G.M.E.L.
Actualités Mathématiques
Actes du 6 me Congrès
de Mathématiciens de
Langue Latine
Gauthier-Villars, Paris, 1982

P. 153-166
Ed. P. Pier

~~90~~
22

QUELQUES REMARQUES SUR LA NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES POUR LES SYSTÈMES HAMILTONIENS QUASI-INTÉGRABLES

GIOVANNI GALLAVOTTI (*)
Università di Roma

QUELQUES REMARQUES SUR LA NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES POUR LES SYSTÈMES HAMILTONIENS QUASI-INTÉGRABLES

GIOVANNI GALLAVOTTI (*)
Università di Roma

Dans les "Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste" Poincaré considéra en général le système d'équations canoniques :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \quad , \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad i = 1,\dots,\ell \tag{1}$$

où

$$F(\underline{x},\underline{y},\mu) = F_o(\underline{x}) + \mu F_1(\underline{x},\underline{y}) + \mu^2 F_2(\underline{x},\underline{y}) + \dots \tag{2}$$

avec F_o dépendant seulement des $\underline{x}$ et avec F_j, $j = 0,1,\dots$, analytiques en $\underline{x},\underline{y}$ et 2π-périodiques par rapport aux $\underline{y}$ et avec la série (2) convergente de façon qu'elle définit une fonction F analytique pour $(\underline{x},\underline{y},\mu) \in D \times T^\ell \times (-\varepsilon,\varepsilon)$, D étant ouvert dans R^ℓ, $\varepsilon > 0$, $T^\ell = \{\text{tore de dimension } \ell\} = [0,2\pi]^\ell$.

Par souci de simplicité on supposera $D \equiv R^\ell$ et

$$\begin{aligned} &F_o(\underline{x}) \xrightarrow[|\underline{x}| \to \infty]{} +\infty \\ &B = \sup_{\substack{j \geq 1 \\ \underline{x},\underline{y}}} |F_j(\underline{x},\underline{y})| < +\infty \end{aligned} \tag{3}$$

mais il serait facile d'affaiblir fortement ces hypothèses qui nous servent pour pouvoir définir sans problèmes des solutions globales de (1) pour toutes les données initiales $(\underline{x},\underline{y}) \in R^\ell \times T^\ell$ et pour tout $\mu \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

(*) L'auteur remercie la Fondation Volkswagen du soutien financier qu'elle lui a accordé pour son séjour à l'IHES au cours duquel cet ouvrage a été écrit.

On notera $(\underline{x}(t),\underline{y}(t))$ le point dans lequel la donnée initiale $(\underline{x},\underline{y})$ évolue au bout du temps t: alternativement on emploiera la notation

$$(x(t),y(t)) = S_{t,\mu}(\underline{x},\underline{y}) \quad . \tag{4}$$

La question que Poincaré se posa concernait l'existence d'une fonction $(\underline{x},\underline{y},\mu) \to \Phi(\underline{x},\underline{y},\mu)$ définie dans un ouvert $\Gamma = D_o \times T^\ell \times (-\varepsilon_o,\varepsilon_o) \equiv W \times (-\varepsilon_o,\varepsilon_o)$, $D_o = \{$ sphère de rayon $<1\}$, telle que:

(i) si $S_{t,\mu}(\underline{x},\underline{y}) \in W$, $\forall\ t \in R$, $\forall\ \mu \in (-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 > 0$ on ait

$$\Phi(\underline{x},\underline{y},\mu) \equiv \Phi(S_{t,\mu}(\underline{x},\underline{y}),\mu) \tag{5}$$

c'est-à-dire que Φ est une intégrale première dans la région d'où partent les mouvements qui restent dans W.

(ii) Φ est analytique (et uniforme) dans Γ par rapport aux $\underline{x},\underline{y},\mu$.

Supposant, pour la simplicité de l'exposition, que le hessien de F_o soit tel que

$$\det \frac{\partial^2 F_0}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}} (\underline{x}) \neq 0 \tag{6}$$

et remplaçant la condition (5) par la condition plus faible:

$$\frac{d}{dt} \Phi\, (S_{t,\mu}(\underline{x},\underline{y}))\Big|_{t=0} \equiv \{F,\Phi\}(\underline{x},\underline{y}) = 0 \quad \forall(\underline{x},\underline{y},\mu) \in \Gamma \tag{7}$$

où $\{.,.\}$ dénote le crochet de Poisson, on peut formuler le résultat de Poincaré comme suit:

Proposition: Si dans la région D les coefficients du développement de Fourier de la fonction F_1:

$$F_1(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{\underline{\nu}\in Z^\ell} \hat{F}_{1,\underline{\nu}}(\underline{x})\, e^{i\underline{\nu}\cdot\underline{y}} \tag{8}$$

sont tous différents de zéro, $\forall\ \underline{x} \in D$, alors il n'y a pas de fonction Φ ne pouvant être considérée comme une fonction de F.

On peut dire que, "en général", un système analytique d'équations canoniques n'admet pas d'intégrales premières analytiques (uniformes).

La démonstration du théorème permet de l'étendre à des cas bien plus généraux et un célèbre corollaire que Poincaré en a déduit est la démonstration de la non-existence d'intégrales premières analytiques pour le problème des trois corps lorsque deux corps ont des masses très petites par rapport à celle du troisième (ces masses jouent le rôle du paramètre μ).

On peut considérer le résultat de Poincaré d'un autre point de vue. Si on pose $\mu = 0$ dans (1),(2) on voit que le mouvement admet ℓ intégrales premières indépendantes, à savoir les $\underline{x}$ elles-mêmes.

Et on peut regarder l'espace des phases comme feuilleté par une famille à ℓ paramètres de tores invariants (par rapport au flot $S_{t,o}$, $t \geqslant 0$) de la forme:

$$\mathcal{T}_{o,\underline{x}} = \{\underline{x}\} \times T^{\ell} \tag{9}$$

et

$$W = \bigcup_{\underline{x} \in D} \mathcal{T}_{o,\underline{x}} \tag{10}$$

Le mouvement sur chaque tore est "trivial":

$$S_{t,o}(\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\underline{y} + \frac{\partial F_0}{\partial \underline{x}}(\underline{x})t) \tag{11}$$

c'est-à-dire il est quasi-périodique ("non isochrone" car la condition (6) imposée sur le hessien de F_o implique que les composantes de $\frac{\partial F_0}{\partial \underline{x}}$ sont des fonctions indépendantes).

On pourrait naïvement espérer que si μ est petit, l'espace des phases W peut encore être considéré comme feuilleté par des tores invariants un peu déformés par rapport aux tores $\mathcal{T}_{o,\underline{x}}$ "à des effets de frontière près". C'est-à-dire on pourrait espérer qu'il existe une famille de tores ℓ-dimensionnels $\mathcal{T}_{\mu,\underline{A}}$, paramétrisés par ℓ paramètres $\underline{A}$ qui varient dans $D_{(\mu)}$, invariants par l'évolution $S_{t,\mu}$ et tels que l'ensemble

$$W(\mu) = \bigcup_{\underline{A} \in D_{(\mu)}} \mathcal{T}_{\mu,\underline{A}} \tag{12}$$

soit contenu dans W en même temps que les frontières $\partial W(\mu)$ et $\partial D_{(\mu)}$ sont contenues dans une bande d'épaisseur $o(\mu)$ près de ∂W et ∂D respectivement.

La condition que les tores $\mathcal{T}_{\mu,\underline{A}}$ soient peu déformés par rapport aux tores originaux $\mathcal{T}_{o,\underline{x}}$ peut s'exprimer en disant que les équations paramétriques de $\mathcal{T}_{\mu,\underline{A}}$ sont de la forme:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{A} + \underline{\alpha}(\underline{A},\underline{\phi},\underline{\mu}) \\ \underline{y} &= \underline{\phi} + \underline{\beta}(\underline{A},\underline{\phi},\underline{\mu}) \end{aligned} \tag{13}$$

avec $\underline{\alpha},\underline{\beta}$ analytiques en $(\underline{A},\underline{\phi},\underline{\mu}) \in \bigcup_{\mu} (D_{(\mu)} \times T^{\ell} \times \{\mu\})$ et divisibles par μ (donc "petites" si μ est petit).

Enfin le mouvement sur ces tores devrait encore être quasi-périodique dans le sens qu'il devrait exister ℓ fonctions $(\mu,\underline{A}) \to \underline{\omega}(\underline{A},\mu)$, telles que si $(\underline{x},\underline{y},\mu)$ correspond à $(\underline{A},\underline{\phi},\mu)$ par (13), alors $(\underline{x}(t),\underline{y}(t),\mu) = (S_{t,\mu}(\underline{x},\underline{y}),\mu)$ est donné par (13) en correspondance de

$$(\underline{A},\underline{\phi}') \equiv (\underline{A},\underline{\phi} + \underline{\omega}(\underline{A},\mu)t) \tag{14}$$

et

$$\left(\underline{\omega}(\underline{A},\mu) - \frac{\partial F_0}{\partial \underline{x}}(\underline{A})\right) \text{ est divisible par } \mu \,. \tag{15}$$

Par le théorème des fonctions implicites on pourrait alors inverser (13), pour μ petit, en exprimant $\underline{A}$ (et aussi $\underline{\phi}$, si on veut) en termes de $\underline{x},\underline{y}$:

$$\underline{A} = \underline{x} + \underline{a}(\underline{x},\underline{y},\mu) \tag{16}$$

et, évidemment, les ℓ fonctions dans (16) formeraient une famille de ℓ intégrales premières analytiques dans une région contenant un ensemble de la forme $D_1 \times T^\ell \times (-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$.

Donc du même coup le théorème de Poincaré exclut la possibilité que le mouvement perturbé par rapport à un mouvement "intégrable par quadratures" (c'est-à-dire avec équations (1) avec $\mu=0$) ait le même caractère au moins pour des perturbations générales. Mais, néanmoins, il se trouve que le théorème suivant est vrai (énoncé par Kolmogorov [2] en 1956 et prouvé essentiellement dans les articles de Moser [3] en 1962 et de Arnold [4] en 1963):

Proposition: Dans les hypothèses (6) et (3) il y a une famille de tores invariants de la forme (13) définie pour $\underline{A} \in \tilde{D}_{(\mu)} \subset D_o$, où $\tilde{D}_{(\mu)}$ est un borélien, et $\underline{\alpha},\underline{\beta}$ sont des fonctions mesurables de $(\underline{A},\underline{\phi},\mu) \in \tilde{D}_{(\mu)} \times T^\ell \times (-\varepsilon_o,\varepsilon_o)$, analytiques en $\underline{\phi}$ à $(\underline{A},\mu)$ fixes et s'annulant uniformément pour $\mu \to 0$ et telles que l'ensemble $\tilde{W}(\mu)$ défini comme dans (12), avec $\tilde{D}_{(\mu)}$ au lieu de $D_{(\mu)}$, a la propriété:

$$\frac{\text{volume } \tilde{W}(\mu)}{\text{volume } W} \xrightarrow[\mu\to 0]{} 1 \tag{17}$$

Enfin le mouvement $S_{t,\mu}$ est décrit, sur chaque tore, par (14).

Donc il apparaît que l'idée naïve que le mouvement perturbé soit proche de celui qui est imperturbé est quand même correcte.

Se peut-il que la seule condition à abandonner soit celle de l'analyticité des tores? C'est-à-dire, peut-on espérer que $\partial\tilde{D}_{(\mu)}$, $\partial\tilde{W}(\mu)$ soient contenues dans une bande près de ∂D et ∂W si on renonce à exiger que le feuilletage en tores invariants de $W(\mu)$ soit analytique?

Un examen de la preuve des propositions qu'on vient de citer conduit à croire, au contraire, que $D_{(\mu)}$ est un ensemble plein de "déchirures" et à complémentaire ouvert et, peut-être, même dense, bien que de petite mesure par (17).

Mais on peut voir que les déchirures (si vraiment présentes) doivent apparaître parmi les tores de façon très régulière.

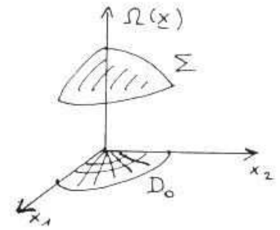
En effet, on peut prouver la proposition suivante, Pöschel [5] , Chierchia-Gallavotti [6] :

Proposition: Il est possible de construire un ensemble $W(\mu)$ feuilleté par des tores invariants qui soient décrits par des équations paramétriques de la forme (13) et qui jouissent, en plus, de la propriété (14) et, enfin, telles que les fonctions $(\underline{x},\underline{y}) \to \underline{a}(\underline{x},\underline{y},\mu)$, $\underline{A} \to \underline{\omega}(\underline{A},\mu)$ s'étendent à des fonctions de classe C^∞ sur $R^\ell \times T^\ell$ et sur D_o pour μ assez petit.

Je pense qu'aussi la dépendance en μ de $\underline{a}(\underline{x},\underline{y},\mu)$ et de $\underline{\omega}(\underline{A},\mu)$ est de classe C^∞.

Tout cela veut dire qu'il y a un feuilletage en tores de classe C^∞ qui complète le feuilletage partiel (et plein de déchirures) de W en tores invariants (qui couvrent $W(\mu) \subset W$). En d'autres termes encore, les déchirures se produisent de façon très gentille en dépit du fait qu'on pense qu'elles puissent être denses.

Dans un cas à deux degrés de liberté cela veut dire, par exemple, que si on considère l'hyperplan $y_1 = y_2 = 0$ et, pour chaque paire $(x_1,x_2) = \underline{x}$ on considère le mouvement qui se développe avec une donnée initiale $(x_1,x_2,0,0)$ et si on mesure une quantité $\Omega(\underline{x})$ caractéristique du mouvement quasi-périodique, comme par exemple la somme des carrés des pulsations du mouvement quasi-périodique (si tel est le mouvement en question et si on imagine de choisir les deux fréquences indépendantes selon quelque critère bien défini) ou zéro si le mouvement n'est pas quasi-périodique, on obtiendra un graphe de la forme



où la surface Σ est de classe C^∞, mais $(\underline{x}, \Omega(\underline{x}))$ est sur Σ seulement pour un ensemble de grande mesure de valeurs de $\underline{x}$ et dans le plan $\Omega = 0$ ou ailleurs pour un ensemble de valeurs de $\underline{x}$ contenant un ouvert (de petite mesure mais, peut-être, même dense).

Une telle situation semble bien s'accorder, du point de vue qualitatif, avec les résultats des expérimentations numériques.

Evidemment ce qui est exposé plus haut peut faire douter que le feuilletage $W(\mu)$ contient des déchirures factices, dues au procédé de la démonstration constructive de l'existence de $W(\mu)$, et non pas présentes dans la réalité.

Bien qu'il y ait des exemples de systèmes hamiltoniens, perturbations de quelque système intégrable par quadrature, où l'espace des phases certainement contient, pour $\mu \neq 0$, des points dont le mouvement n'est pas quasi-périodique [7] , il n'y a pas encore d'exemple d'un cas où le complémentaire de la région que l'on peut feuilleter en tores invariants, parcourus de façon quasi-périodique et peu perturbé par rapport aux tores du système imperturbé, contient un ouvert (ou un ensemble de mesure positive).

Je voudrais dédier le temps qui reste à motiver la conjecture qu'il devrait y avoir beaucoup d'exemples de systèmes pour lesquels l'ensemble des points de W qui n'évoluent pas de façon quasi-périodique est ouvert.

Donné $\underline{\nu} \in Z^\ell$, $\underline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_\ell)$, $\mathrm{MCD}(\nu_1, \ldots, \nu_\ell) = 1$, considérons la courbe définie par l'équation

$$\frac{\partial F_0}{\partial \underline{x}} (\underline{x}) = \omega_o \underline{\nu} \tag{18}$$

paramétrisée par ω_o. Si D_o est assez petit cette courbe est simple ou bien contient un nombre fini de branches (ce qu'on voit par l'intermédiaire du théorème des fonctions implicites). Appelons $L(\underline{\nu})$ cette courbe et supposons $|L(\underline{\nu})|$ = {longueur de $L(\underline{\nu})\} < B < +\infty$, $\forall\ \underline{\nu} \neq 0$.

Considérons l'ensemble

$$\Delta(\lambda,\alpha,\beta) = \bigcup^{*}_{|\underline{\nu}| \leq -\beta\log|\mu|} \ \bigcup_{\underline{x} \in L(\underline{\nu})} S(\underline{x}, \lambda\sqrt{\mu}\,|\underline{\nu}|^{-\alpha}) \quad (19)$$

où $\cup^{*}$ est une réunion sur les $\underline{\nu} \in Z^{\ell}$ tels que $MCD(\nu_1,\ldots,\nu_\ell)=1$ et $\beta > 0$, $\alpha > 0$ et λ sont des paramètres (et $S(\underline{x},\rho)$ = sphère centrée en $\underline{x}$ et avec rayon ρ).

On a:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\ \Delta(\lambda,\alpha,\beta) &< \mathrm{const}\ \lambda^{\ell-1}\sqrt{\mu}^{\ell-1} \sum_{|\underline{\nu}| < -\beta\log|\mu|} |\underline{\nu}|^{-\alpha(\ell-1)} \\ &\leq \mathrm{const}\ \lambda^{\ell-1}\sqrt{\mu}^{\ell-1}\ (\log\lambda^{-1})^{\mathrm{const}} \end{aligned} \quad (20)$$

On peut espérer que si μ est assez petit tous les points $(\underline{x},\underline{y}) \in \Delta(\lambda,\alpha,\beta) \times T^{\ell}$ soient animés par un mouvement qui n'est pas quasi-périodique ou peu perturbé par rapport aux mouvements quasi-périodiques du système imperturbé, au moins si F_1,α,β,λ sont convenablement choisis. La raison sur laquelle cet espoir repose est la suivante:

Considérons d'abord le cas $\underline{\nu} = (1,0,\ldots,0)$ et $F_o(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^2$. On notera $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_\ell) \equiv (A,B_2,\ldots,B_\ell) = (A,\underline{B})$, $\underline{y} = (\phi_1,\ldots,\phi_\ell) \equiv (\phi,\psi_2,\ldots,\psi_\ell) = (\phi,\underline{\psi})$ et on considérera l'hamiltonien

$$\frac{A^2}{2} + \frac{\underline{B}^2}{2} + \mu f(A,\underline{B},\phi,\underline{\psi}) \quad (21)$$

On s'intéresse donc aux mouvements qui se développent près du "tore résonnant" $A_o = 1$, $\underline{B}_o = \underline{0}$.

On pose, si $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} A(t) &= 1 + \sqrt{\mu}\, a_\mu(\sqrt{\mu}t) \\ \underline{B}(t) &= \sqrt{\mu}\, \underline{b}_\mu(\sqrt{\mu}\, t) \\ \phi(t) &= \delta_\mu(\sqrt{\mu}\, t) \\ \underline{\psi}(t) &= \underline{\gamma}_\mu(\sqrt{\mu}\, t) \end{aligned} \quad (22)$$

et on trouve que les équations du mouvement sont:

$$\begin{aligned} \dot{a}_\mu &= -\frac{\partial f}{\partial\phi}(1+\sqrt{\mu}\, a_\mu, \sqrt{\mu}\, \underline{b}_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu) \\ \dot{\underline{b}}_\mu &= -\frac{\partial f}{\partial\underline{\psi}}(1+\sqrt{\mu}\, a_\mu, \sqrt{\mu}\, \underline{b}_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu) \\ \dot{\delta}_\mu &= a_\mu + \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu}\, \frac{\partial f}{\partial A}(1+\sqrt{\mu}\, a_\mu, \sqrt{\mu}\, \underline{b}_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\dot{\underline{\gamma}}_\mu = \underline{b}_\mu + \sqrt{\mu}\,\frac{\partial f}{\partial \underline{B}}\,(1+\sqrt{\mu}\,a_\mu, \sqrt{\mu}\,\underline{b}_\mu, \delta_\mu, \gamma_\mu)$$

où la "variable temporelle" dans les équations (23) est $\tau = \sqrt{\mu}\,t$ et le point dénote la dérivation par rapport à τ. On fixe pour les équations (23) une donnée initiale μ-indépendante:

$$a_\mu(0) = a \;,\; \underline{b}_\mu(0) = \underline{b} \;,\; \delta_\mu(0) = \delta \;,\; \underline{\gamma}_\mu(0) = \underline{\gamma} \qquad (24)$$

Cela signifie que l'on s'intéresse aux mouvements qui ont une donnée initiale $(A, \underline{B}, \phi, \underline{\psi})$ à une distance de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ du tore résonnant.

Il est facile de prouver que les limites [8] :

$$\lim_{\mu\to 0} a_\mu(\tau) = a(\tau) \qquad \lim_{\mu\to 0} \underline{b}_\mu(\tau) = \underline{b}(\tau)$$
$$\lim_{\mu\to 0} \gamma_\mu(\tau) = \underline{\gamma}(\tau) \qquad (25)$$

existent et vérifient les équations

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ \dot{\underline{b}} &= -\frac{\partial V}{\partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}) \qquad \text{avec } V(\underline{\gamma}) = \int_0^{2\pi} f(1,0,\phi,\underline{\gamma})\,\frac{d\phi}{2\pi} \\ \dot{\underline{\gamma}} &= \underline{b} \end{aligned} \qquad (26)$$

C'est-à-dire que $\underline{b}$ et $\underline{\gamma}$ évoluent, à la limite $\mu \to 0$, selon les équations canoniques associées à l'hamiltonien

$$\frac{1}{2}\,\underline{b}^2 + V(\underline{\gamma}) \qquad (27)$$

$(\underline{b}, \underline{\gamma})$ étant des variables canoniques. En plus on peut voir que les limites (25) sont uniformes dans toute région $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_\mu$ si $\sqrt{|\mu|}\,\tau_\mu \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0$.

Donc on peut dire que les mouvements qui commencent à $\sqrt{|\mu|}$ près d'un tore résonnant se développent sur deux échelles de temps différentes: l'échelle de l'ordre 1 dans laquelle le mouvement apparaît comme périodique et l'échelle de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{|\mu|}}$ où le mouvement gouverné par (26) se superpose au mouvement périodique: puisque dans (26) la fonction $V(\underline{\gamma})$ est en large mesure arbitraire, on peut imaginer qu'elle est choisie de façon à produire un mouvement qui n'est pas quasi-périodique au moins pour la plupart des données initiales et si

$\ell > 2$ *. (Bien que je ne sache citer aucun exemple explicite appartenant à la classe C^{∞}, on pense qu'il en existe.)

La description du mouvement que l'on vient de donner devrait être valable jusqu'au temps de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{|\mu|}}$ (si on se rappelle que $\tau = \sqrt{\mu}\, t$ et que les limites (25) sont uniformes pour $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_{\mu}$, si $\tau_{\mu}\sqrt{|\mu|} \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0$).

Ensuite il est difficile de prévoir ce qui se passe: on peut croire que si les mouvements décrits par (26) sont suffisamment stables (si, par exemple, ils forment un flot d'Anosov) et si on peut garantir a priori que a_{μ} reste borné (absence de diffusion d'Arnold), alors rien de nouveau ne devrait se produire pour $t \gg \frac{1}{|\mu|}$.

Donc dans une telle situation le mouvement restera bien décrit par (26) au moins du point de vue qualitatif: d'où on déduit la partie de la conjecture relative à la résonance $\underline{\nu} = (1,0,\ldots,0)$, (cas $\underline{\nu} = (1,\ldots,0)$ dans (19)).

Le cas où F_0 est arbitraire se ramène à celui déjà traité par des développements en puissances de $\underline{x}$ et par de simples changements de coordonnées.

Le cas où l'on considère une résonance $\underline{\omega}(\underline{x}) = \omega_0 \underline{\nu}$ avec $\underline{\nu} \in Z^{\ell}$ arbitraire se ramène au précédent par un changement canonique linéaire de coordonnées:

$$\begin{aligned} (A',\underline{B}') &= \mathcal{N}(A,\underline{B}) \\ (\phi',\underline{\psi}') &= (\mathcal{N}^{-1})^{T}(\phi,\underline{\psi}) \end{aligned} \tag{28}$$

où $(\mathcal{N}^{-1})$ est une matrice à éléments entiers et tels que

$$(\mathcal{N}^{-1})^{T}\,\underline{\nu} = (1,0,\ldots,0) \tag{29}$$

(qui existe si, comme on le suppose, $\mathrm{MCD}(\nu_1,\ldots,\nu_{\ell}) = 1$): on peut trouver $\mathcal{N}$ de façon telle que pour tout $\underline{u} \in R^{\ell}$:

$$O(|\underline{\nu}|^{-1})\,|\underline{u}| \leqslant |\mathcal{N}\underline{u}| \leqslant O(|\underline{\nu}|)\,|\underline{u}| \ . \tag{30}$$

Alors un voisinage de l'ordre de $\sqrt{|\mu|}$ du tore résonnant dans les nouvelles variables a, dans les variables originaires $(A,\underline{B})$, une épaisseur qui peut être estimée par $\geqslant O(|\underline{\nu}|^{-1})\sqrt{|\mu|}$.

(*) Si $\ell = 2$, alors $\underline{b}$ et $\underline{\gamma}$ sont unidimensionnels et (24) sera intégrable par quadratures pour beaucoup de données initiales et pour V assez général.

Mais le changement de coordonnées (28) ÷ (30) change aussi la forme de l'hamiltonien (qui est le même, mais doit être regardé comme fonction des nouvelles coordonnées) et on pourra estimer la dérivée de la fonction perturbatrice par $O(|\nu||\mu|)$.

Donc si on veut vraiment appliquer le même argument, que l'on a exposé pour la résonance $\underline{\nu} = (1,0,\ldots,0)$ au cas général, on devra se borner à considérer des valeurs de $|\underline{\nu}|$ telles que $|\mu\underline{\nu}|$ n'est pas trop grand par rapport à μ: d'où le choix $|\underline{\nu}| < \beta \log|\mu|^{-1}$.

Tout ceci motive la conjecture (et on trouve $\alpha > 1$ et β reste arbitraire).

Appendice: Démonstration de (26)

Une analyse beaucoup plus profonde de problèmes analogues est dans [8].

On suppose que f soit une fonction uniformément bornée dans ses arguments $(A,\underline{B},\phi,\underline{\psi}) \in R \times R^{\ell-1} \times T^1 \times T^{\ell-1}$.

On fixe $T > 0$ et on considère $0 \leqslant t \leqslant T$. On voit que, si $F = \max\left(\left|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \underline{\psi}}\right|\right)$, $G = \max\left(\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \underline{B}}\right|\right)$:

$$\begin{aligned} &|a_\mu(t)| \leqslant |a_o| + FT, \quad |\underline{b}_\mu(t)| \leqslant |\underline{b}_o| + FT \\ &|\underline{\gamma}_\mu(t)| \leqslant |\underline{\gamma}_o| + GT\sqrt{|\mu|} + (\underline{b}_o + FT)T \end{aligned} \tag{A.1}$$

(d'après (23)), donc a_μ, $\underline{b}_\mu$, $\underline{\gamma}_\mu$ sont des fonctions équibornées pour $t \in [0,T]$. Leurs dérivées aussi sont équibornées:

$$\begin{aligned} &|\dot{a}_\mu| \leqslant F, \quad |\dot{\underline{b}}_\mu| \leqslant F \\ &|\dot{\underline{\gamma}}_\mu| \leqslant (|\underline{b}_o| + FT) + \sqrt{|\mu|}G \end{aligned} \tag{A.2}$$

Donc les trois familles de fonctions a_μ, $\underline{b}_\mu$, $\underline{\gamma}_\mu$ sont équibornées et équicontinues sur $[0,T]$.

On pourra pourtant trouver, dans toute suite de valeurs de μ convergente vers zéro, une sous-suite $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ telle que a_{μ_n}, $\underline{b}_{\mu_n}$, $\underline{\gamma}_{\mu_n}$ converge vers une limite continue a, $\underline{b}$, $\underline{\gamma}$ uniformément dans $t \in [0,T]$.

Alors:

$$\begin{aligned} a_\mu(t) &= a_o + \int_0^t -\frac{\partial f}{\partial \phi}(1+\sqrt{\mu}\, a_\mu(\tau), \sqrt{\mu}\,\underline{b}_\mu(\tau), \delta_\mu(\tau), \underline{\gamma}_\mu(\tau))\, d\tau \\ &\underset{\mu\to 0}{\overset{\sqrt{\mu}}{\sim}} a_o + \int_0^t -\frac{\partial f}{\partial \phi}(1,\underline{0},\delta_\mu(\tau),\gamma_\mu(\tau))\, d\tau \end{aligned} \tag{A.3}$$

où $\underset{\mu\to 0}{\overset{\sqrt{\mu}}{\sim}}$ signifie que la différence entre les membres de gauche et de droite tend vers zéro, lorsque $\mu\to 0$, comme $\sqrt{\mu}$ (et, en fait, on peut borner la différence par:

$$\begin{gathered}\sqrt{\mu}\,(M(|a_o| + FT) + M(|\underline{b}_o| + FT)) \\ \text{si } M = \max\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\phi\,\partial A}\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial\phi\,\partial \underline{B}}\right|\right)\end{gathered} \tag{A.4}$$

Alors on peut observer que:

$$\delta_\mu(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\mu}} + \int_0^\tau \{a_\mu(\theta) + \sqrt{\mu}\frac{\partial f}{\partial \underline{A}}(1+\sqrt{\mu}\,a_\mu(\theta), \sqrt{\mu}\,b_\mu(\theta), \delta_\mu(\theta), \gamma_\mu(\theta)\}d\theta \tag{A.5}$$

et que l'intégrale au second membre de (A.3) peut s'écrire:

$$- \sum_{k=1}^{t/2\pi\sqrt{\mu}} \sqrt{\mu} \int_{2\pi\sqrt{\mu}\,(k-1)}^{2\pi\sqrt{\mu}\,k} \frac{\partial f}{\partial\phi}\,(1, 0, \frac{\tau}{\sqrt{\mu}} + \lambda_\mu(\tau), \underline{\gamma}_\mu(\tau))\,\frac{d\tau}{\sqrt{\mu}} \tag{A.6}$$

avec une évidente convention sur la signification du dernier élément de la somme, si $\lambda_\mu(\tau)$ est une abréviation de l'intégrale au membre droit de (A.5).

Si $t_k = 2\pi\sqrt{\mu}\,k$ (A.6) est égale à:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\mu}\sum_{k=1}^{t/2\pi\sqrt{\mu}} \int_{2\pi\sqrt{\mu}(k-1)}^{2\pi\sqrt{\mu}\,k} \frac{\partial f}{\partial\phi}\,(1, \underline{0}, \frac{\tau}{\sqrt{\mu}} + \lambda_\mu(t_k), \gamma_\mu(t_k))\,\frac{d\tau}{\sqrt{\mu}} \;+ \\ &+\sqrt{\mu}\sum_{k=1}^{t/2\pi\sqrt{\mu}} O(\,M \max_{t_{k-1}\leq\tau\leq t_k}(|\lambda_\mu(\tau) - \lambda_\mu(t_k)| + |\underline{\gamma}_\mu(\tau) - \underline{\gamma}_\mu(t_k)|\,))\end{aligned} \tag{A.7}$$

mais

$$\begin{aligned}|\lambda_\mu(\tau) - \lambda_\mu(t_k)| &\leq ((|a_o| + FT)\sqrt{\mu}\,2\pi + \sqrt{\mu}\,G\,2\pi\sqrt{\mu}\,) \\ |\underline{\gamma}_\mu(\tau) - \underline{\gamma}_\mu(t_k)| &\leq ((|b_o| + FT)\sqrt{\mu}\,2\pi + \sqrt{\mu}\,G\,2\pi\sqrt{\mu}\,)\end{aligned} \tag{A.8}$$

et donc (A.6) est, pour $D > 0$ convenable

$$\sqrt{\mu}\sum_{k=1}^{t/2\pi\sqrt{\mu}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial f}{\partial\phi}\,(1, \underline{0}, \frac{\tau}{\sqrt{\mu}} + \lambda_\mu(t_k), \underline{\gamma}_\mu(t_k))\,\frac{d\tau}{\sqrt{\mu}}\right) + O(\sqrt{\mu}\,D)t \tag{A.9}$$

Mais les intégrales entre parenthèses sont nulles parce que f est périodique en ϕ et donc:

$$\lim_{\mu\to 0} a_\mu(t) = a_o \tag{A.10}$$

avec une erreur que l'on peut évaluer par $(t\sqrt{\mu}\,D)$.

De façon analogue on étudie $\underline{b}_\mu$ et $\underline{\gamma}_\mu$.

Si $\mu_n \to 0$ et $\underline{b}_{\mu_n}, \underline{\gamma}_{\mu_n} \to \underline{b}, \underline{\gamma}$ on trouve

$$\begin{aligned}
\underline{b}_{\mu_n}(t) &= \underline{b}_o + \int_0^t - \frac{\partial f}{\partial \underline{\psi}}(1+\sqrt{\mu}_n a_{\mu_n}(\tau), \sqrt{\mu}\, \underline{b}_{\mu_n}(\tau), \delta_{\mu_n}(\tau), \underline{\gamma}_{\mu_n}(\tau))\, d\tau \\
&\underset{\mu_n \to 0}{\widetilde{\sqrt{\mu_n}}} \quad \underline{b}_o + \sqrt{\mu_n} \int_0^t - \frac{\partial f}{\partial \underline{\psi}}(1, \underline{0}, \delta_{\mu_n}(\tau), \underline{\gamma}_{\mu_n}(\tau))\, d\tau \\
&\underset{\mu_n \to 0}{\widetilde{\sqrt{\mu_n}}} \quad \underline{b}_o + \sqrt{\mu_n} \sum_{k=1}^{t/2\pi\sqrt{\mu_n}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} - \frac{\partial f}{\partial \underline{\psi}}(1, \underline{0}, \frac{\tau}{\sqrt{\mu_n}} + \lambda_{\mu_n}(\tau), \underline{\gamma}_{\mu_n}(\tau))\, d\tau \\
&\underset{\mu_n \to 0}{\widetilde{\sqrt{\mu_n}}} \quad \underline{b}_o + \sqrt{\mu_n} \sum_{k=1}^{t/2\pi\sqrt{\mu_n}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} - \frac{\partial f}{\partial \underline{\psi}}(1, \underline{0}, \frac{\tau}{\sqrt{\mu_n}} + \lambda_{\mu_n}(t_k), \underline{\gamma}_{\mu_n}(t_k))\, d\tau \\
&= \underline{b}_o + 2\pi\sqrt{\mu_n} \sum_{k=1}^{t/2\pi\sqrt{\mu_n}} - \frac{\partial V}{\partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}_\mu(t_k)) \\
&\underset{\mu_n \to 0}{\widetilde{\sqrt{\mu_n}}} \quad \underline{b}_o + \int_0^t - \frac{\partial V}{\partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}_{\mu_n}(\tau))\, d\tau \\
&\xrightarrow[\mu_n \to 0]{} \quad \underline{b}_o + \int_0^t - \frac{\partial V}{\partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}(\tau))\, d\tau
\end{aligned} \tag{A.11}$$

C'est-à-dire que la limite de $\underline{b}_{\mu_n}$ et de $\underline{\gamma}_{\mu_n}$ vérifie

$$\dot{\underline{b}} = - \frac{\partial V}{\partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}) \tag{A.12}$$

et par un même argument

$$\dot{\underline{\gamma}} = \underline{b}$$

Les (A.12),(A.13) sont des équations ordinaires avec une propriété d'existence et d'unicité globale: donc les limites de $\underline{b}_{\mu_n}, \underline{\gamma}_{\mu_n}$ ne peuvent pas dépendre de la suite $\mu_n \to 0$ et donc les limites

$$\lim_{\mu \to o} a_\mu(t) = a(0) = a_o$$

$$\lim_{\mu \to o} \underline{b}_\mu(t) = \underline{b}(t) \qquad \lim_{\mu \to o} \underline{\gamma}_\mu(t) = \underline{\gamma}(t) \tag{A.14}$$

existent et vérifient les (A.12),(A.13) avec les conditions initiales $\underline{b}(0) = \underline{b}_o$, $\underline{\gamma}(0) = \underline{\gamma}_o$, $\forall\, t \geqslant 0$.

Si on regarde de plus près les inégalités ci-dessus on voit que les limites (A.14) sont uniformes non seulement pour $|t| \leqslant T$, avec $T > 0$ donné, mais aussi pour $|t| \leqslant T_\mu$, si $\sqrt{\mu}\, T_\mu \xrightarrow[\mu \to o]{} 0$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] Poincaré H.: "Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste", Gauthier-Villars, Paris, 1892, p. 233, (vol.I).

[2] Kolmogorov N.: Dokl. Akad. Nauk SSSR, 98, 527, 1954.

[3] Moser J.: Nachr. Ak. Wiss. Göttingen, 1, 1962.

[4] Arnold V.: Russian Math. Surveys 18, 9, 1963 and 18, 85, 1963.

[5] Pöshel J.:"Über differenzierbare Faserungen invarianter Tori", preprint, 1981, ETH, Zürich, (Mathematik).

[6] Chierchia L., Gallavotti G.: "Smooth prime integrals for quasi integrable hamiltonian systems", preprint, 1981, Università di Roma, Istituto Matematico. A paraître sur "Il Nuovo Cimento", B.

[7] Arnold V.: Soviet Math. Dokladi, 5, 581, 1964.
Moser J.: "Stable and random motions in Dynamical Systems", Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.

[8] Nekhoroshev N.: Russian Math. Surv., 32, 1, 1977.

GIOVANNI GALLAVOTTI
Istituto Matematico
Università di Roma
00185, Roma
ITALIA