Operatore di Liouville e soluzioni statistiche delle equazioni di Hamilton (*).

G. GALLAVOTTI (Roma)

A DARIO GRAFFI nel suo 70° compleanno

Sunto. – *Si illustra la relazione fra la teoria dell'operatore di Liouville ed i problemi di esistenza ed unicità per le equazioni di Hamilton relative a sistemi classici. Questo problema, motivato a mezzo di una rapida rassegna di risultati recenti, viene investigato in dettaglio nel caso di sistemi liberi.*

Questa nota è principalmente un articolo di rapida rassegna di alcune idee e risultati recentemente apparsi nella letteratura ed è dedicato al prof. DARIO GRAFFI nel suo 70° compleanno.

La scelta del soggetto è legata ad uno dei moltissimi problemi cui il prof. GRAFFI ha tanto contribuito (studio delle equazioni della teoria dei fluidi). Egli si è posto e cimentato con i problemi che sono oggi oggetto di intensa ricerca e quindi li riconoscerà, formulati in una diversa veste matematica e pur sempre gli stessi con le stesse formidabili difficoltà di fondo.

1. – Introduzione.

Lo studio della dinamica dei sistemi ad infiniti gradi di libertà è reso interessante dal fatto che, in generale, non vale un teorema di esistenza ed unicità per le soluzioni delle equazioni del moto.

L'idea fondamentale alla base della teoria qualitativa della dinamica dei sistemi infiniti sta nella rinuncia a teoremi globali di esistenza ed unicità e nella ricerca di tali teoremi per dati iniziali scelti « quasi ovunque » [1].

Sono le applicazioni a suggerire i significati possibili, e interessanti, della locuzione « quasi ovunque scelti ».

Una delle più importanti applicazioni della teoria dei sistemi hamiltoniani infiniti dovrebbe essere la comprensione dei fenomeni di avvicinamento all'equilibrio per sistemi che si discostano « poco » da esso (ad esempio solo « localmente »).

(*) Entrata in Redazione il 10 aprile 1975.

Dunque un requisito irrinunciabile da richiedere ad un teorema di evoluzione per sistemi con infinite particelle è che esso permetta di parlare di evoluzione di misure, sullo spazio delle fasi, che sono assolutamente continue rispetto a misure stazionarie di Boltzmann-Gibbs (che sono appunto la formalizzazione matematica della nozione intuitiva di stati localmente perturbati dall'equilibrio).

In altre parole, se K è lo spazio delle fasi, ϱ una misura di Gibbs su $\mathcal{K}$ corrispondente ad un fissato modello di forze d'interazione, si vuole che per un insieme $\mathcal{K}_\varrho$ di dati iniziali, $\mathcal{K}_\varrho \subset K$ e $\varrho(\mathcal{K}_\varrho) = 1$, si possano «univocamente risolvere le equazioni di Hamilton in $\mathcal{K}_\varrho$ ed ottenere in tal modo un gruppo di automorfismi della misura $(\mathcal{K}, \varrho)$; ossia un gruppo di trasformazioni di $\mathcal{K}$ in sè stesso, definito mod. O, rispetto a ϱ, e che lascia la misura ϱ invariante (questa proprietà di invarianza corrisponde al fatto che, essendo ϱ una misura di «equilibrio», deve avvenire che ϱ è invariante per evoluzione temporale).

La connessione, che è più che un'analogia formale, con le idee sulle soluzioni statistiche delle equazioni dell'idrodinamica (Eulero, Navier-Stokes, Boltzmann) è evidente, sebbene, dal punto di vista storico, tali idee si siano sviluppate in modo indipendente [2].

Allo scopo di precisare meglio la discussione svolta finora esporrò, nel paragrafo 2, un po' di cinematica dei sistemi infiniti. Nei paragrafi 3, 4, 5 discuterò i risultati noti sui sistemi unidimensionali ed esaminerò la relazione che intercorre fra le soluzioni statistiche di sistemi di (infinite) equazioni di Hamilton e la teoria dell'operatore di Liouville stabilendo la connessione fra l'unicità delle soluzioni statistiche e le proprietà funzionali di tale operatore.

Nel paragrafo 6 dimostrerò a titolo illustrativo l'essenziale autoaggiunzione dell'operatore di Liouville nel caso di sistemi liberi (gas perfetti).

2. – Cinematica ed equazioni del moto.

Sia $\mathcal{K}$ lo spazio, «spazio delle fasi», delle successioni $X = (x_i)_{i=1}^\infty = (p_i, q_i)_{i=1}^\infty$ ove $(p_i, q_i) \in R^d \times R^d$ $i = 1, 2, \ldots,$ tali che in ogni regione finita $\Lambda \subset R^d$ cadono solo un numero finito di punti della successione $(q_i)_{i=1}^\infty$ («configurazioni localmente finite»). Il numero intero $d > 0$ è la «dimensione» del sistema e le coordinate $(q_i)_{i=1}^\infty$ sono le «posizioni» delle particelle (p_i, q_i) che compongono la configurazione $X = (p_i, q_i)_{i=1}^\infty$, mentre le coordinate $(p_i)_{i=1}^\infty$ sono i corrispondenti «impulsi».

Sia m un intero non negativo e sia $f^{(m)}: R^d \times R^d \to R$ una successione, $m = 0, 1, \ldots,$ definitivamente nulla di funzioni $f^{(m)}: (R^d \times R^d)^m \to R$ simmetriche e infinitamente differenziabili, a supporto compatto nelle variabili $(q_i)_{i=1}^m$ e limitate da un polinomio $P^{(m)}(|p_1|, \ldots, |p_m|)$. Si porrà

$$F(X) = \sum_{S \subset X} f(S)$$

ove $f(S) = f^{(m)}(s_1, \ldots, s_m)$ se $S = (s_1, \ldots, s_m) \subset X \in \mathcal{K}$(e la serie che definisce F è una somma finita per ogni $X \in \mathcal{K}$).

L'insieme $\mathfrak{A}$ delle funzioni ora definite forma, in un senso naturale, un'algebra reale con unità.

Se $F \in \mathfrak{A}$ allora $F(X)$ dipende da $X \in \mathcal{K}$ solo «localmente», ossia esiste $\Lambda_F \subset R^d$ tale che $F(X) = F(Y)$ se X, $Y \in \mathcal{K}$ e se X e Y differiscono solo «fuori» di Λ_F (cioè solo per le coppie (p, q) con $q \notin \Lambda_F$). Diremo che la funzione F è «cilindrica» su Λ_F. La nozione di cilindricità ha senso per funzioni generali definite su $\mathcal{K}$.

Se $F \in \mathfrak{A}$ allora $F(X)$ è una funzione delle variabili $(p_i, q_i)_{i=1}^{\infty}$ che è infinitamente parzialmente derivabile rispetto a p_i, q_i, $i = 1, 2, \ldots$ e le derivate parziali sono funzioni cilindriche.

È utile introdurre l'algebra $\tilde{\mathfrak{A}}$ delle funzioni cilindriche infinitamente parzialmente differenziabili rispetto alle coordinate di $X = (p_i, q_i)_{i=1}^{\infty}$ e tali che se $f \in \tilde{\mathfrak{A}}$ esiste una regione $\Lambda_f \subset R^d$ sulla quale f è cilindrica ed esistono costanti $C_f^{(l)}$, $K_f^{(l)}$ $l = 0, 1, \ldots$ tali che

$$|\partial^l f(X)| \leqslant C_f^{(l)} N^{K_f^{(l)}} \Big(\max_{q_i \in \Lambda_f} |p_i|\Big)^{K_f^{(l)}}$$

ove $|\partial^l f(X)|$ indica il massimo delle derivate parziali di ordine l calcolate in X e $N =$ numero di coordinate q_i di $X = (p_i, q_i)_{i=1}^{\infty}$ in $\Lambda_f =$ numero di punti di X in Λ_f; inoltre $K_f^{(l)}$, $C_f^{(l)} \geqslant 0$ e $K_f^{(0)} = 0$ (cioè le funzioni di $\tilde{\mathfrak{A}}$ sono limitate).

Su $\mathcal{K}$ si introduce la topologia minima che rende continue le funzioni di $\mathfrak{A}$ o, ciò che è lo stesso, di $\tilde{\mathfrak{A}}$. Tale topologia non distingue due configurazioni che differiscono per una permutazione delle particelle che le compongono. Sullo spazio $\tilde{\mathcal{K}}$ delle classi di equivalenza di $\mathcal{K}$ rispetto alla relazione $X \sim Y$ se X è una «permutazione» di Y tale topologia è metrica e, con essa, $\mathcal{K}$ diviene uno spazio polacco.

Sia $\varphi\colon R^d \to R^d$ una funzione infinitamente differenziabile a supporto compatto e tale che $\varphi(r) = \varphi(-r)$, $\forall r \in R^d$ («potenziale a due corpi»).

Sarà utile, in vista delle applicazioni, supporre $\varphi \equiv 0$ ovvero che φ si possa pensare come somma di due funzioni φ_+ e $\hat{\varphi}_+$ infinitamente differenziabili e a supporto compatto e tali che $\varphi_+(0) > 0$, $\varphi_+(r) \geqslant 0$ e $\hat{\varphi}_+$ è di tipo positivo (cioè ha trasformata di Fourier non negativa).

Il sistema di equazioni

$$\frac{dq_i}{dt} = p_i\,, \qquad\qquad q_i(0) = q_i^0\,,$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\sum_{j \neq i} \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}(q_i - q_j)\,, \qquad p_i(0) = p_i^0\,,$$

ove $X^0 = (q_i^0, p_i^0)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{K}$ e $\partial\varphi/\partial q$ è il gradiente di φ («forza»), può essere riguardato in modo naturale come problema di evoluzione su $\mathcal{K}$ e sarà chiamato «sistema delle equazioni hamiltoniane con potenziale φ» sullo spazio $\mathcal{K}$.

Un problema che ci si può porre è quello di determinare sottospazi di $\mathcal{K}$ sui quali il sistema di equazioni hamiltoniane ammetta soluzioni abbastanza regolari e, con tali requisiti di regolarità, sia ben posto.

Un problema più naturale è quello dello studio delle soluzioni statistiche delle equazioni di Hamilton con potenziale φ che pongo al modo seguente [1].

Assegnata una classe $\mathfrak{S}$ (non vuota) di misure boreliane di probabilità su $\mathcal{H}$ trovare, se esiste, un insieme boreliano $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}$ tale che

i) $\varrho(\mathcal{H}_{\mathfrak{S}})=1$, $\forall\varrho\in\mathfrak{S}$.

ii) Esista una famiglia di trasformazioni $T_t\colon\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}\to\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}$ tale che se $X\in\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}$ la funzione $X(t)=T_tX$ risolve le equazioni del moto (ossia, se $X(t)=\big(p_i(t),\,q_i(t)\big)_{i=1}^{\infty}$ le funzioni $p_i(t)$, $q_i(t)$, $i=1,2,\ldots$ sono differenziabili e verificano le equazioni del moto).

iii) La trasformazione T_t è boreliana su $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}$ ed ha la proprietà di «località» seguente:
posto, per $f\in\tilde{\mathfrak{A}}$

$$(\mathfrak{L}f)(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(p_i\frac{\partial f}{\partial q_i}(X)+\frac{\partial\sum_{j\neq i}\varphi(q_i-q_j)}{\partial q_i}\,\frac{\partial f}{\partial p_i}(X)\right)$$

si ha

$$\frac{f(T_tX)-f(X)}{t}-(\mathfrak{L}f)(X)\xrightarrow[t\to0]{}0$$

nella metrica di $L_2(\mathcal{K},\varrho)$, $\forall\varrho\in\mathfrak{S}$.

iv) per ogni $t\in R$ la trasformazione boreliana T_t trasforma la misura $(\mathcal{K},\varrho)$ in se $\forall\varrho\in\mathfrak{S}$ (ossia ϱ è una misura invariante per evoluzione temporale).

Le classi $\mathfrak{S}$ che saranno prese in considerazione in questo lavoro saranno sottoinsiemi della classe $\mathfrak{S}_g$ delle misure di Gibbs relative a potenziali φ del tipo considerato in questo lavoro («misure di equilibrio termodinamico»).

Non sarà necessario dare la precisa definizione di misura di Gibbs (che è ampiamente discussa nella letteratura): sarà sufficiente elencarne alcune proprietà salienti (cfr. § 4) [3].

Notiamo che il requisito iv) corrisponde al fatto che ci limitiamo allo studio di soluzioni statistiche rispetto a misure stazionarie. Sarebbe possibile dare una definizione più generale applicabile anche a famiglie $\mathfrak{S}$ di misure non stazionarie, ma non discuterò tale problema in questa sede.

3. – Soluzioni statistiche deboli.

Il problema dell'esistenza di soluzioni statistiche delle equazioni di Hamilton con potenziale φ si può porre anche al modo seguente, più debole di quello «naturale» esaminato al paragrafo precedente [4].

Dato $\varrho\in\mathfrak{S}_g$ studiare se esiste una famiglia T_t di trasformazioni definite, ciascuna, mod. O rispetto a ϱ e che lasciano la misura ϱ invariante e tali che la formula

$$\big(U(t)f\big)(X)=f(T_tX)\qquad f\in L_2(\varrho)$$

definisce un gruppo di operatori unitari fortemente continui su $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ e tali che, se $f \in \tilde{\mathfrak{A}}$

$$(\mathfrak{L}f)(X) = \lim_{t\to 0} \frac{f(T_t X) - f(X)}{t}$$

in $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ ove $\mathfrak{L}$ è l'operatore (« di Liouville ») definito al paragrafo precedente.

In altre parole si pone il problema di studiare se l'operatore $\mathfrak{L}$ definito su $\mathfrak{A}$ ammetta estensioni chiuse e generatrici di un gruppo $U(t)$ unitario e moltiplicativo in $L_\infty(\mathcal{K}, \varrho)$ (ossia tale che se $f, g \in L_\infty(\mathcal{K}, \varrho)$ allora $U_t(fg) = (U_t f)(U_t g)$) e fortemente continuo in $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$.

Quest'ultima osservazione segue dal fatto che, se U_t è moltiplicativo su $L_\infty(\mathcal{K}, \varrho)$ e unitario su $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$, allora esiste un automorfismo di $(\mathcal{K}, \varrho)$, T_t, tale che $(U(t)f((X) = f(T_t X)$ ϱ-quasi ovunque: infatti $\tilde{\mathcal{K}}$, (vedi pag. 229), è uno spazio polacco e ϱ una misura boreliana su $\mathcal{K}$ e quindi $(\tilde{\mathcal{K}}, \varrho)$ è uno spazio di Lebesgue [5], e, negli spazi di Lebesgue, le trasformazioni U unitarie e moltiplicative su L_∞ sono in corrispondenza biunivoca con gli automorfismi T della misura via la relazione $(Uf)(X) = f(TX)$ [5].

È chiaro che se $\varrho \in \mathfrak{S}_g$ e T_t è una soluzione forte delle equazioni hamiltoniane con la proprietà iv) del par. 2 allora T_t è anche una soluzione debole.

Viceversa è naturale dire che il problema delle equazioni di Hamilton per un sistema con potenziale φ è ben posto per uno stato di Gibbs $\varrho \in \mathfrak{S}_g$ se esso ammette un'unica soluzione debole, ossia se esiste un unico gruppo $U(t)$, fortemente continuo, di unitari in $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ e con generatore infinitesimo coincidente, su $\tilde{\mathfrak{A}}$, con l'operatore $\mathfrak{L}$.

Il motivo per cui è naturale dire che il problema delle equazioni di Hamilton è ben posto per uno stato di Gibbs ϱ se è ben posto in senso debole è da ricercarsi nel fatto che, sembra, tutte le quantità di interesse fisico, che si sono finora ritenute utili nello studio del rilassamento all'equilibrio di stati localmente perturbati rispetto a stati di equilibrio (di Gibbs), si possono esprimere nella forma

$$\int_K (U(t)f)(X)g(X)\,d\varrho$$

ove $f, g \in \tilde{\mathfrak{A}}$.

L'operatore $\mathfrak{L}$, « operatore di Liouville » con potenziale φ, ha formalmente la proprietà di essere emisimmetrico in $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ (ossia l'operatore $-\mathfrak{L}^*$ prolunga $\mathfrak{L}$) se ϱ è una misura di Gibbs con potenziale φ.

Questa emisimmetria può essere facilmente verificata in modo non rigoroso per ogni stato di Gibbs, a partire dalla definizione di stato di Gibbs con potenziale φ In molti casi il procedimento non rigoroso può essere reso rigoroso [6].

Nei casi in cui si può effettivamente verificare l'emisimmetria in $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ dell'operatore $\mathfrak{L}$ definito su $\tilde{\mathfrak{A}}$, una condizione sufficiente affinchè il problema dinamico sia ben posto rispetto allo stato ϱ è che l'operatore $\mathfrak{L}$ sia essenzialmente emiautoaggiunto su $\tilde{\mathfrak{A}}$ (ossia la chiusura $\bar{\mathfrak{L}}$ di $\mathfrak{L}$ sia tale che $\bar{\mathfrak{L}}^* = -\mathfrak{L}$).

Questo criterio è immediata conseguenza del seguente teorema [4]:

TEOREMA. – Sia l'operatore $\mathfrak{L}$ un operatore essenzialmente emiautoaggiunto su un'algebra $\mathfrak{A} \subset L_\infty(\mathcal{K}, \varrho)$ ove $(\mathcal{K}, \varrho)$ è una misura di Lebesgue; se $\mathfrak{L}$ ha la proprietà (« di derivazione »):

$$\mathfrak{L}(fg) = f(\mathfrak{L}g) + g(\mathfrak{L}f)$$

esiste una famiglia di automorfismi mod. O, T_t, $t \in R$, di $(\mathcal{K}, \varrho)$ tali che

$$(\exp [\mathfrak{L}t] f)(x) = f(T_t X) .$$

La condizione di essenziale emiautoaggiunzione di $\mathfrak{L}$ è solo una condizione sufficiente a che il problema delle soluzioni statistiche deboli per uno stato $\varrho \in \mathfrak{S}_g$ sia ben posto: non si può, infatti, a priori escludere che, pur non essendo $\mathfrak{L}$ essenzialmente emiautoaggiunto su $\mathfrak{A}$, esista un'unica estensione emiautoaggiunta di $\mathfrak{L}$ che genera un gruppo fortemente continuo e moltiplicativo di unitari.

La discussione di questo paragrafo, e dei precedenti, dovrebbe chiarire il motivo per cui ci si pone il problema della emiautoaggiunzione dell'operatore $\mathfrak{L}$ e perchè è importante verificare, in qualche esempio, l'equivalenza del problema della essenziale emiautoaggiunzione di $\mathfrak{L}$ e quello della « buona posizione » del problema dell'esistenza delle soluzioni statistiche deboli delle equazioni del moto.

Mi occuperò di questa verifica nel caso semplice in cui $\varphi = 0$ nel paragrafo 5: tale caso è « banale » ma la dimostrazione è interessante perchè mostra chiaramente quali sono le informazioni che mancano, nei casi in cui $\varphi \neq 0$, per il raggiungimento di analoghe conclusioni. È possibile dare una dimostrazione molto più semplice di quella che segue [8], che però non pone in luce le vere difficoltà del caso generale.

Nel prossimo paragrafo esporrò alcuni risultati noti circa l'esistenza in senso forte di soluzioni statistiche delle equazioni del moto.

4. – Soluzioni statistiche forti.

Come già detto non descriverò in dettaglio la definizione di misura di Gibbs, ma ne enumererò alcune importanti proprietà che saranno utili nel seguito.

Considererò in dettaglio il caso unidimensionale, per semplicità.

Sia $\xi \in R$ e poniamo $\log_+ \xi = \log(|\xi| \vee e)$ ove $\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$.

Se $\delta > 0$ definiamo

$$\mathcal{K}^\delta = \Big\{ X | X \in \mathcal{K},\ X = (p_i, q_i)_{i=1}^\infty,\ |p| = \sup_i \frac{|p_i|}{\lg_+ |q_i|} < +\infty ,$$
$$|q| = \sup_{\xi \in R} \sup_{l \geq \lg_+(\xi)} \left(\frac{\text{numero di } q_j \text{ tali che } |q_j - \xi| \leq l}{2l} \right) < +\infty ,\ |q| \vee |p| \leq \delta \Big\} .$$

L'insieme $\mathcal{K}_\delta \subset \mathcal{K}$ può essere visualizzato come lo spazio delle $X \in \mathcal{K}$ tali che la velocità di una particella di X a distanza $|q|$ dall'origine non supera $\delta \lg |q|$ e la densità nell'intorno di ξ non supera $\delta \log \xi$ e, al tempo stesso, su intorni di ξ abbastanza grandi non supera δ (« densità media limitata da δ con fluttuazioni che crescono al più logaritmicamente allontanandosi dall'origine »).

Se $X \in \bigcup_{\delta > 1}^{<+\infty} \mathcal{H}_\delta = \mathcal{H}$ la densità dei punti di X e le loro velocità crescono « moderatamente » e con « fluttuazioni moderate » man mano che ci si allontana dall'origine.

La proprietà fondamentale delle misure di Gibbs con potenziale φ è, nel caso $d = 1$, la seguente [1]:

LEMMA. – Se $\varrho \in \mathfrak{S}_g$ esiste una costante $C_\varrho > 0$ tale che

$$\varrho(\mathcal{H}_\delta) \geqslant 1 - \frac{C_\varrho}{\delta^\delta}.$$

Inoltre $\tilde{\mathfrak{A}}$ è densa in $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ nella norma di $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ e $(\mathcal{K}, \varrho)$ è una misura non atomica di Lebesgue. Un lemma analogo vale nel caso $d > 1$.

L'interesse degli spazi $\mathcal{H}_\delta$ sopra introdotti e la loro rilevanza per il problema delle soluzioni statistiche in senso forte (con $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_g$) delle equazioni di Hamilton sta nel seguente teorema di LANFORD [1]:

TEOREMA. – Se $X \in \mathcal{H} = \bigcup_{\delta \geqq 1} \mathcal{H}_\delta$ esiste ed è unica una soluzione $X(t)$ delle equazioni del moto con potenziale φ e dato iniziale $X(0) = X$ e tale che $\forall T > 0$ esiste δ_T tale che $X(t) \in \mathcal{H}_{\delta_T}$, $|t| \leqslant T$. Si pone $X(t) = T_t X$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Tale soluzione ha la proprietà che la trasformazione $T_t: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è una applicazione boreliana di $\mathcal{H}$ in sè che è un automorfismo, mod. O, della misura $(\mathcal{K}, \varrho)$, inoltre T_t è continua su $\mathcal{H}_\delta$, $\forall \delta \geqslant 1$.

Il dominio del generatore infinitesimo del gruppo fortemente continuo di unitari in $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ definito da:

$$(U(t) f)(X) = f(T_t X)$$

contiene $\tilde{\mathfrak{A}}$ e, su $\tilde{\mathfrak{A}}$, coincide con l'operatore di Liouville (di cui è, dunque, una estensione emiautoaggiunta).

Questo teorema mostra che, per sistemi unidimensionali interagenti con potenziale a due corpi φ (del tipo considerato in questo articolo), vale un teorema di esistenza per le equazioni di Hamilton in senso statistico forte per la classe $\mathfrak{S}_g$ delle misure di Gibbs.

Nel caso $d \geqslant 2$ vale un teorema di esistenza di soluzioni statistiche in senso forte per le equazioni del moto. Tale teorema è però, nella sua forma attuale, molto più debole di quello valido per $d = 1$ in quanto la classe $\mathfrak{S}$ va, in questo caso, scelta consistente di un unico elemento $\varrho \in \mathfrak{S}_g$. In altri termini fissato $\varrho \in \mathfrak{S}_g$ esiste uno spazio $\mathcal{H}_\varrho \subset \mathcal{K}$, dipendente da ϱ, in cui vale il teorema di esistenza e, sotto opportune ipotesi di regolarità, di unicità per le soluzioni delle equazioni del moto.

I teoremi di esistenza e unicità ora menzionati per soluzioni statistiche forti si possono riguardare come teoremi di esistenza per soluzioni statistiche deboli ma non come teoremi di unicità per tali soluzioni. Il problema dell'unicità in senso debole sembra essere un problema molto interessante anche dal punto di vista delle applicazioni.

5. – Il gas libero.

L'unico caso in cui è attualmente possibile concretizzare pienamente le considerazioni dei paragrafi precedenti è il caso del gas libero.

Le misure di Gibbs associate al potenziale $\varphi = 0$ si descrivono molto semplicemente in termini di due parametri positivi z e β e delle misure degli insiemi

$$A_\Lambda(D) = \{X | X_\Lambda \in D \subset (R^d \times R^d)^s\}$$

ove: X_Λ = insieme delle coppie $(p, q) \in X$ tali che $q \in \Lambda$, è un aperto limitato di R^d e $s \geqslant 0$ è un intero e D un boreliano di $(R^d \times \Lambda)^s$; si pone $(R^d \times \Lambda)^0 = \{0_\Lambda\}$ = insieme delle $X \in K$ tali che $X_\Lambda = \emptyset$.

Si ha, se $|\Lambda|$ = volume di Λ:

$$\varrho(A_\Lambda(D)) = \int_D \frac{dp_1 \dots dp_s \, dq_1 \dots dq_s}{s!} z^s \cdot \left(\prod_{i=1}^s \frac{\exp[-\beta(p_i^2/z)]}{\sqrt{\pi 2/\beta}} \right) \exp[-z|\Lambda|$$

se $s \neq 0$ e, se $s = 0$:

$$\varrho(\{0_\Lambda\}) = \exp(-z|\Lambda|)$$

(« distribuzione di Poisson sulle q e di Maxwell sulle p »). Consideriamo, per semplicità, il caso $d = 1$.

La trasformazione $T_t \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$:

$$T_t(X) = \{p_i, q_i'\}_{i=1}^\infty = (p_i, tp_i + q_i)_{i=1}^\infty \qquad \text{se } X = (p_i, q_i)_{i=1}^\infty$$

è definita $\forall X \in \mathcal{H}$ ove $\mathcal{H} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{H}_n$ è l'insieme di configurazioni introdotto nel paragrafo precedente.

È facile vedere che ϱ è invariante rispetto alla trasformazione T_t, $\forall t \in (-\infty, +\infty)$, e che T_t definisce un gruppo fortemente continuo in $L_2(\mathcal{K}, \varrho)$ di unitari $(U(t)f)(X) = f(T_t X)$ il cui generatore $\mathfrak{L}$ è un operatore emiautoaggiunto il cui dominio contiene $\tilde{\mathfrak{A}}$ e che, su $\tilde{\mathfrak{A}}$, coincide con l'operatore di Liouville

$$(\mathfrak{L}f)(X) = \sum_{i=1}^\infty p_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(X) \qquad \text{se } X = (p_i, q_i)_{i=1}^\infty \in \mathcal{H} \text{ e } f \in \tilde{\mathfrak{A}}\,.$$

Per dimostrare che l'operatore $\mathfrak{L}$ è essenzialmente emiautoaggiunto su $\tilde{\mathfrak{A}}$ si può ricorrere al seguente criterio [7].

PROPOSIZIONE. - Sia $U(t) = \exp \tilde{\mathfrak{L}} t$ un semigruppo fortemente continuo di unitari su uno spazio di Hilbert $\mathfrak{H}$ e sia $\mathfrak{A}$ una varietà lineare densa in $\mathfrak{H}$.

L'operatore $\mathfrak{L}$, restrizione di $\tilde{\mathfrak{L}}$ ad $\mathfrak{A}$, è essenzialmente emiautoaggiunto se i vettori in $U(t)\mathfrak{A}$ appartengono al dominio della chiusura di $\mathfrak{L}$, $\forall t \in R$.

Sia dunque $f \in \tilde{\mathfrak{A}}$: occorrerà mostrare che la funzione $f(T_t X) \in$ dominio della chiusura di $\mathfrak{L}$.

Se $f \in \tilde{\mathfrak{A}}$ esiste un intervallo finito $\bar{\Lambda} = (-\bar{\lambda}, \bar{\lambda})$ tale che, se due configurazioni $X, Y \in \mathcal{K}$ differiscono solo «fuori di $\bar{\Lambda}$» ossia solo per le coppie (p, q) con $q \notin \bar{\Lambda}$, si ha $f(X) = f(Y)$.

Poniamo $\bar{\Lambda}_n = (-n, n)$ e

$$\tilde{f}_n(X) = f(T_t(X_{\Lambda_n}))$$

ove X_Λ denota l'insieme delle coppie $(p, q) \in X$ tali che $q \in \Lambda$ e $f(T_t(X_{\Lambda_n}))$ è definita come il valore di f su un qualunque elemento di $\mathcal{K}$ che coincide con $T_t(X_{\Lambda_n})$ all'interno di $\bar{\Lambda}$ e $T_t(X_{\Lambda_n})$ è definito similmente a $T_t(X)$.

Sia $\theta_\varepsilon : R \to R$ una funzione non negativa infinitamente differenziabile con supporto in $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ ed area unitaria.

Se $X = (p_i, q_i)_{i=1}^\infty \in \mathcal{K}$ e se $(\delta_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ poniamo $X + \delta = (p_i, q_i + \delta_i)_{i=1}^\infty \in \mathcal{K}$ e

$$f_n^{\theta_\varepsilon}(X) = \int \tilde{f}_n(X + \delta) \prod_{i=1}^\infty (\theta_\varepsilon(\delta_i)\, d\delta_i) .$$

È facile vedere che $f_n^{\theta_\varepsilon} \in \tilde{\mathfrak{A}}$.

Faremo ora vedere che

$$f^{\theta_\varepsilon}(X) = \int f(T_t(X + \delta)) \prod_{i=1}^\infty \theta(\delta_i)\, d\delta_i = \lim_{n\to\infty} (\mathfrak{L} f_n^{\theta_\varepsilon})(X)$$

è nel dominio della chiusura $\bar{\mathfrak{L}}$ di $\mathfrak{L}$.

A tale scopo si osservi che se $X \notin \mathcal{K}_s$, $X \in \mathcal{K}_{s+1}$ allora $X + \delta \notin \mathcal{K}_{\alpha s}$, $X + \delta \in \mathcal{K}_{\alpha^{-1} s}$ ove $0 < \alpha < 1$ è una opportuna costante positiva [1].

Quindi il numero di punti di $T_t((X + \delta)_{\Lambda_n})$ che nel tempo intercorrente fra 0 e t penetra nell'intervallo $\bar{\Lambda}$ è maggiorato da (cfr. il teorema del § 4):

$$N_s = C(t) s^2$$

inoltre tali punti hanno una velocità massima maggiorata da

$$V_s = C(t) s^2$$

ove $C(t)$ è un'opportuna costante (invece di s^2 si potrebbe avere, in queste stime, $s \log_+(s \log_+ s)$).

È allora facile vedere che, se $X \notin \mathcal{H}_s$ e $X \in \mathcal{H}_{s+1}$

$$|(\mathcal{L}f_n^{\theta_\varepsilon})(X)| \leqslant \|\theta_\varepsilon'\|_1 \|f\|_\infty C(t)^2 s^4 .$$

D'altra parte $\varrho(\mathcal{H}_{s+1} \setminus \mathcal{H}_s) \leqslant C_\varrho / s^s$ ed è evidente che, se $X \in \mathcal{K} = \bigcup_{1 \geqslant s} \mathcal{H}_s$:

$$\lim (\mathcal{L}f_n^{\theta_\varepsilon})(X) = \int (\mathcal{L}f)(T_t(X+\delta)) \prod_{i=1}^{\infty} \theta(\delta_i)\, d\delta_i$$

in senso puntuale. Quindi si deduce, per il teorema di convergenza dominata, che il $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}f_n^{\theta_\varepsilon}$ ha luogo anche in L_2. Poichè, per il teorema di convergenza dominata, $\lim_{n\to\infty} f_n^{\theta_\varepsilon} = f^{\theta_\varepsilon}$ in L_2 si deduce che f^{θ_ε} è nel dominio di $\mathcal{L}$ e

$$(\bar{\mathcal{L}} f^{\theta_\varepsilon})(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \frac{\partial f^{\theta^\varepsilon}}{\partial q_i}(X) = \int (\mathcal{L}f)(T_t(X+\delta)) \prod_{i=1}^{\infty} \theta(\delta_i)\, d\delta_i .$$

Una ulteriore applicazione del teorema di convergenza dominata consentirà di affermare che $\lim_{\varepsilon\to 0} f^{\theta_\varepsilon}(X) = f(T_t X)$ in L_2 e $\lim_{\varepsilon\to 0} (\bar{\mathcal{L}} f^{\theta_\varepsilon})(X) = (\mathcal{L}f)(T_t X)$ in L_2 e quindi dirà che $(U(t)f)(X) = f(T_t X)$ è nel dominio di $\bar{\mathcal{L}}$ e $\bar{\mathcal{L}}(U(t)f) = U(t)(\mathcal{L}f)$, concludendo la dimostrazione.

Poichè le convergenze di $f^{\theta_\varepsilon}(X)$ e $\bar{\mathcal{L}} f^{\theta_\varepsilon}(X)$ ad $f(T_t X)$ e $\bar{\mathcal{L}} f(T_t X)$ sono evidenti per ogni $X \in \mathcal{H} = \bigcup_{s=1}^{\infty} \mathcal{H}_s$ occorre solo dare una stima della grandezza di $(\bar{\mathcal{L}} f^{\theta_\varepsilon})(X)$ per $X \in \mathcal{H}_{s+1}$, $X \notin \mathcal{H}_s$.

In base alle ipotesi fatte sulle funzioni di $\tilde{\mathfrak{A}}$ e alle stime di N_s e V_s prima discusse è chiaro che

$$|(\bar{\mathcal{L}} f^{\theta_\varepsilon})(X)| \leqslant V^{K_f^{(1)}+1} N_s C_f^{(1)}(N)^{K_f^{(1)}+1}$$

ove $C_f^{(1)}$ e $K_f^{(1)}$ sono le costanti associate a $f \in \tilde{\mathfrak{A}}$.

Poichè $\forall C > 0$, $g > 0$ la funzione $F(X) = Cs^g$, se $X \in \mathcal{H}_{s+1} \setminus \mathcal{H}_s$ è in $L_p(\mathcal{K}, \varrho)$, $\forall p \geqslant 1$, $p < \infty$, siamo effettivamente nelle ipotesi del teorema di convergenza dominata.

6. – Conclusioni.

In questo lavoro si sono discusse le equazioni di Hamilton con particolare riguardo alle soluzioni statistiche rispetto a classi di misure stazionarie. Si è messa in luce da questo punto di vista, la mancanza di un teorema di unicità soddisfacente in apparente contrasto con le affermazioni di esistenza ed unicità che si trovano nella letteratura.

In realtà, come è stato più volte sottolineato dagli stessi autori dei teoremi in questione, si tratta di teoremi di esistenza ed unicità insoddisfacenti perchè validi per soluzioni soggette ad eccessivi requisiti di regolarità [1].

Questa situazione che si presenta per le equazioni di Hamilton dovrebbe presentarsi anche per le equazioni «più semplici» che ne sono «conseguenza» quali le equazioni di Boltzmann, di Navier-Stokes, di Eulero e sarebbe interessante studiare se anche per queste equazioni ci sia la possibilità di una simile intricata relazione fra teoremi di esistenza e unicità e condizioni di regolarità, almeno per quanto riguarda le soluzioni statistiche rispetto ad opportune misure stazionarie.

Tale problema sembra aperto perfino nei casi in cui si hanno teoremi di esistenza e unicità (cioè, ad es. «equazione di Boltzmann omogenea» o «equazione di Navier-Stokes bidimensionale»).

L'esempio del gas perfetto mostra come, in un caso in cui si pensa che «tutto» sia noto, sia effettivamente possibile mostrare l'equivalenza fra l'esistenza e unicità in senso statistico debole (rispetto a certe classi di misure stazionarie) e le proprietà di autoaggiunzione di un certo operatore lineare.

* * *

Mi è gradito e doveroso ringraziare C. BOLDRIGHINI, L. TRIOLO e, soprattutto M. PULVIRENTI per lunghe discussioni nelle quali le idee che si trovano in questo lavoro si sono sviluppate.

BIBLIOGRAFIA

[1] i) O. LANFORD, Comm. Math. Phys., **9** (1968), p. 176.
ii) O. LANFORD, Comm. Math. Phys., **11** (1969), p. 257.
iii) J. SINAI, Soviet Theor. Math. Phys., **12** (1973), p. 487.
iv) J. SINAI, *The construction of Cluster dynamics for dynamical system of Statistical Mechanics*, est. Moscow Univ. (1974).
v) C. MARCHIORO - S. PELLEGRINOTTI - E. PRESUTTI, Comm. Math. Phys., **40** (1975), p. 175.
vi) O. LANFORD, *Proceedings of the Battelle-Seattle Rencontres in Mathematics and Physics*, Springer, Lecture notes in Physics, editor J. MOSER, vol. 38, 1975.

[2] C. FOIAS - G. PRODI: Rendiconti Seminario Matematico di Padova, **39** (1967), p. 1; C. FOIAS: Russian Mathematical Sinveys, **29** (1975), p. 293; A. MONIN - A. YAGLOM: *Statistical Fluid Mechanics*, MIT press, 1972.

[3] Vedi, ad es., O. LANFORD, cit., [1] ii).

[4] G. GALLAVOTTI - M. PULVIRENTI, *Classical KMS condition and the Tomita-Takesaki theory*, Comm. Math. Phys., **46** (1976), p. 1.

[5] V. ROKHLIN, *On the fundamental ideas of measure theory*, Translation no. 71 of the Am. Math. Soc. (1952), pp. 1-54.

[6] G. GALLAVOTTI - E. VERBOVEN, *The classical KMS condition*, Il Nuovo Cimento, **28** B (1975), p. 274.

[7] M. REED - B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 1, Academic Press, 1972.

[8] M. AIZEMAN - G. GALLAVOTTI - S. GOLDSTEIN - J. LEBOWITZ, *Stability and equilibrium states of infinite classical systems*, in stampa su Comm. Math. Phys.