

## Sulla Meccanica in Italia dal 1860 al 1922

*Giovanni Gallavotti*

Fisica, Roma1; I.N.F.N.

**Riassunto:** *Versione ampliata della conferenza sullo “Sviluppo della Meccanica Celeste in Italia fra la fine ’800 e gli anni ’20 del XX secolo” all’ Accademia dei Lincei*

### Istoria

Illustri predecessori furono, ad esempio, GIUSEPPE LODOVICO LAGRANGIA, (1736–1813), FRANCESCO CARLINI, (1783–1862), GIOVANNI PLANA, (1781–1864), GABRIO PIOLA, (1794–1850), GIOVANNI SANTINI, (1787–1877), OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI, (1791–1863): astronomi e meccanici la cui opera si conclude all’inizio del periodo qui considerato.

Una succinta e preliminare analisi dello sviluppo della Fisica Matematica, disciplina che identifico con la Meccanica (del punto, dei punti, dei continui, Statistica, Celeste...), nel periodo 1860–1922, dall’Unità alla Marcia su Roma ovvero da MOSSOTTI a FERMI, può prendere le mosse dalla figura di

ENRICO BETTI, (1823–1892).

Insigne in Algebra e Geometria e fisico matematico, anzi principalmente tale, fu allievo di MOSSOTTI. Non disdegnò di formarsi traducendo il *Trattato di Algebra elementare* di BERTRAND che certamente contribuì a portarlo assai vicino alle correnti di pensiero europee. Fu soprattutto sorgente di ispirazione e riferimento culturale per i suoi contemporanei tra i quali BELTRAMI. Particolarmente nell’ultimo ventennio della sua opera si dedicò alla Meccanica: diede contributi alla teoria dell’elasticità alla quale estese, per primo, all’equazione biarmonica il metodo delle immagini, ripresi da CERRUTI, SOMIGLIANA, e i metodi utilizzati per lo studio dell’equazione di LAPLACE.

I suoi lavori contengono esposizioni dettagliate e concrete; mini-trattati ancora oggi assai utili ad uno studente che ne conosca l’esistenza, sulla teoria del potenziale, sulla capillarità, sull’equazione del calore, sull’elasticità sempre con attenzione alle interpretazioni elettrostatiche dei vari risultati.<sup>1</sup>

Fra i primi in Italia a studiare e applicare le idee (che attribuisce a CLAUDIUS senza citare BOLTZMANN) base della Meccanica Statistica in problemi di interpretazione meccanica del calore: con un’interessante lavoro sul teorema del calore e l’entropia che risultavano da un’interpretazione “termodinamica” del tipo di quella su menzionata in un sistema di masse interagenti con potenziale gravitazionale, [Be888]. O nel problema dell’equilibrio di una massa di gas rarefatto isolata nello spazio, [Be880], concernente la quantità di calore che può essere contenuta in una stella e come essa possa aumentare a causa della contrazione gravitazionale. Arrivando a risultati di indubbia modernità e interesse astrofisico.<sup>2</sup>

FRANCESCO BRIOSCHI, (1824–1897).

Fisico matematico illustre che però si dedicò principalmente alla teoria delle equazioni, delle funzioni ellittiche e delle equazioni differenziali. Ma la sua vulcanica produzione, sempre dedicata a questioni tecnicamente impegnative, ebbe grande influenza su molti

---

<sup>1</sup> È interessante, dal punto di vista storico, notare che tratta il problema oggi noto come problema di Dirichlet con il metodo variazionale dando per scontato che il funzionale abbia un minimo: affermazione pur semplice da provare, considerata intuitiva da RIEMANN e DIRICHLET, ma che divenne importante dopo un controesempio di WEIERSTRASS (1880) e la soluzione di HILBERT (1899) e la successiva teoria delle equazioni di Fredholm e che tuttora occupa un posto di spicco nei trattati o lezioni sulle equazioni alle derivate parziali, [Be863] p. 82 in OP-2.

<sup>2</sup> “Se vi fu un tempo in cui nell’unità di massa del Sole era contenuta in media una sola caloria, il raggio della sfera da esso occupata fu allora uguale a 6825 volte la distanza da Nettuno”.

giovani e plasmò una generazione di analisti e fisici matematici. La frazione dei suoi lavori propriamente in Fisica Matematica è piuttosto piccola e dedicata quasi esclusivamente a problemi di idraulica, per la verità assai concreti e di diretto interesse per l'ingegneria, [Br866], (a meno di non considerare la teoria delle funzioni ellittiche come parte della Meccanica, cosa che pur sarebbe facilmente difendibile). Di particolare rilevanza per la Meccanica è il lavoro sulle configurazioni di equilibrio di un fluido rotante, [Br861], che è un tema sul quale tutti i Fisici Matematici di questo periodo (e anche del periodo precedente, ad esempio PLANA) si cimentarono: questo lavoro fu ripreso da PADOVA che ha il merito di aver esteso le ricerche al caso delle configurazioni ellissoidiche rotanti e con assi oscillanti periodicamente, [Pa871]. Rivestì importanti cariche accademiche e politiche. Fu maestro e collega di

LUIGI CREMONA, (1830-1903),

che ebbe influenza sulla Fisica Matematica sebbene si sia dedicato principalmente alla Geometria. Una traccia di un suo diretto coinvolgimento in questioni di Fisica Matematica applicata è in una sua partecipazione ad una commissione di relatori (con BETOCCHI, BLASERNA, BELTRAMI) per la eventuale pubblicazione sui Rendiconti Lincei di una ricerca un pó strana del Sig. Colonnello PIETRO CONTI, che probabilmente “doveva” essere accettata, [Cr875].<sup>3</sup> A lui successe VALENTINO CERRUTI, (1850–1909), anch'egli fisico matematico che diede importanti contributi alla teoria dell'elasticità. CREMONA influenzò, insieme a BRIOSCHI,

EUGENIO BELTRAMI, (1835–1900).

Intorno a lui e a BETTI si avvicendano i ricercatori in Fisica Matematica fino agli albori del XX secolo, quando si ebbe eccezionale fioritura con VOLTERRA e LEVI-CIVITA.

Il suo contributo forse più noto fu la realizzazione di una porzione di superficie a curvatura negativa costante nello spazio a 3 dimensioni: la *pseudosfera*, figura di rotazione associata alla *trattrice*, intorno al 1868, [BGT998]. A questo giunse attraverso considerazioni e metodi tipici della Fisica Matematica,<sup>4</sup> ponendo la questione concreta della rappresentazione senza deformazione di una superficie su un'altra e studiandola facendo uso degli strumenti forniti dalla teoria di GAUSS e di LOBACHEVSKY. Con spirito da fisico sperimentale costruì anche modelli in carta per illustrare le proprietà della Geometria non euclidea e trasse da essi l'idea della possibile validità di proprietà della Geometria stessa non ancora dimostrate, alla cui dimostrazione poi procedé.

BELTRAMI, matematico per formazione, si dedicò però anche alle più svariate questioni di Meccanica, ben oltre le proprietà dei moti geodetici su superfici curve e alla loro interpretazione in termini delle allora innovative concezioni geometriche di GAUSS e LOBACHEVSKY: l'importanza più che attuale dell'operatore di LAPLACE-BELTRAMI e dei parametri differenziali di una superficie ne è una testimonianza. Fu attento conoscitore di quanto si era sviluppato in Europa sia nell'Analisi che nella Geometria che nella Fisica non esitando ad addentrarsi in considerazioni addirittura di interpretazione della fenomenologia dell'elettrodinamica e delle idee di FARADAY (nella lettera a CESÁRO, [Be889]). All'elettrodinamica come all'elettrostatica dedicò molta attenzione: risolvendo

<sup>3</sup> “Non possiamo trattenerci dall'osservare che delle 135 esperienze riferite nella Memoria si può ben trarre argomento per mettere in dubbio i risultati ottenuti da Coulomb e da Morin ma si può dubitare se esse bastino a convincere della verità delle leggi enunciate dal Sig. CONTI, tanto più che col suo processo non è evidente la possibilità di giungere a qualche risultato concludente” .... concludendo che “... a noi paja desiderabile la pubblicazione della Memoria medesima, affinché su di essa venga provocata una discussione feconda e si pronuncii la sentenza dai giudici più competenti”.

<sup>4</sup> La sua qualifica quale Fisico Matematico è paradigmaticamente descritta dalla citazione da uno dei suoi numerosi lavori di teoria del potenziale “cosicchè le funzioni indeterminate che incontreremo nel seguito debbono senz'altro ritenersi dotate (oltre che dei caratteri dichiarati) di tutti quelli, come l'integrabilità, la derivabilità od altro, che sono necessari per la legittimità delle operazioni eseguite sovr'esse, p. 574 di [Be880], parole che dovrebbero essere presenti a quanti oggi associano alla Fisica Matematica soluzioni “deboli” o non costruttive di importanti equazioni.

vari problemi di teoria del potenziale e studiando in dettaglio la fluidodinamica mettendo in luce la connessione con le equazioni di MAXWELL raggiungendo conclusioni negative circa la loro possibile natura elastica (ripreso però da SOMIGLIANA, [So907]). Le sue quattro monografie sulla fluidodinamica, [Be874], possono essere considerate un trattato di teoria dei fluidi di EULERO, con interessanti nuove soluzioni esatte di moti fluidi piani e non (quali i moti Hamiltoniani dei vortici o i moti elicoidali dei fluidi incomprimibili) ponendo problemi naturali e in forma che ancor oggi chiameremmo moderna. Nè l'elasticità mancò di attrarne la curiosità contribuendo alla diffusione in Italia del principio di ST. VENANT, ad esempio, criticandone anche alcuni aspetti (riguardo alla quantità da limitare per garantire coesione di un materiale elastico, in cui differisce da ST. VENANT, lavoro ripreso da LEVI-CIVITA, [LC901]): e l'elasticità, come l'elettromagnetismo, lo attrassero anche per la loro relazione con i problemi relativi all'azione a distanza (studiando ad esempio la rappresentazione delle forze newtoniane o elettromagnetiche per mezzo di forze elastiche).

Notevolissimo è un suo lavoro sull'entropia, [Be882], che mostra una profonda conoscenza delle idee di CLAUSIUS e che probabilmente stimolò l'interesse che anche BETTI, [Be888], mostrò a questioni simili. Le riprende per formulare un “teorema del calore” verificato da un sistema di  $n$  conduttori carichi dei quali si varia lo “stato”, ossia la forma, la carica e la posizione spaziale, associando a ciascuno stato quantità elettrostatiche che vengono chiamate (uso qui per brevità la notazione di BOLTZMANN invece della sua)  $U$ , energia,  $T$  temperatura,  $p$  pressione,  $V$  volume. Dimostra che tali quantità hanno la proprietà che, variando lo stato, le variazioni di  $U$  e di  $V$  sono tali che

$$\frac{dU + pdV}{T} = \text{differenziale esatto}$$

ossia la quantità a sinistra è la variazione di una opportuna funzione  $S$  dello stato. È il problema delle “*analogie meccaniche del calore*” e della definizione di *entropia*: che in quegli anni BOLTZMANN, con un lavoro culminato nel 1884 ma iniziato già giovanissimo, [B0866], [Bo884], facendo seguito a CLAUSIUS e poi HELMOLTZ aveva sviluppato pervenendo all'ipotesi ergodica e alla teoria degli insiemi statistici. In Italia, come altrove, la teoria di BOLTZMANN fu largamente incompresa o ignorata nonostante GIBBS la riprendesse sviluppandola e trasformandola nella moderna Meccanica Statistica. È dunque interessante notare che BELTRAMI (e poi BETTI e in minor misura anche VOLTERRA) sia stato, fino a tempi recentissimi tra i pochi che prendesse in seria considerazione il teorema del calore e ne fosse affascinato per il significato meccanico che poteva fornire all'entropia. Sorprende però che nel lavoro non appaia alcuna citazione a CLAUSIUS, HELMOLTZ o BOLTZMANN che pur cita in altri lavori: e che li conoscesse, mi pare indubbio.

In Analisi Matematica propriamente detta BELTRAMI diede molti contributi, e con intenti assai moderni, fra cui lo sviluppo di una funzione in serie trigonometrica di armoniche di frequenze uguali alle radici della prima funzione di BESSEL oppure della sua derivata, facendo seguito a lavori di ABEL. Non si occupò direttamente di Meccanica Celeste nonostante un breve periodo all'osservatorio di Brera (1863-64) e la conoscenza di SCHIAPARELLI con il quale redasse tavole trigonometriche per uso geodetico.

La personalità di BELTRAMI, dunque, fu ricchissima e poliedrica sebbene la sua influenza non si sia manifestata con una grande scuola: forse a causa dei suoi ripetuti trasferimenti. Ma ebbe allievi in varie università (ad esempio BURGATTI, cfr seguito). Da giovane (1853) fu espulso dal collegio Ghislieri per aver fomentato disordini contro il Rettore e così non poté neppure terminare gli studi riprendendo però, dopo l'Unità, la ricerca ed una posizione nelle Regie Università grazie all'interessamento e apprezzamento da parte di BRIOSCHI e CREMONA e pervenendo addirittura al Senato del Regno (come vari altri illustri fisici matematici, quali BRIOSCHI, BETTI, SIACCI, VOLTERRA) e a ricoprire importanti incarichi ministeriali.

La sua opera fu importante per l'influenza che ebbe nella ricerca in Italia: soprattutto per gli aspetti divulgativi dei grandi temi della Meccanica (dai fluidi all'elettrodinamica all'elasticità alla Fisica Teorica) che manifestò pubblicando un gran numero di articoli in cui otteneva, semplificandoli con metodi nuovi ed originali, importanti risultati d'oltr'alpe. Inoltre si deve a lui la discussione e valorizzazione dell'opera di SACCHERI, [Be889], sulla Geometria non euclidea. Fu influenzato anche da

DOMENICO CHELINI, (1802–1878).

Più anziano di BELTRAMI, ebbe vicissitudini politiche e fu (in quanto ecclesiastico) estromesso dall'Università di Bologna per “non aver” partecipato ad una funzione religiosa sullo Statuto (1860); riammesso (1863) e nuovamente estromesso (1864, per non aver potuto giurare fedeltà al Regno in quanto religioso, sebbene fosse personalmente in favore dell'Unità). E CHELINI fu un'importante figura che contribuì allo sviluppo della Meccanica in vario modo e *in primis* con la sua dettagliata ed esplicita trattazione dei moti di POINSON, che venne studiata in tutta Europa, [Ch859]. Egli così continuò e contribuì a mantenere l'interesse per la Meccanica Analitica sulle orme di LAGRANGE (e, in Italia, di PLANA, PIOLA, SANTINI e altri che seguirono LAGRANGE applicandone e sviluppandone i metodi nella prima parte del XIX secolo). Sui moti rigidi però in Italia non ci furono gli sviluppi che ci si sarebbe potuti attendere in seguito ai contributi di CHELINI, sebbene lo studio di tali moti sia stato al centro di moltissime ricerche successive e degli interessi di tutti i fisici matematici.

Un importante documento sulla statura di CHELINI è il suo trattato di Meccanica Razionale, [Ch860], che mi pare che restò ineguagliato fino all'apparizione (1921) del trattato di LEVI-CIVITA e AMALDI (e direi anche non superato da questo se non nella teoria ed applicazioni delle trasformazioni canoniche e principi variazionali).<sup>5</sup> Applica la teoria dei moti rigidi deducendo elegantemente il calcolo della precessione e nutazione terrestri, che si ritroverà in LEVI-CIVITA e AMALDI ma che non è di solito discussa nei trattati italiani nel periodo intermedio fra il 1860 e il 1921. È sintetico e al tempo stesso chiarissimo anche secondo i criteri odierni. Discute il caso dei vincoli senza attrito introducendo i principi dei lavori virtuali (chiamato delle velocità virtuali) e di D'ALEMBERT presentandoli in sostanza (e in una interpretazione affatto moderna) come una definizione di vincolo senza attrito (e ponendo l'attrito, quando d'uopo, fra le forze attive) senza tentare la strada della dimostrazione “su basi fisiche” che (stranamente) venne in seguito adottata dalla scuola di Meccanica Italiana (come nelle lezioni di BURGATTI o di LEVI-CIVITA e AMALDI): il punto di vista di CHELINI invece fu quello dei maggiori trattati dell'epoca, si veda ad esempio il punto di vista di APPELL e di VOIGT.<sup>6</sup> L'interesse per questioni di principio di CHELINI è sempre alto e culmina nell'interessante Appendice “Sui principi fondamentali delle Matematiche” in cui si mostra la sua attenzione alle esigenze di assiomatizzazione che in quegli anni pervadevano in Europa gli studi matematici.

Si occupò attivamente di Meccanica Celeste: ad esempio si veda il computo delle effemeridi della cometa di Hind, [Ch847].

CHELINI appare dunque come una figura chiave, come anche dimostrato dalla stima di

---

<sup>5</sup> Le lezioni di GIOVANNI BATTAGLINI, (1826–1894), [Ba873], anche furono di pari interesse. Pur essendo dichiaratamente basate su trattati di TODHUNTER e di altri costituiscono una compilazione di altissimo livello: e rilevante per la Meccanica Celeste in quanto vi si discute i moti elementari (precessioni e nutazioni) di Terra e Luna. Un importante trattato precedente è quello di SANTINI, [Sa830], anch'esso notevolissimo per l'interesse a tali questioni. Molti altri trattati sono apparsi fra quello di CHELINI e quello di LEVI-CIVITA e AMALDI: ad esempio quelli di ALESSANDRO DORNA (1825–1866), [Do873], e FILIBERTO CASTELLANO, [Ca811].

<sup>6</sup> Sebbene CHELINI avesse discusso in una sua precedente pubblicazione, [Ch847], una “dimostrazione” del principio delle “velocità virtuali” rifacendosi ad AMPÈRE (“... basta evidentemente che la risultante delle forze applicate riesca normale a  $M$ ...”). In proposito conviene ricordare che il classico trattato di VOIGT fu tradotto, 1894, in italiano preceduto da una prefazione di BELTRAMI che ivi sottolinea che l'attenzione alla Meccanica Analitica di LAGRANGE avrebbe forse dovuto essere maggiore, •[controllare anche p. 340]??.

BELTRAMI che a volte lo chiama “caro ed illustre amico”; nella eccezionale commemorazione che di lui volle CHELINI è a volte affettuosamente “il buon CHELINI”.<sup>7</sup>

FRANCESCO SIACCI, (1839–1907).

Contemporaneo di BELTRAMI emigrò da Roma a Torino per partecipare al processo di unificazione d’Italia divenendo militare di carriera. Ricoprì cattedre di Meccanica Razionale (università, Torino) e di Balistica (alla Scuola di applicazioni, Torino). Fu un’interessante personalità che riuscì a compiere ricerca pura sebbene sollecitato ad occuparsi di problemi concreti di artiglieria riferendosi anche ai risultati di CHELINI sui moti di POINSON, [Si877]. È interessante il suo volume di lezioni di Meccanica Razionale: il principio dei lavori virtuali è ivi presentato essenzialmente come un postulato e su di esso ritorna in uno dei suoi ultimi lavori in cui tenta una dimostrazione semplice del principio con una dichiarazione metodologica che lo mostra assai attento a questioni fondamentali delle quali apprezza l’importanza.<sup>8</sup>

I successori ideali di BELTRAMI e BETTI.

Furono VOLTERRA, normalista, fisico di formazione, allievo di BETTI e poi successore alla cattedra di BELTRAMI, e TULLIO LEVI-CIVITA, (1873-1941), matematico di formazione, influenzato da ERNESTO PADOVA, (1845-1896), e GREGORIO RICCI-CURBASTRO, (1853–1925). Due personalità piuttosto diverse, entrambi dai molteplici interessi spesso intersecantisi: con loro in Italia ci si inserisce nelle correnti della ricerca europea e si compete con essa.

VITO VOLTERRA, (1860-1940).

Dopo un inizio dedicato all’Analisi Matematica sotto l’influenza di ULISSE DINI, (1845–1918), VOLTERRA affronta con chiarezza e senza reticenze di fronte a calcoli anche lunghissimi, che riflettono la sua formazione da fisico, problemi di elettrodinamica [Vo891], con attenzione alla rappresentazione di soluzioni ondose a mezzo di estensioni del principio di KIRCHOFF. La produzione dei primi venti anni, fino all’inizio del ’900, è veramente vasta, varia e di interesse eccezionale.

Ben noti sono i suoi contributi determinanti alla fondazione dell’analisi funzionale e allo sviluppo della teoria delle equazioni integrali e dei “fenomeni ereditari” che hanno inizio già nei suoi primi lavori, [Vo883], [Vo887], si veda anche [Vo912], [Vo914].<sup>9</sup> La teoria ha un rapido sviluppo che rende necessari vari lavori di rassegna e confronto con quelli di altri autori (ABEL, LIOUVILLE, BELTRAMI, SCHLÖMILCH, DINI, SONINE, LEVI-CIVITA, PINCHERLE), [Vo897].

Alla Meccanica dedica varie memorie fra queste cito la notevolissima estensione della teoria di HAMILTON-JACOBI al caso in cui la variabile temporale è a due dimensioni:<sup>10</sup>

<sup>7</sup> E si evince che nell’800 una tale ultima qualifica non aveva la connotazione un pó condiscendente che ha oggi.

<sup>8</sup> “D’altra parte in iscuola, sono da evitare le dimostrazioni lunghe e complicate: le non rigorose ripugnano, e non si devono dare. Non darne poi ... non mi pare cosa conforme al buon Matematico. Però a questo segue una dimostrazione, [Si905], che lui stesso subito dopo in un successivo articolo nota essere non rigorosa: “Dove manchi il rigore ormai non monta e chi ne fosse curioso potrà facilmente trovarlo da se”. La dimostrazione non rigorosa in realtà, mi pare, contiene un errore al punto 2°, p. 605: errore che non riscontro invece nella dimostrazione, in tutto analoga, nel trattato di CHELINI.

<sup>9</sup> Un’interessante traccia dei suoi studi di teoria del potenziale è tramandata oltre che dai suoi primi lavori da una serie di “esercizi” che sarebbe assai utile suggerire agli studenti, [Vo894].

<sup>10</sup> A grandi linee la generalizzazione è descritta così. Le coordinate  $x_1, \dots, x_n$  nel loro “moto” (con tempo a due dimensioni) vengono a dipendere da due parametri  $u, v$  che variano in un dominio  $\Delta$ ; il ruolo delle  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$  è preso dai determinanti  $\xi_{i,j} \stackrel{def}{=} \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)}$ ,  $i < j$  e la “Lagrangiana” è ora una funzione  $\mathcal{L}(\xi, x)$ . Il problema è minimizzare  $\int_{\Delta} \mathcal{L}(\xi, x) du dv$  con la condizione che  $x$  assuma valori dati sulla frontiera di  $\Delta$ . Le equazioni “del moto” diventano  $\sum_k \frac{\partial(\xi_{i,k}, x_k)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$  e posto  $p_{i,k} \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_{i,k}}$  e

con essa ritrova anche le proprietà di famiglie di superfici minime già ottenute da PADOVA. Uno studio moderno dei problemi che questa memoria suggerisce è certo auspicabile.

La Meccanica Celeste fu oggetto di studi intensi, anche se concentrati nell’arco di qualche anno, dedicati, a differenza di LEVI-CIVITA, a questioni di Astronomia applicata. In particolare fu attratto, penso anche sull’influenza di PADOVA, [Pa885], dalla questione della teoria del moto polare: la precessione di CHANDLER scoperta in quegli anni (1891). Una serie di impegnativi lavori discute per prima, [Vo895], la possibilità che la precessione sia dovuta a movimenti interni alla Terra, correnti marine ad esempio, che producono una coppia  $\underline{M}$  costante, o a direzione lentamente variabile, sulla Terra pensata altrimenti come corpo rigido. Lo scopo è di ottenere una spiegazione del divario osservato fra la precessione di CHANDLER e la precessione euleriana.<sup>11</sup> Discute anche ipotesi alternative quali quella della plasticità proposta da SCHIAPARELLI (ossia variabilità del tensore d’inerzia che invece rimane costante nella teoria dei moti interni, favorita da VOLTERRA). Sono lavori in cui si manifesta la sua formazione di fisico e la sua capacità tecnica nel far fronte ad un difficile problema fenomenologico dai contorni non precisi traendo spunto ed ispirazione dai metodi rigorosi della Meccanica, sia per la definizione che per la trattazione del modello matematico. A questo proposito si può avere un’idea di quanto la scoperta di CHANDLER avesse eccitato gli animi leggendo la veemente polemica, non esente anche da polemica su questioni di priorità, nella lettera al presidente dell’Accademia dei Lincei BRIOSCHI in risposta a commenti di GIUSEPPE PEANO, [Pe895], sulla sua teoria, [Vo896].

Ma la teoria dei moti rigidi è, come tutti sanno, entità contagiosa: quindi anche VOLTERRA dedicherà ad essa un gran numero di memorie dopo il suo interesse iniziale per gli aspetti fisici della precessione polare. Così facendo studia varie questioni di Meccanica, di solito in relazione alla precessione di CHANDLER, fra le quali quella del moto di sistemi policiclici (sistemi rigidi contenitori di sistemi dotati di moti periodici di vario periodo) rifacendosi alla teoria dei sistemi monociclici di HELMOLTZ che tanta importanza ebbero nei fondamenti della Meccanica Statistica ad opera di BOLTZMANN, [Bo884], e sviluppandola. Come notato altrove è interessante che questi lavori dei fondatori della Meccanica Statistica, noti e applicati da BELTRAMI e BETTI, fossero conosciuti e seguiti in Italia allora per poi essere, sfortunatamente, dimenticati. E nel 1898 completa e compendia i suoi studi in una monografia sulla prestigiosa rivista *Acta Mathematica*, [Vo898].

Alla Meccanica Celeste ritorna con lo studio del problema di  $n$ -corpi fissi su una retta e un  $(n + 1)$ -mo attratto da essi: ripreso da ARMELLINI, si veda in seguito.

A questioni assai concrete legate all’interpretazione di esperimenti e fenomeni naturali VOLTERRA, come LEVI-CIVITA, RICCI-CURBASTRO ed altri, fu sempre attento: l’interesse per la precessione dei poli non è il solo esempio. Lavori sull’elettrolisi e su fenomeni ad essa analoghi, svolti da Studente o da Accademico, ne sono un altro esempio, [Vo897], come la sua teoria delle “*seiches*” del lago di Ginevra: in [Vo898] propone lo studio dei fenomeni analoghi nei laghi italiani e in una brillantemente succinta nota in appendice a mostra come il problema sia riducibile ad un problema agli autovalori (“valori eccezionali”).

Il suo continuo interesse per la teoria delle funzioni olomorfe lo mantiene in stretto contatto con l’Analisi Matematica e la Geometria delle superfici a curvatura costante:

---


$$H = p \cdot \xi - \mathcal{L}(\xi, x) \text{ si trova la “forma Hamiltoniana” delle equazioni del moto: ossia } \frac{\partial(p_{i,k}, x_k)}{\partial(u,v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial H}{\partial \xi_{i,k}}.$$

<sup>11</sup> Ossia il modello è  $I\dot{\omega} = (I\omega + \underline{M}) \wedge \omega + \dot{\underline{M}}$ , con  $\underline{M}$  costante (moti interni stazionari) o variabile (moti interni lentamente variabili) e  $I$  matrice d’inerzia, che è integrabile, per quadrature se  $\dot{\underline{M}} = \underline{0}$  o approssimativamente altrimenti se  $\dot{\underline{M}}$  è piccolo, il che permette di dedurre il valore di  $\underline{M}$  in funzione del moto osservato dei poli. Trova il notevole risultato che il periodo euleriano si cambierebbe in quello di CHANDLER se il momento della quantità di moto secondo l’asse della Terra dei moti interni fosse  $\sim 10^{-3}$  volte il momento della quantità di moto totale.

interesse mai venuto meno neppure nei periodi in cui questioni concrete e legate direttamente alla Fisica o Astronomia sperimentali pareva dovessero predominare. Già si manifesta nell'estensione della nozione di olomorfa a funzioni di più variabili, [Vo887].<sup>12</sup> Che successivamente svilupperà nella teoria delle forme differenziali di dimensione arbitraria ottenendo notevoli estensioni di risultati parziali precedenti di RIEMANN e BELTRAMI, fra gli altri. E poi alla teoria delle equazioni differenziali lineari nel campo complesso, [Vo899]. Una nota davvero elegante è un suo teorema di addizione per integrali doppi che conferma quanto VOLTERRA fosse in sintonia con gli interessi e i metodi che venivano sviluppati in Europa (da PICARD in questo caso), [Vo897].

Compie importanti ricerche in teoria dell'elasticità estendendo alle onde nei mezzi elastici isotropi (e non) tridimensionali la nozione di linea caratteristica (che diviene superficie caratteristica), [Vo894]. Inoltre discute proprietà di corpi non semplicemente connessi e svolge una teoria dettagliata mostrando che sebbene in corpi semplicemente connessi non sia possibile una soluzione non singolare delle equazioni dell'elasticità che, in assenza di forze, presenti tensioni interne non nulle tuttavia così non è nel caso dei corpi non semplicemente connessi, [Vo907]. L'equazione delle onde, del calore e dell'elasticità continuano ad attrarre la sua attenzione, e discute un'applicazione del metodo delle immagini all'equazione delle onde, [Vo904], e svolge lezioni sulle equazioni della Fisica Matematica, [Vo908]. Un'applicazione assai interessante dell'equazione del calore è rivolta a problemi quali la temperatura all'interno di una montagna, [Vo912]. Poi discute le equazioni integrodifferenziali, [Vo912], e i fenomeni ereditari, [Vo913].

Durante il periodo bellico la sua produzione scema un pò e si adatta alla sua situazione di volontario in aeronautica, [Vo916]: tuttavia arrivò a completare lavori sulla teoria delle algebre di operatori integrali, [Vo916], che proseguono le sue lezioni a Princeton del 1912 e che continueranno ancora ad attrarre il suo interesse, [Vo920]. Sono idee che hanno avuto sviluppi in vari sensi, quali ad esempio la moderna teoria della convergenza della serie del viriale e il formalismo della “*cluster expansion*”.

La sua teoria, importante per originalità e risultati, dell'evoluzione di popolazioni viene principalmente svolta nel periodo successivo a quello qui considerato.

Si impegnò nella politica scientifica con importanti risultati di natura organizzativa e presto mostrò interessi per le applicazioni della Matematica alle scienze biologiche e sociali. Quale Senatore ebbe grande influenza in questo campo almeno fino all'avvento del fascismo che avversò con grande coerenza fino alla sua estromissione dall'università e dalle accademie avvenuta ancor prima delle leggi razziali.<sup>13</sup> A proposito del suo impegno per la scuola e la ricerca è utile rileggere la sua relazione sull'insegnamento della dinamica nelle scuole industriali, [Vo921], o quella di poco successiva sull'insegnamento della Fisica Matematica nelle università, [Vo920].

TULLIO LEVI-CIVITA, (1873-1941).

Con LEVI-CIVITA la Meccanica analitica riceve impulso con la dimostrazione di nuove ed originali proposizioni. Fra i suoi primi lavori si trova la classificazione dei moti geodetici sulle superfici e il problema dell'isomorfismo dei sistemi dinamici continui (com'è oggi chiamato) viene posto con chiarezza e studiato in qualche dettaglio nel caso dei moti geodetici, [LC886]. Ben presto il suo interesse per la Meccanica analitica e la

<sup>12</sup> Una coppia di funzioni complesse definite sulle linee, regolari e chiuse o terminanti sul bordo di un dominio dato su una superficie 3-dimensionale, da integrali di linea di una coppia di forme differenziali sono *riemannianamente collegate* se i rotori dei coefficienti delle forme sono ovunque proporzionali. Come su una superficie bidimensionale due funzioni complesse definite dei punti della superficie sono *riemannianamente collegate* se le variazioni infinitesime rispetto al valore assunto in un arbitrario punto hanno rapporto indipendente dalla variazione stessa, [Vo889].

<sup>13</sup> Si nota in proposito che il suo rifiuto del giuramento di fedeltà avvenne quasi al momento del suo maturato collocamento a riposo omettendo di aggiungere che VOLTERRA fin dall'inizio, 1921, ebbe a subire le conseguenze della sua opposizione al regime e dimenticando che una messa al bando al momento della vecchiaia è più difficile da superare che da chi, come VOLTERRA quindici anni prima e ancora nel pieno delle forze e della fama, può ad esempio scegliere di emigrare.

sua conoscenza dei problemi della Meccanica Celeste lo portano alla “regolarizzazione di LEVI-CIVITA” del problema dei tre corpi ristretto in una notissima serie di lavori, che iniziano in [LC903] con la scoperta della trasformazione canonica di coordinate che opera sulle coordinate  $(x, y)$  di posizione del problema ristretto come  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  con  $x + iy = (\xi + i\eta)^2$ , e che è accompagnata e seguita da vari problemi legati alla Meccanica Celeste e colloca LEVI-CIVITA fra i pochi autori del periodo in esame che in Italia si sono dedicati a questioni teoriche di tabulazione delle funzioni perturbatrici. Ad esempio lo studio dell’inversione dell’equazione di KEPLERO in cui si mostra che l’inversione della  $u - e \sin u = \zeta$  da luogo, per qualsiasi  $\zeta$  reale, ad una serie a raggio di convergenza 1 nel parametro  $\eta = \frac{e \exp \sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}$ , [LC904]. Lo studio dell’equazione di KEPLERO fu un tema ricorrente in Italia da LAGRANGE in poi almeno, come nei lavori di CARLINI o di CHIÓ, [Ch846], e questo lavoro è un’originale e innovativa continuazione di questi studi. Anche un suo lavoro sulle funzioni implicite, non credo molto noto, fu molto probabilmente generato dai problemi che affrontava nella rappresentazione della funzione perturbatrice in Meccanica Celeste: qui propone di utilizzare un metodo di somma della serie che esprime una funzione definita implicitamente: in linguaggio moderno, è una “risommazione” di una serie (convergente) di potenze, [LC907]. Metodo che recentemente è stato adattato e applicato a problemi di piccoli divisori e serie divergenti (risommazioni di diagrammi di massa in teoria dei campi quantici e in teoria KAM).

Un interessante teorema sui moti stazionari,<sup>14</sup> gli consente di discutere in modo unitario tutti i moti quadrabili allora noti di vari sistemi non riducibili alle quadrature e rilevanti per la Meccanica e soprattutto per la Meccanica Celeste, quali il corpo rigido pesante con punto fisso, il problema dei tre corpi e ancora.

“Matematico” di formazione, come testimoniato dai suoi primi lavori e dall’interesse ricorrente per questioni sottili quali la teoria dei numeri primi, degli infinitesimi, dei numeri transfiniti o per il calcolo differenziale assoluto, appreso da RICCI-CURBASTRO e poi sviluppato in collaborazione con lui, [RL900], LEVI-CIVITA evolvette rapidamente in un fisico teorico attraverso i suoi interessi per la Meccanica e la Fisica dei continui a partire dall’elasticità e dalla teoria dei fluidi e, attraverso la Geometria e insieme a RICCI-CURBASTRO, fu fra i creatori della matematica della Relatività Generale. A RICCI rimase sempre vicino e riconoscente e ne è ancora testimonianza la commemorazione all’Accademia dei Lincei, [LC925], in cui gli rende il merito pressochè totale della creazione del calcolo assoluto, ricordando anche quanto poco RICCI fosse stato apprezzato in gran parte della sua vita scientifica. <sup>15</sup>

E come fisico teorico fu senza dubbio il maggiore in Italia nel periodo considerato: i

<sup>14</sup> Si considera un sistema a  $n$  gradi di libertà con Hamiltoniana  $H(\pi, \kappa, p, q)$  ove  $\pi, \kappa$  sono  $k$  coordinate canoniche coniugate e  $p, q$  sono le altre  $n - k$ . Se  $I_r(\pi, \kappa, p, q) \stackrel{def}{=} \pi_r - f_r(\kappa, p, q)$  e  $I_r = 0$ ,  $r = 1, \dots, k$  sono “relazioni invarianti”, ossia se rimangono nulle qualora lo siano all’istante iniziale e se inoltre sono in involuzione allora posto  $H'(\kappa, p, q) = H(f(\kappa, p, q), \kappa, p, q)$  anche le relazioni  $\partial_p H'(\kappa, p, q) = 0$  e  $\partial_q H'(\kappa, p, q) = 0$  sono relazioni invarianti; esprimendo, loro tramite,  $p = P(\kappa), q = Q(\kappa)$  in termini di  $\kappa$  e risolvendo le equazioni “solo  $k$ -dimensionali”  $\dot{q} = \partial_\pi(f(\kappa, P(\kappa), Q(\kappa)), \kappa, P(\kappa), Q(\kappa))$  si ottengono  $\infty^k$  moti. Ripreso ed esteso da BURGATTI, [Bu912], e poi da LEVI-CIVITA stesso.

<sup>15</sup> Le difficoltà nella carriera accademica, notevolmente in ritardo rispetto a quella di altri meno importanti colleghi, furono certo dovute a scarso apprezzamento della sua opera: come risulta dal giudizio poco lusinghiero di BELTRAMI in occasione della decisione, 1886, di non assegnargli il premio Reale di Matematica e da quello, analogo e in analoga occasione, 1901, di BIANCHI, [Bi902]: “... Per altro ci sembra che la troppa preponderanza data alla parte algoritmica lasci bene spesso nell’ombra il contenuto essenziale geometrico e talora conduca ad enunciare come risultati speciali del calcolo proprietà geometricamente evidenti. ... Piuttosto che nella specialità degli algoritmi usati riconosciamo la vera sorgente delle scoperte, nel campo dell’ordinaria geometria infinitesimale, nella forza dell’intuizione geometrica, sussidiata da quel potente strumento analitico, che ciascun ricercatore potrà foggiare nell’una o nell’altra guisa a seconda delle preferenze od abitudini individuali... È giusto però riconoscere che molto maggiori sono i vantaggi dei procedimenti del calcolo assoluto nel campo della geometria differenziale a più dimensioni... I risultati conseguiti dall’A. non presentano in sostanza alcuna novità. Ma si sa anche che si doveva trovare una scusa valida per non assegnare il premio visto che avrebbe dovuto essere assegnato ad altri che per qualche accidente non potevano esser considerati (nulla di nuovo!).”



suoi molteplici interessi lo portano ad occuparsi con grande attenzione alle più svariate questioni: in una lettera a SIACCI (già Senatore, ma non ancora Generale d'artiglieria) espone un suo tentativo di spiegazione della resistenza incontrata da un corpo in moto in un fluido ideale che poi sviluppa in una ambiziosa teoria delle scie e della legge di resistenza.<sup>16</sup> Si interessa vivamente a problemi concreti di elettromagnetismo necessari, su richiesta di fisici sperimentali quali RIGHI, all'interpretazione di risultati ottenuti in laboratorio. La sua trattazione rigorosa delle onde (non lineari) alla superficie libera di un fluido bidimensionale (iniziata in [LC907] e sulla quale ritornerà ancora varie volte in anni successivi) è ancor oggi giustamente ben nota.

In altri lavori studia problemi suggeriti dall'industria sulla costruzione di cavi coassiali,<sup>17</sup> oppure dalla balistica.<sup>18</sup>

Per l'elettromagnetismo ebbe sempre un interesse particolare: anche per le questioni teoriche e di principio. Questo suo interesse culmina forse proprio nel periodo in cui "il Sig. EINSTEIN" veniva ponendo la sua rivoluzione relativistica: viene testimoniato dalla sua analisi, mirabile per lucidità e rigore metodologico, della teoria dell'elettrone e della sua massa elettromagnetica presentata alla S.I.F. a Pavia nel 1901 e rielaborata e pubblicata nel 1907 sull'onda della sua nota sull'esistenza e proprietà di moti di una densità di carica priva di massa inerziale, [LC907].<sup>19</sup> L'elettrodinamica e le questioni legate alla massa elettromagnetica degli elettroni continuano ad attrarre la sua attenzione anche negli anni successivi: come risultato collaterale trova la formulazione Hamiltoniana per il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico (ossia la forma di quello che chiamiamo "accoppiamento minimale"), [LC910].

Ritorna alla Meccanica Celeste con uno studio generale sulle equazioni differenziali dipendenti periodicamente dal tempo, motivato dall'esigenza di fornire una dimostrazione dell'esistenza del moto medio del nodo lunare supponendo che il moto dell'astro sia descritto da alcuni semplici modelli. In linguaggio moderno si stabilisce l'esistenza del numero di rotazione per i moti Hamiltoniani forzati periodicamente che appaiono nella teoria della Luna. Fa in questo seguito al teorema di POINCARÉ, [Po885], sull'esistenza del numero di rotazione per le trasformazioni del cerchio che migliora eliminando un'ipotesi

- 
- <sup>16</sup> Sostiene che il "paradosso", [LC901], secondo cui in un fluido ideale un corpo in moto uniforme non incontra resistenza è superabile ammettendo che il campo di velocità del fluido sia discontinuo su una (naturale) superficie di discontinuità: e ottiene la formula di NEWTON (attrito proporzionale al quadrato della velocità). In linguaggio moderno la soluzione dell'equazione di EULERO che considera *non è una soluzione debole* (in effetti la richiesta di soluzione debole non ha un significato fisico veramente chiaro nel caso di un fluido perfetto); argomenta che a velocità non piccole questa forma di attrito predomina su un eventuale attrito dovuto alla viscosità. È una proposta che ancora merita di essere investigata, [LC901], [LC907].
- <sup>17</sup> Ossia "dall'ing. E. JONA della Pirelli": che genera la sua brillante soluzione del problema di DIRICHLET, in una regione piana dotata di cuspidi, per il calcolo della tensione massima cui è sottoposto il materiale coibente in un cavo coassiale in funzione del numero di cavi che lo costituiscono, [LC904]: esprime la tensione massima come valore di un'opportuna funzione ipergeometrica.
- <sup>18</sup> Ossia dal Tenente Colonnello CALVI che chiede una spiegazione teorica del perché un proiettile sparato contro un bersaglio penetri in esso per una distanza che non aumenta con la vicinanza al bersaglio stesso, bensì esista una distanza ottimale, maggiore di zero, per la massima penetrazione, [LC906].
- <sup>19</sup> Esponendo varie teorie correnti suppone che l'elettrone (ossia la particella costituente i raggi catodici) sia rigido e costituito da atomi, mostrando l'inconsistenza di questa ipotesi. Discute poi la teoria di ABRAHAM e ne mostra la consistenza con l'ipotesi di una massa nulla per l'elettrone la cui inerzia sia puramente elettromagnetica valutando a  $r \sim 10^{-12}$  cm la dimensione dell'elettrone (ossia al valore del "raggio classico dell'elettrone" che ricava da  $r = \frac{4}{5} \frac{e^2}{mc^2}$  con i simboli ancor oggi in uso). Conclude che *i mezzi sperimentali si trovano già ora così perfezionati da superare in esattezza l'ambito comune alle varie ipotesi cinematiche*: propone la necessità di affrontare il problema introducendo un "cut-off" (come si direbbe oggi) e poi rimuovendolo a conti fatti. Cosa che riconosce essere fuori della portata attuale delle conoscenze e alla quale si aggiungono altre difficoltà parallele, quali la non additività della massa elettromagnetica; e conclude *Trarre da questi principi una spiegazione elettromagnetica della materia non mi pare incoraggiante; direi anzi che si rasenta il circolo vizioso. Sarà possibile evitarlo con qualche spostamento nel modo di porre la questione?*. Una questione che è stata spostata prima all'elettrodinamica quantistica, poi al modello standard, poi alla teoria quantistica della gravitazione e delle stringhe senza peraltro ancora pervenire a soluzione soddisfacente.

implicita nei lavori di LINDSTEDT, ADAMS, HILL e POINCARÉ stesso.<sup>20</sup> Inoltre studia il problema della forma degli anelli di Saturno nel quadro di una serie di articoli sulla gravitazione di tubi sottili di massa, [LC912]. E ritorna ancora sulla questione della rappresentazione della funzione perturbatrice introducendo un nuovo sistema di coordinate canoniche per il problema degli  $n$ -corpi, [LC913], e poi (in seguito alla soluzione più generale di SUNDMAN) sul problema ristretto dei tre corpi del quale semplifica, [LC916], e poi completa la teoria pervenendo a nuovi risultati sulla regolarizzazione delle collisioni binarie nel problema non piano, [LC918].

Ma ormai appare la teoria einsteiniana e, naturalmente, ritorna l'interesse diretto di LEVI-CIVITA per la Geometria: interesse mai veramente trascurato e che riappare con l'introduzione della nozione di parallelismo, [LC917], e continua con suoi contributi originali alla nuova teoria, [LC917], che saranno compendiate nella monografia sul calcolo differenziale assoluto apparsa dopo lunga gestazione nel 1925, [LC925]. Il suo interesse per la Relatività va ben oltre il 1922, ma non esaurirà affatto il suo continuo tornare sui problemi precedentemente affrontati, dalla Meccanica Celeste, ai fluidi all'elasticità e si arricchirà di un forte interesse verso la nuova Meccanica (quantistica) alla quale pure arrecherà contributi dimostrando una apertura culturale ed una vastità di interessi che non furono veramente imitati dai suoi eredi.<sup>21</sup>

È interessante ricordare qui le parole conclusive della sua nota *Estensione ed evoluzione della Fisica Matematica (nell'ultimo cinquantennio, con speciale riguardo al contributo italiano)*, [LC911]. Elabora così sul successo dell'ipotesi atomistica e sui conflitti che incontra con la teoria dell'elettromagnetismo: “*C'è da temere che, per avanzare nella conoscenza delle leggi della natura, non basti più, come per l'addietro, interrogare ... ma si renda indispensabile scendere a più dettagliata analisi, avendo riguardo al comportamento molecolare. Se così stanno le cose ... le equazioni indefinite saranno ormai da cercarsi ... piuttosto come relazioni statistiche, provenienti da miriadi di eventualità disparate, e rese in definitiva maneggevoli mercé la legge dei grandi numeri.*” Queste parole mi pare che indichino quanto Levi-Civita fosse consapevole del travaglio della Fisica che si avviava allora ad una rivoluzione profonda.

Il suo trattato di Meccanica, in collaborazione con UGO AMALDI, pubblicato nel 1921 fu una importante innovazione entrando in dettaglio nelle implicazioni della Meccanica Analitica e impostando vari problemi di teoria perturbativa nella prospettiva di sue applicazioni all'Astronomia.

Anche LEVI-CIVITA subì le leggi razziali e per esse fu estromesso dall'università e dall'Accademia.

Contemporaneo di LEVI-CIVITA e allievo di BELTRAMI fu

PIETRO BURGATTI, (1868-1938).

le sue lezioni di Meccanica Razionale sono impostate in modo assai classico e non recano traccia del travaglio generato dalle audaci e nuovissime teorie di POINCARÉ sebbene l'introduzione alle lezioni inizi con la promettente osservazione (ancor più valida oggi) “*È ben vero - purtroppo! - che al presente si vuol discendere da quel piedistallo scientifico che una lunga esperienza provò solidissimo, per cercare nel basso una base più comoda e più accessibile alla mediocrità. Ma in basso c'è la nebbia, dico io, e il desiderio di*

<sup>20</sup> C.f.r. nota 13 in [LC911]. A dire il vero sembra che questo risultato sia contenuto nel lavoro di POINCARÉ dove viene ottenuto con il metodo che poi si ritroverà in [Le911]: come mai né LEVI-CIVITA né LEVI si rifacciano a questo lavoro può forse capirsi notando che solo chi fosse a conoscenza dell'esistenza di questo teorema di POINCARÉ attraverso seminari di esperti chi avesse letto in dettaglio le moltissime pagine del lavoro originale avrebbe potuto conoscerlo. Non sembra che questo sia stato il caso di LEVI-CIVITA o di LEVI o, successivamente, di BURGATTI.

<sup>21</sup> Ricordo qui, a testimonianza del suo atteggiamento e curiosità scientifica una divertente, quanto dotta, nota (che chiama esercizio) sulla stabilità delle lavagne, [LC924], che apre uno squarcio sulla vita accademica di allora in cui risultano le preoccupazioni di una commissione d'esame di Meccanica Razionale formata addirittura insieme con ARMELLINI e BISCONCINI.

*sole ritornerà*”. Però a differenza dalle esposizioni nei testi di Meccanica Razionale di CHELINI e di SIACCI, ove come si è detto si tenta una dimostrazione del principio di D’ALEMBERT che in sostanza risale ad AMPÈRE, qui il principio è giustificato dalle sue conseguenze e viene presentato come parallelo alle leggi di NEWTON inaugurando una tradizione che avrà lunga durata in Italia perché adottata anche da LEVI-CIVITA in cui si cerca di dare una giustificazione al principio che sia indipendente dalle leggi di NEWTON presentando così allo studente due teorie per lo stesso fenomeno ciascuna con la propria giustificazione sperimentale. Tradizione che devia dal punto di vista seguito nei grandi trattati di Meccanica dell’epoca, quali quello di APPELL o quello di VOIGT (pur, quest’ultimo, tradotto in italiano e con prefazione di BELTRAMI stesso) che rinunciano ad una discussione del principio e ne esaminano le sole conseguenze.

BURGATTI nel suo interessante saggio conclusivo del libro di Meccanica Razionale, il “*Discorso sullo sviluppo storico della Meccanica*” fa una storia della Meccanica in cui ARISTOTELE ritiene “essere nelle proprietà del circolo tutto che di mirabile presentano i fenomeni meccanici” e con questo non lascia posto ad un’analisi neanche superficiale dell’Astronomia greca e di ARISTARCO, IPPARCO o TOLOMEO (il quale ultimo neppure viene citato) di fatto ignorando gli *Scritti di Astronomia antica* di SCHIAPARELLI che aveva esaurientemente chiarito, [Sc936], il significato dei cicli ed epicicli in termini della moderna trasformata di FOURIER.

È fra gli ultimi “meccanici razionali” che considero in questa breve rassegna: ha interessi vari che vanno dalla Meccanica dei sistemi rigidi, alla teoria del potenziale ove riprende lavori di BELTRAMI e VOLTERRA, alla elasticità alla fenomenologia della Meccanica Celeste. Ottiene risultati notevoli nella teoria dei giroscopi trovando alcuni moti particolari dei giroscopi di HESS in cui le configurazioni sono descritte da un’equazione differenziale di primo ordine per due angoli uno dei quali isocrono: problema matematico già studiato da LEVI-CIVITA e LEVI in cui si dimostra l’esistenza del moto medio della variabile non isocrona, [Bu912], [LC911], [Le911].<sup>22</sup> Nell’elasticità studia la struttura dei potenziali alla frontiera necessari per ridurre il problema delle deformazioni di un solido elastico con sforzi assegnati sulla frontiera in una equazione integrale per funzioni definite sulla superficie: problema studiato molto in generale e per equazioni a coefficienti variabili in memorabili lavori di LEVI, [Le907]. Nell’Astronomia si occupa di questioni fenomenologiche: ad esempio riprendendo, [Bu915], una critica di SCHIAPARELLI alla teoria delle comete di LAPLACE.<sup>23</sup> L’interesse della nota sta piuttosto nella discussione (qualitativa) della possibilità che una cometa influenzata dal campo del Sole e di un’altra stella penetri nel sistema solare seguendo poi un’orbita ellittica; problema tutt’ora difficilissimo ove lo si voglia trattare in modo matematicamente rigoroso.

Figure importanti nella Fisica dei continui, principalmente nella teoria dell’elasticità, spesso ispirati ai lavori di BETTI, [Be872], furono CARLO ALBERTO CASTIGLIANO, (1847–1884), che scrisse anche un’interessante monografia, [Ca879], diretta principalmente ad aspetti applicativi ma con uno sforzo di sintesi e di deduzione da principi generali, GIAN ANTONIO MAGGI, (1856–1937), ORAZIO TEDONE, (1870–1922), CARLO SOMIGLIANA, (1860–1955), e ROBERTO MARCOLONGO, (1862–1943)), che con i loro allievi contribuirono usufruendo spesso anche della presenza ispiratrice di VOLTERRA, al grande sviluppo che in seguito ebbe in Italia la Meccanica dei Continui.

L’interesse per l’elettromagnetismo e, forse un pó in ritardo con i tempi o forse in

---

<sup>22</sup> Il moto medio, come già osservato, fu in realtà studiato da POINCARÉ, [Po885], che, in questi lavori, non viene citato.

<sup>23</sup> In verità mi pare che la critica e, quindi, la difesa di LAPLACE non siano realmente necessarie. Tuttavia, come anche rileverà ARMELLINI, si perviene un’interessante applicazione del problema dei due centri di attrazione gravitazionale, [Ar920], fra le poche applicazioni di questo notevole sistema integrabile per quadrature, se non l’unica, in Astronomia. Il lavoro fu apprezzato da ARMELLINI che ne farà uso in una sua confutazione di una teoria che faceva discendere dall’interazione viscosa con l’etere la distribuzione degli afeli delle orbite cometarie, [Ar916].

contrasto con essi, la teoria dell'etere trapela da alcuni lavori, [So907], in cui SOMIGLIANA, cerca di superare i risultati negativi di BELTRAMI; e in generale si dedica allo studio della Meccanica dei Continui ([So906]: rifacendosi a BETTI ottiene la rappresentazione, a mezzo di potenziali di bordo, degli spostamenti nei mezzi elastici, metodo “parametrico” che LEVI, [Le907], applicherà a casi assai generali di equazioni a coefficienti variabili) e in continui e vari studi anche alla teoria delle onde. Sono ancora oggi utili i manuali Hoepli di MARCOLONGO fra i quali cito quello sull'elasticità, [Ma904], e quello sul problema dei tre corpi, [Ma919].

MAGGI varie volte critica, appena velatamente, VOLTERRA fornendo interpretazioni interessanti dei suoi risultati sulle superfici flessibili e inestendibili, [Ma884], che riconduce ai risultati “classici”, ovvero a proposito dei moti dei sistemi anolonomi che riconduce a sue precedenti osservazioni, [Ma901]. Più tardi pur esprimendo ammirazione per il risultato di VOLTERRA sulle tensioni elastiche nei corpi non semplicemente connessi lo riduce a poco, [Ma905].<sup>24</sup>

TEDONE svolge indagini sul moto di un fluido a forma ellissoidale, seguendo in ciò una tradizione ispirata in ultima analisi dalla Meccanica Celeste, [Te893], (si veda [Ch860], [Br861], [Pa771], [Be872], [Be880], [Vo881]) e presentando una nuova versione dei moti in cui la velocità angolare è una funzione lineare delle coordinate, alternativa a quella di VOIGT; un'importantissima analisi porta all'estensione alle vibrazioni elastiche della rappresentazione di KIRCHOFF delle soluzioni dell'equazione delle onde, [Te897], [Te902].

Dall'Analisi, disciplina che si andava ormai differenziando dalla Fisica Matematica anche nel campo della teoria delle equazioni differenziali ordinarie e parziali, sono continuati a giungere notevoli contributi a problemi di natura fisico-matematica: ad esempio

ERNESTO CESÁRO, (1859-1906).

Il cui interesse per l'Analisi (ad esempio per le questioni sulle serie divergenti), la teoria dei numeri (la sua famosa “prima memoria di aritmetica” segna il suo prepotente ingresso nella Matematica europea, [Ce883]) e la Geometria analitica lascia un posto non secondario, e di crescente rilevanza al progredire del tempo, a questioni di Fisica Matematica. Un teorema sugli zeri di un'equazione polinomiale, ad esempio, viene formulato e interpretato in termini meccanici, [Ce886]. Ma è sulla teoria dell'elasticità e l'equazione del calore che coniuga la sua esperienza in Analisi con la Geometria analitica: in una serie di lavori studia varie questioni intese alla semplificazione di risultati noti, [Ce901] (BELTRAMI), [Ce902] (POINCARÉ), [Ce906] (VOLTERRA), o a notevoli estensioni [Ce889]. I suoi lavori sulle curve singolari, ad esempio prive di tangenti, sono esempi trattati in modo affatto moderno quali costruzioni di frattali autosimili, [Ce905]. La sua memoria sulla Geometria non euclidea, che è purtroppo quasi il suo testamento scientifico, mostra il suo crescente interesse per la Geometria intrinseca, [Ce905].

Un altro interessantissimo esempio è fornito da

EUGENIO ELIA LEVI, (1883-1917),

Analista da annoverare anche fra i fisici matematici per il suo interesse per la importante questione dell'esistenza del moto medio lunare e per i suoi contributi alla teoria delle equazioni ellittiche e paraboliche. Come molti allora è affascinato dalla Geometria non euclidea e dalla teoria di POINCARÉ dei gruppi Fuchsiani. Dà, nella Fisica Matematica, importanti contributi alla teoria delle equazioni ellittiche. Come ad esempio la dimostrazione che le funzioni che hanno la proprietà della media senza essere

<sup>24</sup> “Mi pare infatti ... possa mantenersi immutato il classico teorema che un corpo elastico che occupa uno spazio finito e non è soggetto a forze di massa e pressioni applicate al contorno si troverà allo stato naturale.” Insomma bastava pensarci! Ma l'aspetto interessante del risultato di VOLTERRA fu forse che un anello di caucciù, ad esempio, tagliato e reso un cilindro indi torto su se stesso e quindi risaldato agli estremi può mantenere la forma di anello (fra eventuali altre). VOLTERRA comunque lo menziona nella sua rassegna in [Vo907].

*a priori* differenziabili lo sono, invece, necessariamente e quindi sono armoniche inaugura la tradizione particolarmente sviluppatasi in Italia dello studio delle proprietà di regolarità delle soluzioni di equazioni ellittiche; riprende il problema del moto del nodo lunare estendendo il risultato di LEVI-CIVITA, [LC911], sull'esistenza del moto medio e fornendo un'elegantissima dimostrazione in ipotesi assai deboli di regolarità Lipschitziana che prelude ai successivi lavori di BIRKHOFF, [Le911]. Di particolare rilievo per la Fisica Matematica sono anche i lavori sui problemi al contorno delle equazioni di ordine  $2n$  ellittiche che, ad esempio, si incontrano nella teoria dell'elasticità: riduce il problema alla teoria delle equazioni a coefficienti costanti combinata con un'equazione integrale del tipo di FREDHOLM, estendendo il metodo di FREDHOLM per l'equazione di POISSON.

Dalla Fisica e dall'Astronomia.

Importanti contributi alla Meccanica Razionale provennero da scuole piuttosto diverse, quali la Fisica e l'Astronomia. Menziono qui

GIOVANNI CANTONI, (1818–1897).

È da annoverare fra i massimi fisici italiani dell'800 e che contribuì, forse per primo, con grande abilità sperimentale e intuizione teorica alla corretta identificazione della natura del moto Browniano, [Ca867]: *“Ebbene, io penso che il moto di danza delle particelle solide estremamente minute entro un liquido, possa attribuirsi alle differenti velocità che esser devono ad una medesima temperatura, sia in codeste particelle solide, sia nelle molecole del liquido che le urtano di ogni banda. Non so se altri abbia già tentato questo modo di spiegazione dei moti Browniani...”* Nel suo articolo del 1867 presenta una serie di esperimenti, da lui stesso eseguiti, nei quali mostra evidenza per l'equipartizione dell'energia fra le particelle sospese e le molecole del solvente e conclude che *“E di tal modo il moto Browniano, così dichiarato, ci fornisce una delle più belle e dirette dimostrazioni sperimentali dei fondamentali principi della teoria Meccanica del calore, manifestando l'assiduo stato vibratorio che esser deve e nei liquidi e nei solidi ancor quando non si muta in essi la temperatura”*.

In Italia l'atomismo, forse per merito di AVOGADRO, e poi di PIOLA, MOSSOTTI, e di altri quali SECCHI che redasse un'ambiziosa sintesi della concezione atomica e della teoria dell'Etere, [Se874], fu all'epoca forse più accetto che nel resto d'Europa (se ne ha traccia in altri lavori di vari autori). Questo lavoro di CANTONI, opportunamente messo in luce in [Pa982], è particolarmente interessante se si tien conto che fu contemporaneo dei primi lavori di BOLTZMANN sul teorema del calore e sull'equipartizione, [Bo866], e fu questo forse il momento più alto raggiunto dalla Fisica italiana dopo MOSSOTTI e prima di FERMI.

ENRICO FERMI, (1901-1954).

Proprio alla fine del periodo considerato inizia il lavoro di FERMI che contribuisce con i suoi primi lavori all'elettrodinamica e alla relatività generale anche ritrovando risultati non pubblicati di RICCI, [F923]. Si dedica alla questione della validità dell'ipotesi ergodica con un importante lavoro che avrà grande influenza su lui stesso e sul quale ritornerà nei suoi ultimi anni con un ultimo grande contributo alla Fisica Matematica, [FPU55], e soprattutto porta in Italia echi della nuova Meccanica, [Fe923]. La sua successiva discussione degli invarianti adiabatici, [Fe923], è sviluppata per analizzare le regole di quantizzazione di BOHR-SOMMERFELD, e precede l'interesse per tali invarianti da parte di LEVI-CIVITA che li applicherà principalmente a problemi di Meccanica Celeste fornendo notevoli complementi alla teoria di ARMELLINI sul problema di due corpi a masse variabili. Certo è solo negli anni successivi ai primi anni venti FERMI si rivelerà come grande fisico teorico e sperimentale con contributi che andranno ben oltre la Fisica Matematica in senso stretto, [BB001].

Nell’Astronomia invece il 1860 segna quasi esattamente il momento in cui l’Astronomia diventa principalmente Astronomia di posizione e descrittiva, privilegiando gli aspetti osservazionali rispetto alla teoria della Meccanica Celeste. Non seguendo dunque le orme degli astronomi del primo 1800<sup>25</sup> e ricorrendo alla Meccanica in forma che, rispetto agli studi europei, appare poco tecnica e quale ausilio per analisi quantitative che seguono, senza innovazioni, metodi ben stabiliti quali, ad esempio, quelli di

OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI, (1791-1863).

La sua opera astronomica, come il suo contributo alla Fisica, fu invece assai innovativa e provvide importanti miglioramenti ai metodi del calcolo delle effemeridi, non disdegnando di entrare in elaborati calcoli teorici, e fornì stimolo ai Fisici Matematici che operarono in seguito (fu maestro di BETTI, come già detto). La sua opera postuma sulla determinazione delle orbite da tre osservazioni, [Mo866], è un’interessante memoria che corona una serie di ricerche, iniziata da giovane, [Mo817], che va confrontata con il problema simile trattato da GAUSS nel caso degli asteroidi: il lavoro di MOSSOTTI fu altamente apprezzato in Europa e da GAUSS in particolare. Purtroppo MOSSOTTI fu, per un lungo periodo, 1823-1840, esule (Inghilterra e poi Argentina e Corfù) a causa di motivi politici. E questo certo privò, almeno a Brera, una generazione di un maestro e di un esempio di atteggiamento verso la ricerca: gli effetti si sentiranno nei decenni successivi.

Fra gli studiosi di Meccanica Celeste del periodo intorno al 1860 si deve anche annoverare ANNIBALE DE GASPARIS, (1819–1892), che fu in Italia fra gli ultimi cultori, nel XIX secolo, di osservazioni astronomiche coniugate allo studio di problemi di Meccanica Celeste intesa nel senso moderno di teoria delle orbite e calcolo delle perturbazioni. Almeno fino ad ARMELLINI prevalsero gli indirizzi orientati verso osservazioni, accurate ma separate dalla teoria, principalmente rappresentati da SECCHI e SCHIAPARELLI.

ANGELO SECCHI, (1818–1878).

Padre Gesuita opera ancora in pieno vigore dopo il 1860 sebbene, dopo il 1970, fortemente ostacolato nel suo lavoro dal governo del Regno. Fisico e astrofisico illustre prima che astronomo ha lasciato, oltre alle opere più tecniche e specifiche, opere di ampio respiro e celebri in Europa, quali la sua monografia sul Sole, [Se870], accompagnata dalle altre due sulla Luna e sulle Stelle, o il volume sulla Fisica dalla Termodinamica all’Elettricità, dedicato alla tesi dell’unità delle forze fisiche, [Se874], di altissimo livello. Qui accanto ad una visione completamente atomistica della materia si trova una lucida e convinta teoria delle azioni a distanza basata sull’ “etere”, aperta però a possibili alternative.<sup>26</sup> In Astronomia si dedicò principalmente ad osservazioni (diresse l’osservatorio del Collegio Romano). Coordinò una missione per l’osservazione dell’eclisse di Sole del 1870 formalmente diretta da SANTINI la quale è interessante oltre che per i dati raccolti anche perchè ne resta il rapporto finale che fornisce un’idea di quali fossero gli atteggiamenti degli astronomi di allora: alcuni tecnici e meticolosi osservatori e altri più inclinati alla contemplazione, [Sa872]. Certo la sua scomparsa ancora in età relativamente giovane forse segnò un arresto dello sviluppo dell’Astrofisica nel senso che, molto dovendo a lui, si continuò ad affermare in Europa e Stati Uniti. Quanto all’Astronomia già con lui

<sup>25</sup> Quali, ad esempio, PLANA, che aveva affrontato in un’opera monumentale, [Pl832], questioni quali il moto della Luna con i metodi allora modernissimi della Meccanica Analitica, o MOSSOTTI che aveva elaborato miglioramenti al metodo di GAUSS di calcolo di elementi orbitali, [Mo866], o di SANTINI e alcuni altri i quali si impegnavano *sia* in osservazioni che *anche* in questioni teoriche. Si veda, di SANTINI, anche il classico e tuttora utile trattato di Astronomia elementare, [Sa830], in cui eseguiva in dettaglio il calcolo dei periodi dei moti fondamentali di Terra, Luna, pianeti, asteroidi e comete e che nel suo lavoro applicava sovente la Meccanica al calcolo di orbite perturbate.

<sup>26</sup> “*Lo scopo di quest’opera è quello di dimostrare come i fenomeni della Fisica comune si possono ridurre alle leggi generali del movimento della materia, ritenendo però che oltre la materia comune detta ponderabile si deve ammettere un’altra materia invisibile, e non soggetta a gravità, che dicesi Etere o imponderabile, i cui movimenti accompagnano in varie forme quelli della materia ponderabile.*”

divenne, in Italia, principalmente osservativa distaccandosi dalla Meccanica Celeste. Il maggior successore di astronomi quali PLANA, SANTINI, MOSSOTTI e SECCHI fu infatti

GIOVANNI SCHIAPARELLI, (1835–1910).

Potrebbe apparire strano che l'opera di SCHIAPARELLI non abbia fatto maggiore impressione sui Meccanici del tempo. Credo che fu così perché anche SCHIAPARELLI fu più un astronomo sperimentale che un teorico della Meccanica.<sup>27</sup> L'opera di SCHIAPARELLI è però vastissima: e fin dall'inizio è dedicata all'Astronomia di osservazione planetaria. Dapprima Marte è oggetto di attente e celebri ricerche che occupano i primi due volumi della sua *opera omnia*. I due volumi successivi sono dedicati alle comete, meteore e stelle cadenti. Nel quinto volume ci sono calcoli assai impegnativi di Meccanica Celeste, e simili ne doveva aver eseguiti anche in vari lavori precedenti (ma che sono restati dietro le quinte e ne rimangono solo i risultati): mi riferisco alla determinazione dei parametri orbitali del pianeta Esperia da lui scoperto nel 1861. Certo si trattava di calcoli standard, dopo GAUSS, PLANA e MOSSOTTI, e la vera scoperta consistè nel vedere e riconoscere di aver visto un nuovo astro errante. A SCHIAPARELLI si deve l'importante scoperta della lentezza del periodo di rotazione di Venere e della "librazione" di Mercurio (che oggi sappiamo essere una vera rotazione ma che ugualmente fu la scoperta di un'interessante anomalia che ne celava una ancora più sorprendente, ossia la risonanza 3 : 2). Oggi sono ancora di grande rilevanza i suoi scritti sull'Astronomia antica nei quali con grande acutezza discute l'Astronomia greca rivalutando di fatto la vituperata teoria degli epicicli e facendone chiaramente intendere la sua interpretazione in termini delle moderne serie di Fourier, [Sc936].

Anche LORENZO RESPIGHI (1824-1888), fu un astronomo dedito, soprattutto, alle osservazioni (nonostante avesse dato anche importanti contributi all'Analisi Matematica ed avesse avuto concreti interessi per la Meccanica (pendolo con attrito), negli anni precedenti il 1860, [Ar948]). Lo stesso si può dire di FRANCESCO PORRO, (1861–1937), cui si deve un moderno trattato di Astronomia notevole anche per la discussione quantitativa e stringata dei periodi astronomici principali, [Po920].<sup>28</sup>

Dunque SCHIAPARELLI e gli altri astronomi del tempo non svolsero il ruolo che ebbero in Europa TISSERAND, LE VERRIER, D'OPPOLLZER, GYLDÉN, M. LEVY e poi POINCARÉ; e la mancanza di una figura che svolgesse un ruolo simile generò una grave lacuna nello

<sup>27</sup> Una notizia sorprendente la tramanda PORRO nella commemorazione di G. DARWIN, astronomo e figlio di CHARLES DARWIN, nella quale commemora anche SCHIAPARELLI e POINCARÉ scrivendo a proposito di SCHIAPARELLI: "... non volle dedicarsi a leggere *Les Méthodes Nouvelles* del POINCARÉ". Non so quanto credito si possa dare a questa notizia, [Po913] (p.54), anche perché a p. 184 di [Bu913] PORRO sostiene di conoscere *Les Méthodes Nouvelles* dicendo a proposito "... ho seguito per un anno il corso che a Torino diede un grande matematico italiano, Vito Volterra, ed ho quindi veduto come, per lo scopo speciale dell'Astronomia, i risultati veramente notevoli del Poincaré avessero un'importanza puramente negativa": un commento che contrasta con la sostanza della commemorazione di POINCARÉ fatta da VOLTERRA e, in particolare, a proposito dell'influenza dei risultati di POINCARÉ sul contributo di DARWIN alla teoria della formazione dei satelliti "a spese del pianeta", p.596 della commemorazione.

<sup>28</sup> Va senz'altro ricordato per aver scritto nella commemorazione di DARWIN, che ivi confronta con SCHIAPARELLI e POINCARÉ, [Po913] (p.51), "... Osservo soltanto che nessun progresso delle scienze fisiche ed astronomiche ha avuto per fondamento essenziale una ricerca del Poincaré". Le affermazioni su POINCARÉ implicano anche un confronto fra la "razza" (*sic*, p. 53) italica e quella francese e continuarono in una polemica sullo stesso giornale fra PORRO e BURGATTI (e su un altro giornale MASCART). Dalla polemica, [Po913], emergono ancora interessanti considerazioni sull'interesse dell'opera di POINCARÉ che portano PORRO a concludere "*Che un astronomo francese non mi capisca, è naturale e legittimo: vorrei essere capito dagli astronomi italiani, ai quali non mancano modelli da imitare più consoni al genio della nostra razza*"; al tempo stesso appare chiaro che BURGATTI invece apprezzò appieno l'opera e la figura di POINCARÉ, [Bu913], mentre PORRO oltre a non aver afferrato l'interesse dell'opera di POINCARÉ mostra di avere una concezione assai ridotta del ruolo della Meccanica Celeste. Possono infine apparire strane le considerazioni di PORRO sulla razza: ma risultano forse premonitrici della sua evoluzione in "fascista dal 1919" e in partecipante alla Marcia su Roma (e sarebbe interessante trovare notizie sulle sue posizioni politiche dopo il 1926 che, se note, non sono riportate nella sua commemorazione). Si veda anche la precedente nota 27.

sviluppo della Meccanica (e non solo della Meccanica Celeste) non colmata dai pur fondamentali lavori sulla Meccanica Celeste di LEVI-CIVITA: il quale, si direbbe sulle orme di POINCARÉ, affronta e risolve brillantemente varie questioni *preparatorie* ad un'indagine sistematica della teoria perturbativa *senza* però, sorprendentemente, cimentarsi con essa.

E la lacuna non fu neppure colmata da

GIUSEPPE ARMELLINI, (1887–1958).

Inizia a lavorare solo verso la fine del periodo qui considerato e però dá contributi particolarmente rilevanti alla Meccanica Celeste proprio in questo scorcio di tempo. Dedicava attenzione all'Astronomia iniziando con un'acuta analisi del problema dei due corpi in cui il centro di attrazione abbia massa  $M(t)$  crescente stabilendo il risultato che condizione *necessaria e sufficiente* affinché la distanza fra i due corpi possa divenire più piccola di qualsiasi valore prefissato è che  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} > 0$ , [Ar11]: il tema delle masse variabili sarà centrale per i suoi interessi e su di esso ritornerà molto spesso estendendo risultati di vari autori, come nella rassegna [AR15] e nell'ambiziosa applicazione alla eccentricità di Marte.<sup>29</sup>

I suoi studi sono finalizzati a concrete applicazioni astronomiche: non rifugge da calcoli perturbativi anche impegnativi e in particolare calcola lo schiacciamento di Giove dalla rapidissima precessione degli apsi causata sul  $V$  satellite, ottenendo un risultato ed una precisione assai notevoli, [Ar912]. La deduzione viene elaborata come conseguenza di una teoria generale chiara, sia per contenuto matematico che astronomico-fenomenologico, delle perturbazioni finalizzata al calcolo di effemeridi, [Ar913]. Con lo stesso metodo analizza le perturbazioni del primo satellite di Nettuno concludendo che non possono essere dovute ad un secondo satellite e che ancora debbano ascrivere ad uno schiacciamento polare di Nettuno, [Ar918], pur non osservabile direttamente.

Il suo interesse per questioni teoriche lo porta a cimentarsi con il problema a  $n$  corpi: prima con  $n - 1$  fissi<sup>30</sup> e poi con il problema a 3 o più corpi mobili ove presenta qualche estensione del risultato di SUNDMAN, [Ar914]. Un suo contributo notevole, [Ar915], è l'osservazione che nel problema dei tre corpi le soluzioni regolarizzate di LEVI-CIVITA e SUNDMAN possono essere ottenute immaginando che i tre corpi siano sfere dure omogenee ed elastiche di raggio  $r$  nel limite in cui  $r \rightarrow 0$  per tutti gli intervalli di tempo finiti e prefissati ottenendo così un'interpretazione assai concreta della regolarizzazione: certo la deduzione è semplice corollario dei risultati di SUNDMAN ma, ciononostante, il lavoro è concettualmente moderno e (come LEVI-CIVITA ebbe a notare) molto interessante.

Gli studi sui satelliti di Giove e Nettuno e i suoi risultati sul problema a  $n$  corpi sono forse i suoi maggiori contributi per originalità e interesse.

Sulle comete prosegue la menzionata analisi di BURGATTI e SCHIAPARELLI riprendendo la questione del perchè non si osservino comete a orbita iperbolica, argomento trattato da vari autori a partire da LAPLACE.

## Conclusione.

Dal punto di vista odierno si deve riconoscere che la Fisica Matematica italiana (e quindi la Meccanica e la Meccanica Celeste in particolare), nel periodo 1860-1922 ha in generale mancato di inserirsi realmente nelle correnti di idee e risultati che prevalsero in Europa: personalità come LEVI-CIVITA e VOLTERRA appaiono come eccezioni. A riguardare le opere, pur monumentali, di quel periodo si vedono i germi di una provincialità che portò successivamente la Fisica Matematica italiana ad una grave crisi. Non

<sup>29</sup> Che però non è consistente con quanto si pensa oggi, cfr [La988].

<sup>30</sup> Estendendo notevolmente il risultato di VOLTERRA, [Vo899], sulla assenza di collisioni quando i corpi fissi siano allineati e il mobile abbia momento della quantità di moto non nulla rispetto all'asse e trova modo, [Ar913], di esprimere la soluzione via uno sviluppo in serie *convergente per tutti i valori del tempo*. Studia anche il caso in cui i punti fissi *non sono* allineati e collisioni sono possibili e vanno regolarizzate, [AR915].



ci sono che labili tracce dell'interesse per i grandi dibattiti che attraevano l'attenzione di MAXWELL, THOMPSON, BOLTZMANN, POINCARÉ, ERHENFEST, EINSTEIN, PLANCK, BOHR e segnavano la nascita di nuove concezioni e nuovi problemi coinvolgendo i maggiori matematici e fisici (PAINLEVÉ, GIBBS, HADAMARD, HILBERT, PICARD, ZERMELO, ...) e nell'Astronomia TISSERAND, LE VERRIER, GYLDÉN, POINCARÉ, PAINLEVÉ, LÉVY, HILL, NEWCOMB, LINDSTEDT, ADAMS, per citare solo alcuni. Anche l'attenzione verso l'elettromagnetismo si mantiene su un piano puramente tecnico pur fecondo di risultati per la teoria del potenziale e delle onde; un'eccezione sono le analisi di BELTRAMI, [Be886] (negative), e SOMIGLIANA, [So907] (possibiliste), sull'interpretazione delle equazioni delle equazioni di MAXWELL in termini di teoria dell'elasticità (riguardo all'etere) o le discussioni sulla massa elettromagnetica di LEVI-CIVITA, [LC907].

Nella Meccanica Statistica con l'eccezione di qualche lavoro di BETTI e BELTRAMI non si trovano tracce rilevanti di impegno e forse neppure di interesse: cosa che del resto è anche vera per i fisici del tempo benchè BOLTZMANN stesso fosse Accademico Linceo, se si fa eccezione di CANTONI.

Nella Meccanica Celeste i contributi importanti dati da LEVI-CIVITA furono la vera eccezione alla regola e l'Astronomia si indirizzò verso le osservazioni:<sup>31</sup> ma anche lui non si cimentò che marginalmente (anche se con risultati molto notevoli e riconosciuti nella Meccanica Analitica, nella teoria del problema dei tre corpi e dei moti quasi periodici) alle questioni sollevate da POINCARÉ o dalla nuova Meccanica quantica, sebbene fosse ad essa aperto e interessato a differenza di molti suoi contemporanei e successori, e pur contribuendo in modo essenziale allo sviluppo della teoria einsteiniana e allo sviluppo della Geometria differenziale. VOLTERRA diede contributi originali e rivoluzionari a vari problemi applicativi.

Altri (come PICCIATI, PADOVA, CESÁRO, LEVI) scomparvero prematuramente lasciando traccia indelebile ma un disegno incompiuto. La Meccanica scindendosi dall'Analisi e dalla Geometria si indirizzò, in Italia, a mete si rivelarono non molto feconde: verso lo studio di proprietà sempre più dettagliate, ma in fondo non molto interessanti, dei moti rigidi o della struttura dei continui.

La teoria delle perturbazioni, che POINCARÉ aveva sì magistralmente indicato come foriera di grandi novità, non venne realmente studiata in Italia e lo studio della Meccanica Celeste nel senso innovativo degli scienziati europei (e americani) venne sostanzialmente abbandonato. Tutto questo non fu un episodio passeggero ma, anche per cause "politiche", si protrasse ed influenzò l'evoluzione nel cinquantennio successivo ed fu certamente all'origine della progressiva emarginazione della Fisica Matematica dai curricula universitari che culmina oggi con l'immeritato disprezzo in cui versa la disciplina, ormai "abolita" in molti corsi di laurea perchè "inutile". La Fisica Matematica ricevette tuttavia nuova linfa dalla Fisica teorica grazie a FERMI e alla sua scuola e dall'Analisi Matematica grazie ai contributi di vari analisti.

In relazione a queste osservazioni ci si domanda a volte perchè, *"Nonostante la concentrazione a Roma di gran parte dei migliori matematici del momento (Roma fu di gran lunga la sede più prestigiosa nella prima metà del ventesimo secolo) non riuscì ad innescarsi quel processo che aveva portato alla creazione della scuola matematica pisana. Naturalmente non mancano matematici di valore che si formarono a Roma, grazie all'insegnamento dei maestri che vi operavano, ma il loro numero e la loro qualità non reggono il confronto con quelli che si erano formati con Betti e Dini tra il 1860 e il*

---

<sup>31</sup> Un esempio estremo di Astronomia osservazionale lo si trova nella relazione del gruppo diretto da SANTINI e SECCHI sull'eclisse di Sole del 1870 nella quale trovano posto asciutte relazioni tecniche di alcuni e quella di ALESSANDRO SERPIERI, (1823–1855), nel cui rapporto si legge *"mi si permetta di dire che io sentiva profondamente l'alta bellezza e poesia della mia stazione, imbandierata a festa ..."* (p. 199) e poi *"Il mare era tinto in verde grigio, e avea perduta la sua trasparenza. E via via sempre più prese un aspetto vitreo quasi rendendo immagine di materia solida. Le onde che balzavano e spumavano sul lido davano delle ombre di un bellissimo turchino. Nella totale oscurità alcuno paragonò la tinta del mare al verde nero di bottiglia"*, [Sa872].

1900: il “miracolo” pisano non si ripete.”

(<http://www.math.unifi.it/matematicaitaliana/pannelli/XII.html>)

Ma forse la domanda è retorica, o ha una risposta ovvia e legata alle tragiche vicissitudini politiche (e conseguentemente accademiche) che seguirono il 1922. O forse il problema esisteva già prima e gli eventi politici furono irrilevanti? Io penso che non lo furono. È vero che il giuramento di fedeltà e le leggi razziali vennero molto dopo: ma è anche vero che, assai prima delle leggi sulla razza, nelle Università e nella ricerca persone come GUGLIELMO MARCONI, quale Presidente di una commissione riunita allo scopo, assentivano alla decisione di estromettere VOLTERRA dalle istituzioni di cui faceva parte contribuendo alla formazione di un clima di sospetto e timore.

E mal si vede come in quel clima si potesse sviluppare una scuola in cui LEVI-CIVITA e molti altri potessero raccogliere i frutti del lavoro svolto negli anni precedenti il 1922 influenzando sulle giovani generazioni secondo i criteri di libertà che informano le scelte accademiche e scientifiche nelle società più sviluppate.

Si dirà: “ma non si è comunque detto di una provincialità della Meccanica italiana?”: in realtà l’Italia era, ancora nel 1922, un paese giovane emerso da un passato in cui era diviso e debole. È necessario tempo per la formazione di scuole solide: queste possono realizzarsi in tempi brevi solo per fluttuazioni casuali (come il “miracolo” di Pisa) altrimenti richiedono un periodo di maturazione lungo: nella Fisica Matematica erano apparsi LEVI-CIVITA e VOLTERRA ed erano nel pieno del loro sviluppo scientifico, e già FERMI muoveva i primi passi: ma i primi due furono emarginati (insieme a molti altri) e anche il terzo fu infine costretto ad abbandonare l’Italia. Si stabilì un clima autoritario e poco propizio alla ricerca per chi fosse sensibile a quanto avveniva e non meraviglia che i germi della provincialità prosperassero. Nella culturalmente potente Germania occorre assai meno perché si sviluppasse il processo inverso e, addirittura, la Scienza cessò di parlare tedesco nel breve volgere di qualche mese, [An003].

Oggi si può sperare, anche per la facilità di movimenti e di contatti con altre scuole, in un’evoluzione positiva in cui la ricerca in Meccanica possa di nuovo arrivare al respiro, che non ebbe che in rari momenti del periodo qui considerato, raggiunto attraverso personalità quali BETTI, BELTRAMI, LEVI-CIVITA, VOLTERRA. La teoria delle stringhe promette un nuovo collegamento ideale con la Matematica più astratta e si rinnoverà forse (?) il felice momento in cui fisici come BETTI e VOLTERRA davano importantissimi contributi alle matematiche pure o matematici come BELTRAMI e LEVI-CIVITA davano altrettanto importanti contributi alle scienze fisiche.

Non si devono però neppure nascondere le gravi difficoltà incombenti dovute ad una direzione della ricerca da parte di persone di calibro ben diverso da BRIOSCHI, BELTRAMI o VOLTERRA. I quali ignorano che la vivacità della ricerca in Fisica Matematica si fondò (ed è solo un esempio e per nulla isolato) su persone come RICCI-CURBASTRO che per abilitazione all’insegnamento nella scuola secondaria presentò nel 1875 una dissertazione sopra una generalizzazione di un problema di Riemann sulle funzioni ipergeometriche, o nel 1877 riassunse sul Nuovo Cimento le leggi ponderomotrici dell’elettromagnetismo compendiando e collegando lavori di NEUMANN, RIEMANN, CLAUDIUS, MAXWELL, BETTI e guadagnò con ciò appena una borsa di perfezionamento all’estero e, al suo ritorno, solo un posto di assistente straordinario di Calcolo: una carriera ed una serie di scelte che oggi sarebbe considerata di scarso interesse.

*Ringrazio il prof. G. Foderà per l’invito a presentare una relazione al convegno Cento anni di Astronomia in Italia, 1860–1960, all’Accademia dei Lincei, Roma, 26–28 marzo 2003 che mi ha dato modo di iniziare lo studio (necessariamente preliminare) di questo interessante periodo della scienza in Italia. E per avermi messo al corrente della polemica su Poincaré che ho qui citata in [Po913], [Bu913].*

### **Bibliografia: Opere scelte**

- Armellini, G.:* *Selecta. Memorie e note*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1974.
- Beltrami, E.:* *Opere Matematiche di E. Beltrami*, Hoepli, Milano, 1902, Volumi 1-4.
- Betti, E.:* *Opere*, Hoepli, Milano, 1913. Vol. 1-2.
- Cesáro, E.:* *Opere scelte*, Cremonese, Roma, 1965. Volumi 1<sub>1</sub>, 1<sub>2</sub>, 2.
- Cremona, L.:* *Opere Matematiche*, Hoepli, Milano, 1914. Volumi 1-3.
- Somigliana, C.:* *Memorie scelte*, Lattes, Torino, 1936.
- Brioschi, F.:* *Opere matematiche di Francesco Brioschi*, Hoepli, Milano, 1901. Volumi 1-5.
- Burgatti, P.:* *Memorie scelte*, Zanichelli, Bologna, 1951.
- Levi-Civita, T.:* *Opere Matematiche. Memorie e note*, Zanichelli, Bologna, 1956. Volumi 1-6.
- Levi, E.E.:* *Opere*, Cremonese, Roma, 1959. Volumi 1-2.
- Maggi, G.A.:* *Selecta. Raccolta di scritti matematici dal 1880 al 1931*, E.S.T., Milano, 1932.
- Siacci, F.:* *Scritti scientifici*, Provveditorato dello Stato, Roma, 1928, Volumi 1-2.
- Schiaparelli, G.V.:* *Le opere di Schiaparelli*, Hoepli, Milano, 1929. Volumi 1-6.
- Mossotti, O.F.:* *Scritti*, Domos Galilaeana, Pisa, 1942-1956. Volumi 1,2<sub>1</sub>,2<sub>2</sub>.
- Tedone, O.:* *Opere scelte*, Cremonese, 1956.
- Somigliana, C.:* *Opere scelte*, Lattes, Torino, 1936.
- Volterra, V.:* *Opere Matematiche. Memorie e note*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1954. Volumi 1-5.
- Fermi, E.:* *Note e Memorie*, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962. Vol. 1-2.
- Peano, G.:* *Opere scelte*, Cremonese, Roma, 1959. Volumi 1-4.

### **Bibliografia: Articoli e monografie**

Con il simbolo  $OP-n$  si indica il volume  $n \in \mathbb{Z}_+^1$  della raccolta di “Opere” dell'autore citato.

- [Mo817] Mossotti, O.F.: *Nuova analisi del problema di determinare le orbite dei corpi celesti*, note nelle: *Appendici alle Effemeridi Astronomiche*, Milano, 1817/18/19. OP-1: p. 1–166.
- [Pl832] Plana, G.: *Théorie du mouvement de la Lune*, Torino, 1832.
- [Ch846] Chió, F.: *Ricerche sopra la serie di Lagrangia*, p. 1–57, Pomba, Torino, 1846.
- [Sa830] Santini, G.: *Elementi di Astronomia con le applicazioni alla Geofisica, nautica, gnomonica e cronologia*, Tipografia del Seminario, Padova, 1830.
- [Ch847] Chelini, D.: *Principio delle velocità virtuali*, Raccolta Scientifica di Fisica e Matematiche, **III**, 145–152, 1847.
- [Ch847] Chelini, D.: *Effemeride della cometa di Hind*, Raccolta scientifica di Fisica e di Matematiche, **III**, 115–117, 1847.
- [Mo851] Mossotti, O.F.: *Lezioni di Meccanica Razionale*, s.e., Firenze, 1851.
- [Ch859] Chelini, D.: *Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secondo i concetti di Poinsot*, *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, **X**, 583–620, 1859.
- [Ch860] Chelini, D.: *Elementi di Meccanica Razionale con appendice sui principi fondamentali delle matematiche*, Legnani, Bologna, 1860.

[Ch861] Chelini, D.: *Sulla legge onde un ellissoide eterogeneo propaga la sua attrazione*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, **I** (serie II), 1861.

[Br861] Brioschi, F.: *Développements relatifs au §3 des recherches de Dirichlet sur un problème d'hydrodynamique*, Journal für reine und angewandte Mathematik, **LIX**, 63–73, 1861. OP-5: 293.

[Be863] Betti, E.: *Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton e sue applicazioni alla elettricità statica*, 1863, Op-2: 45.

[Be866] Betti, E.: *Sopra la teoria della capillarità*, Annali delle università toscane, **IX**, 5–24, 1866. OP-2: 161.

[Bo866] Boltzmann, L.: *Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", ed. F. Hasenöhrl, vol. 1, p. 9–33, reprinted by Chelsea, New York.

[Mo866] Mossotti, O.F.: *Sopra la determinazione delle orbite dei corpi celesti per mezzo di tre osservazioni*, OP-2<sub>1</sub>: 345.

[Ca867] Cantoni, G.: *Su alcune condizioni fisiche dell'affinità e sul moto browniano*, Il Nuovo Cimento, **27**, 156–167, 1867.

[Be868] Betti, E.: *Sopra la determinazione della temperatura nei corpi solidi omogenei*, Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), **I**, 165–190, 1868. OP-2: 216.

[Be868] Beltrami, E.: *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Giornale di matematiche, **VI**, 284–322, 1868. OP-1: 374.

[Se870] Secchi, A.: *Le Soleil. Exposé des principales découvertes modernes sur la structure de cet astre, son influence dans l'Univers et ses relations avec les autres corps célestes*, Gauthiers-Villars, Parigi, 1870.

[Pa871] Padova, E.: *Sul moto di un ellissoide fluido e omogeneo*, Annali della Scuola Normale di Pisa, **I**, 1–88, 1871.

[Be872] Betti, E.: *Teoria dell'elasticità*, serie di articoli sul Nuovo Cimento (1972–1973). OP-2: 291.

[Sa872] Santini, G.: *Rapporti sulle osservazioni dell'eclisse totale di Sole*, Lao, Palermo, 1872.

[Do873] Dorna, A.: *Lezioni di Meccanica Razionale*, Arnaldi, Torino, 1873.

[Be874] Beltrami, E.: *Ricerche sulla cinematica dei fluidi*, Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna, 1871-1874. OP-2: 202–379.

[Se874] Secchi, A.: *L'unità delle forze fisiche. Saggio di filosofia naturale*, Treves, Milano, 1874.

[Cr875] Cremona, L. et al.: *Relazione intorno ad una memoria del Sig. Colonnello Pietro Conti avente titolo "Sulla resistenza d'attrito" della Commissione composta da Betocchi, Baserna, Beltrami e Cremona*, Atti dell'Accademia dei Lincei, Memorie, **II**, 3–15, 1874/75. OP-3: 369–383.

[Si877] Siacci, F.: *Della rotazione dei corpi liberi*, Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), **III**, 1877. Op-2: 171.

[Be878] Beltrami, E.: *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse*, Rendiconti del Regio Istituto Lombardo, **XI**, 13 p., 1878.

[Ca879] Castigliano, A.: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastique et ses applications*, A.F. Negro, Torino, 1879.

[Be880] Beltrami, E.: *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, p. 573–616, 1880. OP-3: 269

[Be880] Betti, E.: *Sopra l'equilibrio di una massa di gas rarefatto isolata nello spazio*, Il Nuovo Cimento, **7**, 26–33, 1880.

[Vo881] Volterra, V.: *Sul potenziale di un'ellissoide omogenea sopra se stessa*, Il Nuovo Cimento, **IX**, 221–229, 1881. OP-1: 1.

[Be882] Beltrami, E.: *Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizzati*, Rendiconti del Regio Istituto Lombardo, **XV**, 400–407, 1882. OP-3: 413.

[Be882] Beltrami, E.: *Sull'equilibrio delle superfici flessibili e inestendibili*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, **III**, 217–265, 1882. OP-4: 420.

[Vo883] Volterra, V.: *Sopra alcuni problemi di teoria del potenziale*, Annali della Scuola Normale di Pisa, **III**, 207–270, 1882. OP-1: 140.

[Ce883] Cesàro, E.: *Sur diverses questions d'arithmétique*, Mémoires de la Société royale des sciences de Liège, **10**, 1883. Op-1<sub>1</sub>: 10.

[Vo884] Volterra, V.: *Sopra un problema di elettrostatica*, Nuovo Cimento, **XVI**, 49–57, 1884. OP-1: 188.

[Bo884] Boltzmann, L.: *Über die Eigenschaften monzyklischer und anderer damit verwandter Systeme*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", ed. F.P. Hasenöhr, vol. III, p. 122–152, Chelsea, New York, 1968, (reprint).

[Ma884] Maggi, G.A.: *Sopra l'equilibrio delle superfici flessibili e inestendibili*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo, **XVII**, 1884. OP: 37.

[Be885] Beltrami, E.: *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche*, Rendiconti del Regio Istituto Lombardo, **XVII**, p. 9, 1884.

[Pa885] Padova, E.: *Sul moto di rotazione di un corpo rigido*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 38–47, 1885.

[Po885] Poincaré, H.: *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, **I**, 1885. Reprinted in *Oeuvres Complètes*, **1**, lavoro n. 57: see p. 156 of the paper n. 57, Gauthiers–Villars, Paris 1934–1954, and in *Mémoire sur les courbes définies par une équations différentielle*, Ch. XV, p. 243, Gabay, 1993.

[Be886] Beltrami, E.: *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, **VII**, 1–38, 1886. OP-4: 190.

[LC886] Levi-Civita, T.: *Sulle rasformazioni delle equazioni dinamiche*, Annali di Matematica, **XXIV**, 255–300, 1896. OP-1: 207.

[Vo887] Volterra, V.: *Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabile complessa*, Rendiconti della Accademia dei Lincei, **III**, 281–287, 1887. Op-1: 329.

[Vo887] Volterra, V.: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, **III**, 97–105, 1887. OP-1: 294.

[Vo887] Volterra, V.: *Sopra le funzioni dipendenti da linee*, Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, **III**, 225–230, 1887. OP-1: 315.

[Ce887] Cesàro, E.: *Nouveaux Annales de Mathématiques*, **6**, 36–43, 1887. OP-2: 400.

[Be888] Betti, E.: *Sopra l'entropia di un sistema newtoniano in moto stabile*, Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, **IV**, 113–115, 1888. OP-2: 488.

[Br866] Brioschi, F.: Serie di lavori sull'idraulica. Pubblicati su "Il Politecnico" fra il 1866 e il 1873. OP-5: 409–510.

[Vo889] Volterra, V.: *Sur une généralization de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire*, Acta Mathematica, **12**, 233–286, 1889. OP-1: 363.

[Be889] Beltrami, E.: *Lettera a Cesàro*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, **III**, 67–79, 1889. OP-4: 320.

[Be889] Beltrami, E.: *Un precursore italiano di Legendre e Lobachevsky*, Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, **V**, 411–448, OP-4: 348.

[Ce889] Cesàro, E.: *Sulle variazioni di volume nei corpi elastici*, Rendiconti della Accademia dei Lincei, **V**, 259–264, 1889.

[Vo890] Volterra, V.: *Sopra una estensione della teoria di Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni*, Rendiconti della Accademia dei Lincei, **VI**, 127–138, 1890. Op-1: 464.

[Vo891] Volterra, V.: *Sopra le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica*, Nuovo Cimento, **XXIX**, 147–154, 1891. OP-1: 496.

[Vo892] Volterra, V.: *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents*, Acta Mathematica, **16**, 153–215, 1892. OP-1: 514.

[Si892] Siacci, F.: *Meccanica Razionale*, Torino, 1892.

[Te893] Tedone, O.: *Sul moto di un fluido contenuto in un involucro ellissoidico*, Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, **II**, 123–130, 1893. OP: 1.

[Vo894] Volterra, V.: *Sur les vibrations des corps elastiques isotropes*, Acta Mathematica, **18**, 161–232, 1894. OP-2: 19.

[Vo894] Volterra, V.: *Esercizi di Fisica Matematica*, Rivista di Matematica, **IV**, 1–14, 1894. OP-2: 74.

[Vo895] Volterra, V.: *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre*, Astronomische Nachrichten, **138**, 33–52, 1895. OP-2: 87.

[Vo896] Volterra, V.: *Replica ad una nota del Prof. Peano*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **V**, 4–7, 1896. OP-2: 213.

[Pe895] Peano, G.: *Il principio delle aree e la storia di un gatto*, Rivista di matematiche, **V**, 31–32, 1895. OP-3: 285.

[Pe895] Peano, G.: *Sopra lo spostamento del polo e della Terra*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, **XXX**, 515–523, 1895. OP-3: 288.

[Pe895] Peano, G.: *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **IV**, 280–282, 1895. OP-3: 304.

[Pe896] Peano, G.: *Sul moto del polo terrestre*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **V**, 163–168, 1896. OP-3: 309.

[Te897] Tedone, O.: *Sulle vibrazioni dei corpi solidi omogenei e isotropi*, Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, **XLVII**, 181–258, 1897. OP: 16.

[Vo897] Volterra, V.: *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti*, Annali di Matematica pura e applicata, **XXV**, 139–178, 1897. OP-2: 279.

[Vo897] Volterra, V.: *Sulla scarica elettrica nei gas e sopra alcuni fenomeni di elettrolisi*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **VI**, 389–401, 1897. OP-2: 317.

[Vo897] Volterra, V.: *Un teorema sugli integrali multipli*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, **XXXII**, 859–868, 1897. OP-2: 329.

[Vo898] Volterra, V.: *Sul fenomeno delle “seiches”*, Conferenza al congresso SIF di Torino del 1898, OP-2: 370.

[Vo898] Volterra, V.: *Sur la théorie des variations des latitudes*, Acta Mathematica, **22**, 201–357, 1898. OP-2: 452.

[Vo899] Volterra, V.: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), 1899, OP-2: 383.

[Vo899] Volterra, V.: *Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del Prof. Mittag-Leffler*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, **XXXIV**, 492–494, 1898–99. OP-3: 591.

[RL900] Levi-Civita, T., Ricci-Curbastro, G.: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*. Mathematische Annalen, **IV**, 125–201, 1900. OP-1: 479.

[Ma901] Maggi, G.A.: *Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica applicate ai sistemi anolonomi*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **X**, 1901. OP: 64.

[Te902] Tedone, O.: *Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo*, Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, **VIII**, 129–180, 1902. OP: ??.

[Bi902] Bianchi, L., Dini, U., Cerruti, V., D'Ovidio, E., Veronese, G.: *Relazione sul concorso al premio reale, del 1901, per la Matematica*, Rendiconti delle adunanze solenni dell'Accademia dei Lincei, 142–151, 1902.

[LC901] Levi-Civita, T.: *Sul massimo cimento dinamico dei sistemi elastici*, Il Nuovo Cimento, **II**, 188–196, 1901. OP-2: 145.

[LC901] Levi-Civita, T.: *Sopra la determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **X**, 1–9, 1901 e **X**, 35–41, 1901<sub>1</sub>. OP-2: 87.

[LC901] Levi-Civita, T.: *Sulla resistenza dei mezzi fluidi*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **X**, 3–9, 1901<sub>2</sub>. OP-2: 129.

Atti dei convegni Lincei, **217**, 259–300, 2006.

[Ce901] Cesáro, E.: *Sopra un'equazione funzionale trattata da Beltrami*, Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli, **7**, 284–289, 1901. OP-2: 432.

[Ce902] Cesáro, E.: *Intorno ad una limitazione di costanti nella teoria analitica del calore*, Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli, **8**, 31–38, 1902.

[LC903] Levi-Civita, T.: *Condition de choc dans le problème restreint des trois corps*, Comptes rendu de l'Académie des Sciences de Paris, **CXXXV**, 221–223, 1903. OP-2: 275.

[LC904] Levi-Civita, T.: *Sopra l'equazione di Kepler*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XIII**, 260–268, 1904. OP-2: 321.

[LC904] Levi-Civita, T.: *Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **XIII**, 173–228, 1904. OP-2: 339.

[Ma904] Marcolongo, R.: *Teoria matematica dell'elasticità*, Hoepli, Milano, 1904.

[Vo904] Volterra, V.: *Note on the application of the method of images to problems of vibrations*, Proceedings of the London Mathematical Society, **2**, 327–331, 1904. OP-3: 55.

[Si905] Siacci, F.: *Sul principio dei lavori virtuali*, Rendiconti della Regia Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, **11**, 1905. OP-2: 601.

[Ma905] Maggi, G.A.: *Sull'interpretazione del nuovo teorema di Volterra sulla teoria dell'elasticità*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XIV**, 1905. OP: 255.

[Ce905] Cesáro, E.: *Remarques sur la courbe e Von Koch*, Atti della Accademia delle Scienze di Napoli, **12**, 1905. OP-2: 464.

[Ce905] Cesáro, E.: *Fondamento intrinseco della pangeometria*, Memorie dell'Accademia dei Lincei, **5**, 155–183, 1905. OP-2: 341.

[LC906] Levi-Civita, T.: *Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi*, Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, **LXV**, 1149–1158, 1905-06. OP-2: 505.

[Ce906] Cesáro, E.: *Sulle formole del Volterra fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche*, Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli, **12**, 311–321, 1906.

[So906] Somigliana, C.: *Sulla teoria Maxwelliana dell'azione a distanza*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XVI**, 1907. OP: 325.

[LC907] Levi-Civita, T.: *Scie e legge di resistenza*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **XXIII**, 1–37, 1907. OP-2: 519.

[LC907] Levi-Civita, T.: *Sur le mouvement de l'électricité sans liaisons ni forces extérieures*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **CXLV**, 417–420, 1907. OP-2: 583.

[LC907] Levi-Civita, T.: *Sulla massa elettromagnetica*, Nuovo Cimento, **XIV**, 387–412, 1907. OP-2: 587.

[LC907] Levi-Civita, T.: *Sullo sviluppo delle funzioni implicite*, **XVI**, 2–12, 1907. OP-2: 573.

[LC907] Levi-Civita, T.: *Sulle onde progressive di tipo permanente*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XVI**, 777–790, 1907. OP-2: 615.

[Le907] Levi, E.E.: *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **XVI**, 1907. OP-2: 28.

[So907] Somigliana, C.: *Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*, Serie di note. OP: 273,298,307.

[Vo907] Volterra, V.: *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, **XXIV**, 401–518, 1907. OP-3: 153.

[Vo908] Volterra, V.: *Drei vorlesungen über neuere fortschritte der mathematischen physik*, Archiv der mathematik und Physik, **XXI**, 97–181, 1908. OP-3: 389.

[Pe908] Peano, G.: *Sul libro V di Euclide*, Bollettino di matematiche (Conti), Bologna, **V**, 87–91, 1908. OP-3: 377.

[Ca911] Castellano, F.: *Lezioni di Meccanica Razionale*, G.U. Cassone, Torino, 1911.

- [LC910] Levi-Civita, T.: *Sur les équations générales du mouvement d'un corpuscule dans un champ magnétique et un champ électrique superposés*, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, **XXXI**, 3–7, 1910. OP-3: 199.
- [LC911] Levi-Civita, T.: *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le mouvement moyen du noeud lunaire*, Annales de l'École Normale Supérieure, **28**, 325–376, 1911. OP-3: 205.
- [LC911] Levi-Civita, T.: *Estensione ed evoluzione della Fisica Matematica (nell'ultimo cinquantennio, con speciale riguardo al contributo italiano)*, Atti della Società italiana per il progresso delle scienze, **V**, 237–254, 1911. OP-3: 275.
- [Le911] Levi, E.E.: *Sur les équations différentielles périodiques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **153**, 1911. OP-1: 224.
- [Ar911] Armellini, G.: *Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XX**, 682–687, 1911. OP-1: 107.
- [LC912] Levi-Civita, T.: *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **XXXII**, 354–374, 1907. OP-3: 294.
- [Vo912] Volterra, V.: *Sulle temperature nell'interno delle montagne*, **IV**, 111–126, 1912. OP-3: 471,
- [Vo912] Volterra, V.: *L'applicazione del calcolo ai fenomeni di eredità*, OP-3: 554–568.
- [Vo912] Volterra, V.: *Sur les équations intégral-différentielles et leurs applications*, Acta mathematica, **35**, 295–356, 1912. OP-3:487.
- [Bu912] Burgatti, P.: *Osservazioni sul moto dei giroscopi*, Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, **IX**, 281–296, 1911-12.
- [Ar912] Armellini, G.: *Determinazione matematica dello schiacciamento polare di Giove*, Rendiconti della Accademia dei Lincei, **XXI**, 334–341, 1912. OP-1: 285.
- [Bu913] Burgatti, P.: *Giudizi su Poincaré*, Rivista di Astronomia e Scienze affini (Bollettino della Società Astronomica Italiana), **VII**, p. 180–182, 1913. Seguito da replica di Porro, p. 182–184.
- [Vo913] Volterra, V.: *Sui fenomeni ereditari*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XXII**, 529–539, 1923.
- [Ar913] Armellini, G.: *Teoria delle perturbazioni (applicazioni a satelliti, comete e pianeti)*, Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), **XVIII**, 3–41, 1913. OP-1: 201.
- [Ar913] Armellini, G.: *Sul moto di un punto attratto da più centri fissi*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XXII**, 70–76, 1913. OP-1: 71.
- [LC913] Levi-Civita, T.: *Nuovo sistema canonico di elementi ellittici*, Annali di Matematica, **XX**, 1–17, 1913. OP-3: 341.
- [Po913] Porro, F.: *Giorgio Darwin, e Un'ultima parola su Enrico Poincaré e sui suoi apologisti*, Rivista di Astronomia e Scienze affini (Bollettino della Società Astronomica Italiana), **VII**, p. 50–64 e p. 327–334, 1913.
- [Ar914] Armellini, G.: *Un théorème général sur le problème des  $n$  corps*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **158**, 680–684, 1914. OP-1: 43.
- [Vo913] Volterra, V.: *Sulle equazioni alle derivate funzionali*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XXIII**, 393–399, 1914. OP-4: 5.
- [Ar915] Armellini, G.: *Sul moto di un punto attratto da più punti fissi*, Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), **XIX**, 1–23, 1915. OP-1: 84.
- [Ar915] Armellini, G.: *Estensione della soluzione del Sundman dal caso di corpi ideali, al caso di sferette elastiche omogenee*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XXIV**, 184–190, 1915.
- [Bu915] Burgatti, P.: *Osservazioni sull'origine delle comete*, Atti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, **2**, 3–10, 1914-15. OP-1: ???.
- [Ar915] Armellini, G.: *Il problema dei due corpi di massa variabile*, Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), **XIX**, 3–24, 1915. OP-1: 121.
- [Vo916] Volterra, V.: *Metodi di calcolo degli elementi di tiro per artiglieria aeronautica*, Rendiconti Istituto centrale aeronautico, **V**, 1916. OP-4: 200–248.



[Vo916] Volterra, V.: *Teoria delle potenze e dei logaritmi delle funzioni di composizione*, Memorie dell'Accademia dei Lincei, **XI**, 167–250, 1916. OP-4: 118.

[Ar916] Armellini, G.: *Sopra un'ipotesi del Pickering relativa alla frequenza degli afeli delle orbite cometarie nelle vicinanze dell'antiapice*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XXV**, 622–627, 1916. OP-1: 273.

[LC916] Levi-Civita, T.: *Sopra due trasformazioni canoniche desunte dal moto parabolico*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XXV**, 446–458, 1916. OP-3: 573.

[LC917] Levi-Civita, T.: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **XLII**, 173–215, 1917. OP-4: 1.

[LC917] Levi-Civita, T.: *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XXVI**, 381–391, 1917. OP-4: 47.

[Ma919] Marcolongo, R.: *Il problema dei tre corpi da Newton ai nostri giorni*, Hoepli, Milano, 1919.

[LC918] Levi-Civita, T.: *Sur la regularization du problème des trois corps*, Acta Mathematica, **42**, 99–144, 1918. OP-4: 211.

[Ar918] Armellini, G.: *Sur les perturbations du satellite de Neptune*, Mémoires du Bulletin astronomique, **XXXV**, 97–101, 1918. OP-1: 259.

[Vo920] Volterra, V.: *Functions of composition*, The Rice Institute Pamphlet, **VII**, 181–251, 1920. OP-4: 312.

[Vo920] Volterra, V.: *Sur l'enseignement de la Physique Mathématique et de quelques points d'analyse*, Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens, p. 81–97, 1920. OP-4: 370.

[Vo921] Volterra, V.: *Relazione sull'insegnamento della dinamica nelle scuole industriali*, Rivista d'ottica e meccanica di precisione, **1**, 4–31, 1921. OP-4: 478.

[Ar920] Armellini, G.: *Osservazioni sopra le comete secolari*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, **XXIX**, 183–186, 1920. OP-1: 279.

[Po920] Porro, F.: *Trattato di Astronomia*, Zanichelli, 1920.

[Fe923] Fermi, E.: *Sul peso dei corpi elastici*, Memorie dei Lincei, **14**, 114–124, 1923. OP-1: 61.

[Fe923] Fermi, E.: *Beweis, dass ein mechanisches normalsystem im allgemeinen quasi-ergodisch ist*, Physikalische Zeitschrift, **24**, 261–265, 1923. OP-1: 79.

[Fe923] Fermi, E.: *Il principio delle adiabatiche ed i sistemi che non ammettono coordinate angolari*, Nuovo Cimento, **25**, 171–175, 1923. OP-1: 88.

[LC925] Levi-Civita, T.: *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, Stock, Roma, 1925.

[LC925] Levi-Civita, T.: *Sulla stabilità delle lavagne a cavalletto*, Periodico di Matematiche, **IV**, 59–73, 1925. OP-4: 333.

[LC925] Levi-Civita, T.: *Commemorazione del Socio Nazionale Prof. G. Ricci-Curbastro*, Memorie dell'Accademia dei Lincei, **I**, 556–564, 1925. OP-4: 391.

[Bu935] Burgatti, P.: *Sopra un metodo per studiare l'azione prodotta da un mezzo resistente sul moto dei corpi celesti*, Rendiconti delle sessioni della Regia Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 3–12, 1934–35.

[Sc936] Schiaparelli, G.: *Scritti sulla storia dell'astronomia antica*, Zanichelli, Bologna, 1926.

[Ar948] Armellini, G.: *Lorenzo Respighi nel sessantesimo della morte*, Quaderni di Roma, 1948. OP-1: 483.

[FPU55] Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S.: *Studies of nonlinear problems*, Los Alamos report LA-1940, 1955, printed in E., Fermi, *Collected papers*, p. 978–988, vol. **2**, 1965.

[Ru969] Ruelle, D.: *Statistical Mechanics*, Benjamin, 1969.

[Pa982] Pais, A.: *Subtle is the Lord*, Oxford, 1982.

Atti dei convegni Lincei, **217**, 259–300, 2006.

[La988] Laskar, J.: *Secular evolution of the solar system over 1 million years*, Astronomy and astrophysics, **198**, 341–362, 1988.

[BB098] Brezis, H., Browder, F.: *Partial differential equations in the 20-th century*, Advances in Mathematics, **135**, 223–262, 1998.

[BGT998] Boi, L., Giacardi, L., Tazzioli, R.: *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère*, Blanchard, Paris, 1998.

[BB001] Bernardini, C., Bonolis, L.: *Conoscere Fermi, nel centenario della nascita*, Compositori, Bologna, 2001.

[An003] Antoci, S.: *Quando la Fisica parlava tedesco*, INDAM-CNR, Firenze, 2003.

[CP005] Celletti, A., Pinzari, G.: *Four classical methods for determining planetary elliptic elements: a comparison*, Celestial Mechanics and dynamical Astronomy, **93**, 1–52, 2005.

#### Commemorazioni

*Domenico Chelini*: (1802–1878, Beltrami), *Della vita e delle opere di Domenico Chelini*, estratto dal volume in commemorazione di Domenico Chelini, Hoepli, Milano, 1881.

*Ottaviano Fabrizio Mossotti*: (1791–1863, Betti) *Giornale di matematiche ad uso degli studenti*, **I**, 92, 1863. OP-2: 154.

*Enrico Betti*: (1823–1892, Volterra), *Nuovo Cimento*, **32**, 5–7, 1892. OP-1: 600.

*Eugenio Beltrami*: (1835–1900, Cremona), OP-3: 470.

*Giuseppe Picciati*: (1868–1908, Levi-Civita) *Nuovo Cimento*, **XV** 363–368, 1908. OP-3: 15.

*Valentino Cerruti*: (1850–1909, Levi-Civita) *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, **XVIII**, 565–575, 1909. OP-3: 135.

*Gregorio Ricci-Curbastro*: (1853–1925, Levi-Civita) *Memorie dell'Accademia dei Lincei*, **I**, 556–564, 1925. OP-4: 391.

*Henri Poincaré*: (1854–1912, Volterra) OP-3: 578.

*Lorenzo Respighi*: (1824–1888, Armellini) *Quaderni di Roma*, 1948. OP-1: 483.

*Francesco Porro de Somenzi*, (1861–1937, Barbieri), in *Annuario dell'Università di Genova*, p. 397–399, 1936–1937.