluido così forzato è caratterizzato dalla quantità adimensionale R , chiamata *numero di Reynolds*, oltre che dal dato iniziale.

O anche in altre “geometrie” o con altri tipi di forza si hanno equivalenze simili. Ad esempio la teoria di un fluido contenuto fra due sfere concentriche di raggi $L, \mu L$ rispettivi ($\mu < 1$) una delle quali rotante uniformemente con

velocità ω attorno ad un asse, con la condizione di aderenza del fluido alle superfici del contenitore, è equivalente ad un fluido fra due sfere di raggi $1, \mu$ rispettivamente rotante con velocità angolare $R = \frac{L^2 \omega}{\nu}$. O, ancora, un'analoga equivalenza vale se le due sfere sono sostituite da due cilindri coassiali di raggi $L, \mu L$ and altezza ηL (con $0 < \mu < 1, \eta > 0$ fissati) con coperchi solidali con uno dei due cilindri e con il cilindro esterno rotante a velocità angolare ω .

Il numero di Reynolds può essere molto grande anche in flussi realizzati in natura. La turbolenza si instaura di solito per $R \sim 2000$ (ma il valore esatto varia caso per caso), ma è comune osservare situazioni in cui il numero di Reynolds è di 1000 volte e più superiore. Come nel canale della Manica dove può raggiungere 10^7 o nei *Seymour Narrows* (nel canale fra continente e Vancouver Island in Canada) dove raggiunge il valore regolarmente ricorrente, con la marea, di 10^9 che forse è il valore più elevato osservato in un canale naturale.

Il progresso fondamentale nella teoria dei moti turbolenti, ossia con R molto grande, e *stazionari* si ebbe nel 1941 con la teoria, detta "K41", nella quale Kolmogorov propose come determinare molte proprietà del moto turbolento stazionario, [1, Cap. VI].

Stazionario è un moto, anche molto disordinato, in cui la velocità \mathbf{u} varia in modo che il *valore medio* nel tempo di una qualsiasi grandezza osservabile $F(\mathbf{u})$ sia una quantità ben definita $\langle F \rangle$, indipendente da \mathbf{u} . L'insieme dei valori medi caratterizza uno stato stazionario, il quale è determinato dal numero di Reynolds R e dalla forma del contenitore.

La teoria K41 degli stati stazionari di un fluido incomprimibile che obbedisce alle equazioni di Navier-Stokes Eq.(1.2) suppone che il fluido sia sottoposto ad una forza che ne mantiene il moto e che agisce sulla scala L del contenitore. Il primo risultato è la conferma dell'intuizione, su menzionata, che su piccola scala ℓ il moto diviene laminare: e l'ordine di grandezza della scala ℓ è anche determinato come $\ell_K = R^{-\frac{3}{4}} L$. Nella teoria K41 il moto del fluido osservato su scale più piccole appare come laminare, interamente dominato dalla viscosità.

Su scale di lunghezza ℓ più grandi di ℓ_K il moto è turbolento, caotico: e però ha proprietà indipendenti dalla particolare forza che mantiene il moto, finché ℓ è piccolo rispetto alla dimensione L del contenitore e grande rispetto a ℓ_K . Su scala della dimensione del contenitore il moto è invece dipendente dalle particolarità della forza e della forma del contenitore. Le scale di lunghezza ℓ con $\ell_K \ll \ell \ll L$ sono chiamate *scale inerziali*.

Molte proprietà del moto turbolento visto sulle scale inerziali sono determinate dalla teoria K41 grazie all'ipotesi che la dissipazione causata dalla

viscosità avvenga interamente a causa dello scorrimento di strati di fluido in regime laminare, ossia sulle scale prossime a ℓ_K . Questa ipotesi si formula dicendo che nelle scale inerziali il moto è controllato dall'equazione di Eulero, ossia avviene senza che la viscosità abbia effetti rilevanti: e da' luogo ad una modifica empirica delle equazioni di Navier-Stokes, [1].

Una conseguenza è che dato il numero di Reynolds R l'energia cinetica del moto si distribuisce in funzione della scala di lunghezza ℓ secondo la legge $\ell^{\frac{5}{3}}$: se si immagina di misurare l'energia cinetica del moto del fluido usando un galleggiante, di peso uguale alla spinta archimedeica, di dimensione ℓ e osservandone il moto che il fluido induce su di esso si dovrebbe vedere che la sua energia cinetica media è proporzionale a $\ell^{\frac{5}{3}}$.

La teoria K41 è una teoria fenomenologica e deve essere considerata una prima approssimazione: non si deve dimenticare che fornisce una risposta assai specifica e dettagliata sulle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes. Equazioni per le quali addirittura non si conosce ancora, da un punto di vista matematicamente e fisicamente rigoroso, se esistano soluzioni di regolarità confrontabile con quella prevista euristicamente dalla teoria K41. Ciononostante la teoria è suscettibile di verifiche sperimentali: che nel corso degli anni hanno accumulato molta evidenza a favore.

La teoria K41 presenta analogie con la teoria del campo medio per le transizioni di fase. Come è stato necessario quasi un secolo perchè si rivelasse l'insufficienza della teoria di van der Waals per la descrizione accurata delle osserazioni sperimentali relative alla transizione liquido-gas, così l'affinamento delle misure e degli strumenti inizia a rivelare che la teoria K41 è probabilmente solo una prima approssimazione a una realtà forse molto più complessa. E tuttavia resta per il momento uno dei punti fermi che fanno ritenere che la turbolenza a grande numero di Reynolds e osservata lontano dalle pareti dei contenitori, detta "*turbolenza omogenea*", sia sostanzialmente ben capita.

Si vede qui il distacco, spesso evidente anche nello studio di altri fenomeni, fra la comprensione di un fenomeno fisico sulla base di un modello riconosciuto come consono e la capacità dell'analisi matematica di renderne conto attraverso le proprietà deducibili con rigore mtematico dal modello stesso.

Ed è facile prevedere che se anche, e secondo molti per assurdo, in futuro si riuscirà a stabilire che le equazioni di NS sono matematicamente incompatibili con le idee di base della teoria K41, ad esempio mostrando che il moto su scale $< \ell_K$ non diviene laminare, i fisici, e ancor più gli ingegneri, saranno da ciò poco scossi e non considereranno il risultato come il segnale di una rivoluzione della meccanica. Le equazioni di NS e tutte le equazioni

che trattano la materia come un continuo sono da considerarsi fenomenologiche e quindi *non fondamentali*: non sono sullo stesso piano della legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ o della relatività galileiana o einsteiniana e possono essere cambiate a seconda delle esigenze applicative.

È comune pratica nell'ingegneria, laddove i matematici concentrano l'attenzione sul problema dell'esistenza di soluzioni regolari, modificare le equazioni per i fluidi in modo che "il calcolo sia più agevole" o "rapido" e i risultati "più stabili". Conseguentemente diviene necessario, sempre, il controllo sperimentale dei risultati teorici: che non sempre è facile. Così i profili delle ali dei velivoli, anche se progettati teoricamente, devono essere studiati in gallerie del vento perchè siano affidabili: non esistendo una teoria rigorosa del calcolo delle proprietà dei fluidi è importante che quantità calcolate supponendo valide le equazioni e addirittura alcune loro proprietà (come la esistenza della scala laminare ℓ_K di Kolmogorov) abbiano effettivamente rispondenza con la realtà delle applicazioni che si ha in animo di fare.

4 Lo sviluppo della turbolenza

Negli anni 1960, in parallelo allo sviluppo tumultuoso del calcolo elettronico, si pose concretamente la questione se fosse possibile prevedere il moto di un fluido a partire dalla conoscenza dello stato iniziale. Ad esempio si svolsero indagini sulla possibilità di prevedere accuratamente il moto dell'atmosfera risolvendo equazioni fluidodinamiche (più complesse delle equazioni incomprimibili di NS, ma concettualmente e matematicamente ad esse simili).

Il problema si poneva quando al crescere del numero di Reynolds, o dei suoi analoghi per le varie equazioni considerate, avveniva che il moto non fosse più ordinato, laminare.

Fu dunque riesaminato, per iniziarne uno studio sistematico, il meccanismo del passaggio dal moto ordinato, facilmente prevedibile, a quello disordinato, turbolento, che si sperava di poter prevedere.

Il meccanismo allora ritenuto plausibile, anzi certo, era basato sulla concezione, di eredità platonica, che i moti anche complessi fossero sempre e comunque decomponibili in moti circolari uniformi, in "*cicli ed epicicli*". La complessità del moto era solo dovuta al numero di cicli necessari ad una completa descrizione dei fenomeni. Una concezione, questa, alla base del sistema tolemaico, non scalfita né dalla teoria copernicana, né dalle scoperte di Keplero e poi di Newton e sistematizzata nella teoria del sistema del Mondo di Laplace, che avrebbe dovuto essere universalmente riveduta dopo Poincaré.

Ma le idee di Poincaré furono forse troppo in anticipo sui tempi per essere recepite dalla maggioranza della comunità scientifica, e in particolare da fisici e ingegneri che continuarono a rappresentare i moti, di qualsiasi sistema, fosse esso il moto dei pianeti o delle onde del mare, come composto di moti circolari uniformi (tecnicamente rappresentandolo in termini di serie di Fourier con armoniche indipendenti), [2]. Con qualche eccezione, fra le quali un tentativo giovanile di Fermi, [3].

E così ancora agli inizi degli anni '60 uno dei maggiori trattati di fisica teorica, di Landau-Lifschitz [4], descriveva tolemaicamente l'inizio della turbolenza come il graduale aumento, al crescere del numero di Reynolds, del numero di frequenze indipendenti necessarie alla completa descrizione del campo di velocità del fluido.

La potenza di calcolo degli elaboratori elettronici di quel tempo non consentiva ancora lo studio della turbolenza sviluppata (e neppure ora lo consente in modo soddisfacente): ma permetteva facilmente la verifica della teoria epicyclica. E nel 1963 Lorenz, [5], studiando le equazioni di un modello di moto per l'atmosfera mostrò che le soluzioni non potevano essere rappresentate in termini di epicycli, neppure se drasticamente semplificate, non appena il moto iniziava a mostrare carattere turbolento.

Questo lavoro non ebbe grande risonanza fino a che alla fine del decennio apparve una teoria generale, di Ruelle-Takens [6], prevedente che il moto non fosse più descrivibile in termini di un numero crescente di cicli. Lo sviluppo della turbolenza divenne quindi oggetto di numerose ricerche, sia teoriche che sperimentali, le quali tutte confermarono le nuove teorie.

Fu questo un periodo molto interessante: sebbene il paradigma dell'evoluzione della complessità per l'aumento del numero di epicycli fosse venuto meno, apparve da subito che i fenomeni erano nondimeno classificabili perché le possibilità, dette "*biforcazioni*", erano comunque piuttosto ristrette.

La nuova teoria della nascita della turbolenza prevede che il moto subisca una successione di variazioni al crescere di R , *ceteris paribus*: è una successione in cui si susseguono moti laminari periodici seguendo le possibilità note dalla *teoria della biforcazione*. Le possibilità sono in realtà assai poche e quindi il solo problema è l'ordine in cui si realizzano in un dato modello.

Ancora non si conosce il modo di prevedere a priori quali biforcazioni una data equazione presenti al crescere di R . Si è sperato, con audacia, che in futuro i diversi tipi di biforcazioni che hanno luogo nella turbolenza incipiente possano divenire i blocchi di una costruenda teoria della turbolenza sviluppata, con molti gradi di libertà, in modo simile (forse) alla costruzione della teoria dei sistemi macroscopici dalla teoria delle interazioni atomiche

elementari, ossia in modo simile alla meccanica statistica. Ma al momento siamo ancora molto lontani da una tale teoria, sebbene dati sperimentali abbondino, anche ma non solo grazie alla facilità delle simulazioni numeriche, almeno per valori piccoli di R .

È stato comunque stabilito, grazie prima alla corretta interpretazione di simulazioni e poi a numerosissimi esperimenti su fluidi reali, che la turbolenza nasce e si sviluppa, al crescere del numero di Reynolds R , con l'incremento del numero di scale di tempo non già legate all'incremento del numero delle frequenze di oscillazione non commensurabili (perchè a dispetto di variazioni qualitative dei moti questi restano periodici, ossia con una sola frequenza caratteristica e i suoi multipli), ma alla rapidità con la quale dati inizialmente vicini si separano allo scorrere del tempo.

È notevole che questo sia stato un caso in cui la fenomenologia ottenuta per via teorica, attraverso simulazioni rese possibili dalla potenza dei calcolatori elettronici, ha preceduto gli esperimenti su fluidi reali: sono esperimenti relativamente semplici da eseguire e che avrebbero potuto essere eseguiti assai prima delle simulazioni che ne hanno previsti i risultati. Ma non furono eseguiti perchè, probabilmente, ritenuti poco interessanti sulla base della fiducia che i fenomeni riflettessero la teoria esposta (ad esempio) nel menzionato trattato di Landau-Lifschitz. La ricerca delle proprietà della turbolenza ad alto numero di Reynolds e la verifica della teoria K41 appariva più importante.

Certamente era più importante: ma non tale da poter ignorare la sua genesi via un meccanismo *diverso* dalla successiva apparizione di nuove frequenze di oscillazione e che, quindi, poteva influenzare (e influenzò) la comprensione stessa della turbolenza sviluppata e della teoria K41.

Il comportamento asintotico, nella nuova concezione della turbolenza incipiente, passava da un moto laminare a un moto periodico (a una frequenza con eventuali armoniche) a un moto un po' più complesso apparentemente con due periodi: in realtà ancor periodico, ma con periodo che rimane costante su una successione di intervalli di variazione del numero di Reynolds, in modo che il grafico del periodo in funzione di R sia una successione monotona di molti gradini, moltissimi dei quali di ampiezza piccolissima, chiamata in modo pittoresco una "scala del diavolo".

Poi, ed è questa la novità importante, invece di sviluppare nuovi periodi, e quindi nuove scale di oscillazioni temporali rendendo il moto apparentemente aperiodico, le traiettorie di dati iniziali poco differenti si diversificano in modo che la loro "distanza", misurata con una qualsiasi prefissata metrica, cresca *esponenzialmente* su una scala di tempo λ^{-1} , ossia dopo un tempo t aumenti proporzionalmente a $2^{\lambda t}$ (2 è di solito sostituito dalla co-

stante di Neper, $e = 2.71\dots$: ma questa è una scelta convenzionale che qui è meno conveniente per ragioni espositive).

La quantità λ prende nome di *esponente di Lyapunov*: e al crescere del numero R invece che nuovi periodi di oscillazione appaiono nuove scale λ_j di tempo “di instabilità”, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$. Ciò significa che dati iniziali molto vicini si differenziano di solito su scala di tempo λ_1^{-1} , ma scegliendo molto accuratamente le coppie di dati iniziali dei quali si studia la separazione è possibile trovare coppie che si separano su scala più lunga, λ_2^{-1} , e con maggiore difficoltà si trovano coppie che si separano su scala λ_3^{-1} e così via.

Lo *spettro di instabilità* $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ contiene n scale di tempo, con n che cresce al crescere di R . Ad esempio nel caso dell’equazione di NS, Eq.(1.2), si dovrebbe poter stabilire che il numero n cresce proporzionalmente a $R^{\frac{9}{4}}$; ma il massimo esponente di instabilità λ_1 dovrebbe crescere con R solo proporzionalmente a R^2 , al più, e quindi ci si aspetta, almeno come ipotesi più semplice, che gli esponenti λ_j/λ_1 si addensino nell’intervallo $[0, 1]$ formando, ne limite $R \rightarrow +\infty$, una curva.

In ogni caso l’esistenza di esponenti positivi di instabilità rende difficile pensare a una predizione del moto su scale di tempo più lunghe di λ_1^{-1} . Se si immagina di utilizzare un modello matematico del tipo delle equazioni di Navier Stokes, o più complesse, si comprende quanto sia illusorio sperare di ottenere previsioni che abbiano validità oltre il tempo caratteristico λ_1^{-1} , scandito dal più grande esponente di Lyapunov.

5 Proprietà statistiche della turbolenza

A prima vista può apparire assai difficile studiare in modo quantitativo un moto turbolento, a causa della divergenza esponenziale di moti inizialmente vicini, che li rende presto diversissimi.

Quindi si può solo pensare di descrivere eventuali proprietà statistiche. Ossia proprietà delle distribuzioni di probabilità μ che, per integrazione, forniscono il valore medio temporale $\langle F \rangle$ di osservabili $F(\mathbf{u})$ misurate a intervalli di tempo τ prefissati, nel senso che

$$\langle F \rangle \stackrel{def}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} F(\mathbf{u}(j\tau)) = \int F(\mathbf{v})\mu(d\mathbf{v}) \quad (5.1)$$

vale *per scelte casuali* dei dati iniziali $\mathbf{u} = \mathbf{u}(0)$ se $\mathbf{u}(t)$ denota il campo di velocità in cui evolve \mathbf{u} al tempo t secondo le equazioni del moto. La

distribuzione μ è chiamata, se esiste ed è indipendente da \mathbf{u} a parte eccezioni di probabilità 0, la *statistica* dei moti *associata alle scelte* dei dati iniziali secondo il criterio di scelta casuale adottato.

La divergenza esponenziale significa che eventi osservati con cadenza temporale grande rispetto al tempo λ_1^{-1} si possono considerare come eventi indipendenti, o poco dipendenti, estratti a caso da un insieme di eventi a priori possibili.

Le statistiche μ sono allora modellizzabili a mezzo di processi stocastici di Bernoulli (produzione di risultati casuali e indipendenti, senza memoria) o comunque con processi stocastici a “corta memoria”, quali ad esempio i processi di Markov.

Data la grande varietà di processi a memoria corta il problema è allora “solo” di determinare quale sia, dato un moto turbolento, il *processo stocastico* che ne realizza le proprietà statistiche, ossia quale sia la distribuzione di probabilità μ sui campi di velocità che consente il calcolo delle medie delle osservabili una volta fissato il criterio di scelta casuale dei dati iniziali (e scartate le scelte che hanno in esso probabilità 0).

Un ruolo importante è giocato dall’*entropia* s , [7]: è una grandezza introdotta da Kolmogorov e Sinai che consente di determinare il massimo numero di osservazioni diverse che è possibile ottenere eseguendo N volte, a intervalli di tempo regolari τ , una misura con un numero finito k di risultati possibili. Se i risultati ai tempi $0, \tau, 2\tau, \dots, (N-1)\tau$ formano la “stringa” $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}$, allora il numero massimo di tali stringhe diverse rivelabili con N misure è, *per N grande*, di solito molto minore di k^N (numero di tutti i risultati possibili a priori) e anzi è essenzialmente indipendente da k per N grande ed è legato a s da $\sim 2^{N\tau s}$. Anche se, evidentemente, tale numero dipende da k per N piccolo, ad esempio se $N = 1$ gli stati del sistema rivelabili con una sola misura sono k .

Cambiando la cadenza delle osservazioni, da τ a t , l’entropia non cambia: ossia il numero *massimo* di stringhe diverse di lunghezza N effettivamente osservabili è ancora 2^{Nts} (però si deve tenere in mente che il numero massimo di stringhe viene ottenuto cambiando opportunamente, in funzione del tempo cadenzante t , le osservabili oggetto delle misure). Pertanto s prende il nome di “entropia per unità di tempo”.

Un importante risultato della *teoria dell’informazione* è che tutti i processi stocastici a memoria corta sono identici, a *parità* di entropia, a meno di una trasformazione di coordinate (*teorema di Ornstein* [8]). Allora quello che si deve ricercare, se possibile, è

(a) quale sia il criterio di scelta casuale dei dati iniziali che si adotta quando

si eseguono osservazioni.

(b) come collegare le proprietà del moto osservato, su tempi lunghi, con l'entropia della statistica che le descrive e poi

(c) trovare il modo di esprimere le coordinate che descrivono il moto in termini delle successioni di simboli di un conveniente processo stocastico di uguale entropia.

Il punto (a) viene risolto supponendo che la scelta avvenga immaginando che le coordinate del dato iniziale (in numero finito nei modelli, ad esempio $\sim R^9$ nella teoria K41) siano determinate in modo da avere valori *casuali equidistribuiti* entro margini di errore noti. Questo ruolo privilegiato assegnato a scelte così speciali dei dati iniziali è di solito supposto, senza discussione, come riflettente il processo “naturale” di costruzione dei dati iniziali e l'incertezza del conseguente risultato: ma va tenuto presente che di fatto è un'ipotesi a priori che ha il ruolo di una legge empirica, non dimostrata né dimostrabile, ma controllabile perchè ricca di implicazioni sperimentalmente verificabili.

L'identificazione della statistica è dovuta a Ruelle che ha proposto, [9], che l'evoluzione nei moti turbolenti sia in senso matematico “iperbolica e transitiva”, e che quindi (sulla base di risultati generali che saranno euristicamente qui dedotti nel §6) determini un'unica statistica μ per i valori medi delle osservabili sui moti con dati iniziali arbitrari purché fuori di un insieme di volume nullo (consistentemente con la soluzione, appena discussa, della questione posta in (a)).

È questa una statistica la cui entropia s è semplicemente data (*formula di Pesin*) dalla somma degli esponenti di Lyapunov positivi: $s = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ ed è chiamata la *statistica SRB*, acronimo per Sinai-Ruelle-Bowen. Inoltre la teoria consente di esprimere le coordinate che individuano lo stato del sistema in termini di stringhe di risultati di misure a un numero finito di risultati possibili e quindi di interpretare μ come un ordinario processo stocastico.

La distribuzione SRB è analoga alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann dei fondamenti della meccanica statistica e come questa è rappresentabile esplicitamente tramite formule utili (si veda il §6) a stabilire relazioni fra valori medi di osservabili e loro fluttuazioni temporali. Si tratta di relazioni che traducono proprietà generali riflettenti struttura e simmetrie delle equazioni del moto: ma non consentono il calcolo dei valori medi stessi. Tale calcolo richiede un'analisi caso per caso e, salvo casi particolarissimi, una profonda comprensione delle proprietà dei moti. Comprensione che non è immaginabile come possibile, allo stesso modo in cui non è immaginabile il

calcolo delle soluzioni delle equazioni del moto delle 10^{23} molecole in una mole di gas.

6 La genesi della distribuzione SRB

Conviene esaminare in qualche dettaglio alcuni aspetti tecnici, per comprendere meglio le idee sulle quali si fonda la proposta di Ruelle per l'individuazione della distribuzione SRB per il calcolo delle medie temporali. L'iter che si può seguire passa per una concezione discreta dello spazio tempo e dell'evoluzione, non dissimile da quella seguita da Boltzmann per pervenire all'ipotesi ergodica e che si può vedere come il fondamento per la deduzione della distribuzione SRB.

Immaginiamo allora che l'evoluzione vista, come di regola avviene negli esperimenti, a intervalli di tempo determinati dal realizzarsi di un evento \mathcal{E} prescelto (in linguaggio matematico si dice osservati su una "sezione di Poincaré") sia rappresentata da una trasformazione S sullo spazio di tali eventi.

Le soluzioni della Eq.(1.2) si possono immaginare ottenute dividendo lo spazio dei campi di velocità \mathbf{u} nei quali si verifica l'evento \mathcal{E} , che in base alla teoria K41 ha una dimensione alta (ma finita e dell'ordine di $R^{\frac{9}{4}}$), in piccoli parallelepipedi, che chiameremo *microcelle*, che poi vengono trasformati gli uni negli altri dall'evoluzione S osservata a intervalli di tempo con cadenza fissata dall'evento \mathcal{E} prescelto: l'evoluzione appare quindi agire come una trasformazione di parallelepipedi in altri. È quello che si fa in pratica nelle simulazioni numeriche.

Se l'evoluzione del sistema è caotica, ossia se il moto ha esponenti di Lyapunov positivi e negativi, non si può certo supporre che il moto sia una permutazione a un solo ciclo delle microcelle: peccato, perchè se così fosse si potrebbe dedurre che le medie delle osservabili potrebbero essere ottenute semplicemente calcolandone il valore sullo stato del fluido rappresentato da una generica microcella e mediarne il valore su tutte le microcelle; e il problema del calcolo delle medie temporali sarebbe risolto dalla distribuzione che assegna uguale probabilità alle microcelle (cioè una distribuzione proporzionale al volume, visto che le microcelle sono disposte regolarmente). Invece, in generale, non è neppure vero che il volume si conserva, certo non nei sistemi in cui ha luogo dissipazione.

In una rappresentazione dello spazio degli stati in celle discrete disposte con densità uniforme la non conservazione del volume dello spazio delle fasi, dovuta alla natura dissipativa del moto ed espressa nel caso delle equazioni

di Navier Stokes dalla loro “divergenza” (che è proporzionale a ν e dipende dal numero di Reynolds R), si manifesta perchè l’evoluzione non è una permutazione delle microcelle. Accadrà che più microcelle possono evolvere nella stessa. Cioè esisteranno celle che non si trovano su cicli, e sono dunque *non ricorrenti*.

Ad esempio è comune eseguire *simulazioni* per i moti di vari sistemi e dei fluidi in particolare, in cui lo stato del sistema, e dunque il campo di velocità nel caso dei fluidi, è rappresentato da un numero \mathcal{N} finito di coordinate, ciascuna delle quali è espressa con una successione di simboli 0, 1 ad esempio, in doppia precisione, con una stringa di 64 bits. Dunque lo spazio delle fasi è realizzato nella memoria del calcolatore elettronico come $2^{64}\mathcal{N}$ possibilità disposte uniformemente su un reticolo regolare (e finito) \mathcal{R} dello spazio delle fasi a \mathcal{N} dimensioni.

Il programma di calcolo P che simula l’evoluzione S è una trasformazione S_P che a uno dei punti x di \mathcal{R} ne associa il successivo $S_P x$ secondo l’evoluzione con cui il programma simula S . Ora è chiaro che, salvo casi specialissimi, nessun programma P sarà una trasformazione 1 – 1 di \mathcal{R} in se. Tuttavia ogni punto evolverà in modo da descrivere un moto asintoticamente periodico: non tutti i punti sono ricorrenti ma tutti diventano definitivamente tali.

L’insieme \mathcal{A} dei punti ricorrenti è allora detto *attrattore*; e l’*ipotesi ergodica* può essere, nel modo più semplice, formulata supponendo che i punti ricorrenti siano su una *permutazione ciclica* della trasformazione S . Allora la distribuzione di probabilità per il calcolo dei valori medi delle osservabili sarà necessariamente unica e identificata con la distribuzione uniforme sull’attrattore, la *distribuzione SRB*.

Certo la difficoltà è identificare l’attrattore, o meglio, dare un’espressione utilizzabile alla distribuzione SRB. È qui che interviene l’*ipotesi caotica*, [10], che (formulata informalmente) postula che sia possibile

(1) Costruire, almeno in linea di principio, una suddivisione in *celle* E_ξ , $\xi = 1, 2, \dots, q$, contenenti un grande numero di microcelle aventi la proprietà caratteristica che ad ogni punto x è possibile associare la sua *storia* $\xi = \{\xi_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, che assegna ad ogni istante i il nome ξ_i della cella E_{ξ_i} nella quale il punto $S^i x$ viene a trovarsi. Inoltre una qualsiasi successione ξ_i è la storia di un unico punto x a condizione che tutte le coppie di simboli successivi $\xi = \xi_i$ e $\xi' = \xi_{i+1}$ siano “compatibili”, nel senso che sia possibile che un punto interno alla cella E_ξ evolva in un punto interno alla cella $E_{\xi'}$. La compatibilità ha inoltre la *proprietà transitiva*, ossia esiste \bar{t} tale che data una qualsiasi coppia di simboli, ξ, ξ' questi si susseguono in almeno una

storia compatibile a qualsiasi distanza temporale maggiore di \bar{t} .

(2) la storia ξ dei punti può essere usata per identificarli, in luogo delle usuali coordinate. Ed è questa, inoltre, una rappresentazione con le stesse proprietà di cui gode la rappresentazione con coordinate cartesiane (ad esempio): nel senso che se si specificano i simboli con indice temporale i fra $-N$ e N allora i punti che fra $-N$ e N hanno questa stessa storia sono determinati con “precisione esponenziale” $\leq C2^{-\gamma N}$ con $C, \gamma > 0$ opportune. Denoteremo con $E(\tilde{\xi})$ l’insieme dei punti che fra $-N$ e N hanno storia $\tilde{\xi} \stackrel{def}{=} (\xi_{-N}, \dots, \xi_N)$: chiameremo tali insiemi “*celle a grana grossa*”.

(3) se x è un punto in $E(\tilde{\xi})$ allora la sua storia fra $-N$ e N è $\tilde{\xi}$. Continuandola arbitrariamente a destra o a sinistra, in una successione compatibile di simboli, si trova un punto in $E(\tilde{\xi})$. Punti in $E(\tilde{\xi})$ la cui storia coincide per tempi futuri ($t > \bar{t} > N$) abbastanza lunghi si avvicinano reciprocamente, se seguiti per uno stesso t , con “rapidità” esponenziale ossia come $C2^{-\lambda(t-\bar{t})}$. E l’insieme di tali punti formano una famiglia di superfici regolari connesse che riempiono $E(\tilde{\xi})$ e sono dette “*varietà stabili*” di $E(\tilde{\xi})$. Analogamente punti in $E(\tilde{\xi})$ la cui storia coincide per tempi passati ($t < \bar{t} < -N$) abbastanza remoti formano una famiglia di superfici regolari connesse che riempiono $E(\tilde{\xi})$ e sono dette “*varietà instabili*” di $E(\tilde{\xi})$. La varietà stabile o instabile che passa per un punto qualsiasi $x \in E(\tilde{\xi})$ è denotata $W^s(x)$ o $W^i(x)$, rispettivamente.

La dinamica in queste nuove *coordinate dinamiche* è molto semplice essendo divenuta la semplice traslazione verso sinistra della storia ξ : ossia la storia ξ' di Sx è semplicemente ottenuta da quella di x traslando tutti i simboli di una unità: $\xi'_i = \xi_{i+1}$.

Inoltre, nella rappresentazione discreta della dinamica quale trasformazione di microcelle, l’attrattore \mathcal{A} va immaginato, in ogni $E(\tilde{\xi})$, come una famiglia finita di microcelle disposte uniformemente su un numero finito di varietà instabili contenute in $E(\tilde{\xi})$. Denotiamo $\Lambda_i(\tilde{\xi})$ il fattore di cui si espande una varietà instabile di $E(\tilde{\xi})$ per un punto $\tilde{x} \in E(\tilde{\xi})$, arbitrariamente prefissato, sotto la trasformazione S^{2N} che trasforma $S^{-N}\tilde{x}$ in $S^N\tilde{x}$.

Pensando i punti dello spazio delle fasi come un fittissimo reticolo uniforme, come nelle simulazioni, ognuna delle celle $E(\tilde{\xi})$ a grana grossa sarà riempita uniformemente da “microcelle”. L’attrattore \mathcal{A} , *consistente nelle sole microcelle ricorrenti*, apparirà in $E(\tilde{\xi})$ come una famiglia di punti organizzati regolarmente su (un numero finito di) varietà instabili di $E(\tilde{\xi})$.

Le proprietà (1,2,3) valgono rigorosamente per una classe generale di sistemi dinamici che si possono considerare paradigmatici per le evoluzioni caotiche: sono i sistemi iperbolici transitivi (ad esempio i sistemi ampia-

mente discussi nella letteratura matematica quali i sistemi di “Anosov” o quelli con attrattore che verifica l’“assioma A”, [1, 7]). E supporre le proprietà (1,2,3) significa pensare che il moto sia talmente caotico da avere le proprietà generali di questi sistemi.

Ora l’ipotesi che sull’attrattore \mathcal{A} il moto sia una permutazione a un ciclo, che è una naturale estensione dell’ipotesi ergodica per sistemi Hamiltoniani, ossia l’ipotesi che tutte le microcelle di cui è costituito \mathcal{A} siano ricorrenti, implica una condizione di consistenza sul numero di microcelle che possono trovarsi su \mathcal{A} in ogni cella a grana grossa. E si trova che il numero di microcelle dell’attrattore contenute nella cella $E(\tilde{\xi})$ deve essere proporzionale a $\Lambda_i(\tilde{\xi})^{-1}$, se $\Lambda_i(\tilde{\xi})$ è il coefficiente di espansione di un elemento di superficie instabile contenuto nella cella $E(\tilde{\xi})$ per la trasformazione S^{2N} sopra definito, [10].

E allora il valor medio temporale, Eq.(5.1), di un’osservabile $F(x)$ può essere calcolato, se $x(\tilde{\xi})$ è un punto nella cella generica $E(\tilde{\xi})$ e se le celle $E(\tilde{\xi})$ sono così piccole che F possa essere considerata costante nel loro interno (ossia N è scelto abbastanza grande), come

$$\langle F \rangle = \frac{\sum_{\tilde{\xi} \in \mathcal{R}} F(x(\tilde{\xi})) 2^{-U_N(\tilde{\xi})}}{\sum_{\tilde{\xi} \in \mathcal{R}} 2^{-U_N(\tilde{\xi})}} \quad (6.1)$$

ove $U_N(\xi) \stackrel{def}{=} \log_2 \Lambda_i(\xi)$. È questa la rappresentazione ricercata per la distribuzione SRB.

L’interesse del risultato è che mostra che un sistema fortemente caotico, ossia verificante le proprietà (1,2,3), ammette una distribuzione privilegiata, la SRB, la quale può essere vista come un processo stocastico con eventi ξ_i , ossia come una distribuzione di probabilità su stringhe infinite ξ costituite da successioni di simboli ξ (ciascuno dei quali ha un numero finito di valori). Si può anche mostrare che questo processo è *stazionario* (cioè assegna la stessa probabilità a stringhe date e alle loro traslazioni) e a *memoria corta*; dunque è sostanzialmente un processo di Markov.

Pertanto su tempi lunghi le *osservazioni di un moto caotico producono successioni di risultati non distinguibili da successioni di simboli generati a caso*.

Sorprendentemente, dunque, le proprietà statistiche di un sistema caotico, quale un fluido in moto turbolento appaiono, *sotto l’ipotesi caotica*, come universali e consentono di considerare i sistemi iperbolici transitivi come *paradigmatici* per moti caotici; allo stesso modo in cui i sistemi integrabili, ossia in definitiva gli oscillatori armonici, sono i paradigmi dei moti

ordinati.

Questi ultimi conducono ai cicli ed epicicli noti fin dalla età classica (e oggi identificabili con gli sviiluppi in serie di Fourier) mentre i precedenti conducono ad identificare i sistemi caotici, via il teorema di Ornstein, con le evoluzioni ottenibili lanciando, a cadenza temporale τ , a caso un dado con un numero di facce $\sim \tau \sum_i \lambda_i$. È certamente una rappresentazione diversa dai cicli ed epicicli tolemaici, ma è una rappresentazione ancora sorprendentemente semplice.

References

- [1] G. Gallavotti. *Foundations of Fluid Dynamics*. (second printing) Springer Verlag, Berlin, 2005.
- [2] G. Gallavotti. Quasi periodic motions from Hypparchus to Kolmogorov. *Rendiconti Accademia dei Lincei, Matematica e applicazioni e chao-dyn/9907004*, 12:125–152, 2001.
- [3] E. Fermi. Beweis dass ein mechanisches normalsystem im allgemeinen quasi-ergodisch is. *Physikalische Zeitschrift*, 24:261–265, 1923.
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. *Statistical physics*. Pergamon Press, London, 1958.
- [5] E. Lorenz. Deterministic non periodic flow. *Journal of Atmospheric Science*, 20:130–141, 1963.
- [6] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20:167–192, 1971.
- [7] G. Gallavotti, F. Bonetto, and G. Gentile. *Aspects of the ergodic, qualitative and statistical theory of motion*. Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [8] D. Ornstein. *Ergodic Theory, randomness and dynamical systems*, volume 5 of *Yale Mathematical Monographs*. Yale University Press, New Haven, 1974.
- [9] D. Ruelle. What are the measures describing turbulence. *Progress in Theoretical Physics Supplement*, 64:339–345, 1978.
- [10] G. Gallavotti. Heat and fluctuations from order to chaos. *European Physics Journal B, EPJB*, 61:1–24, 2008.